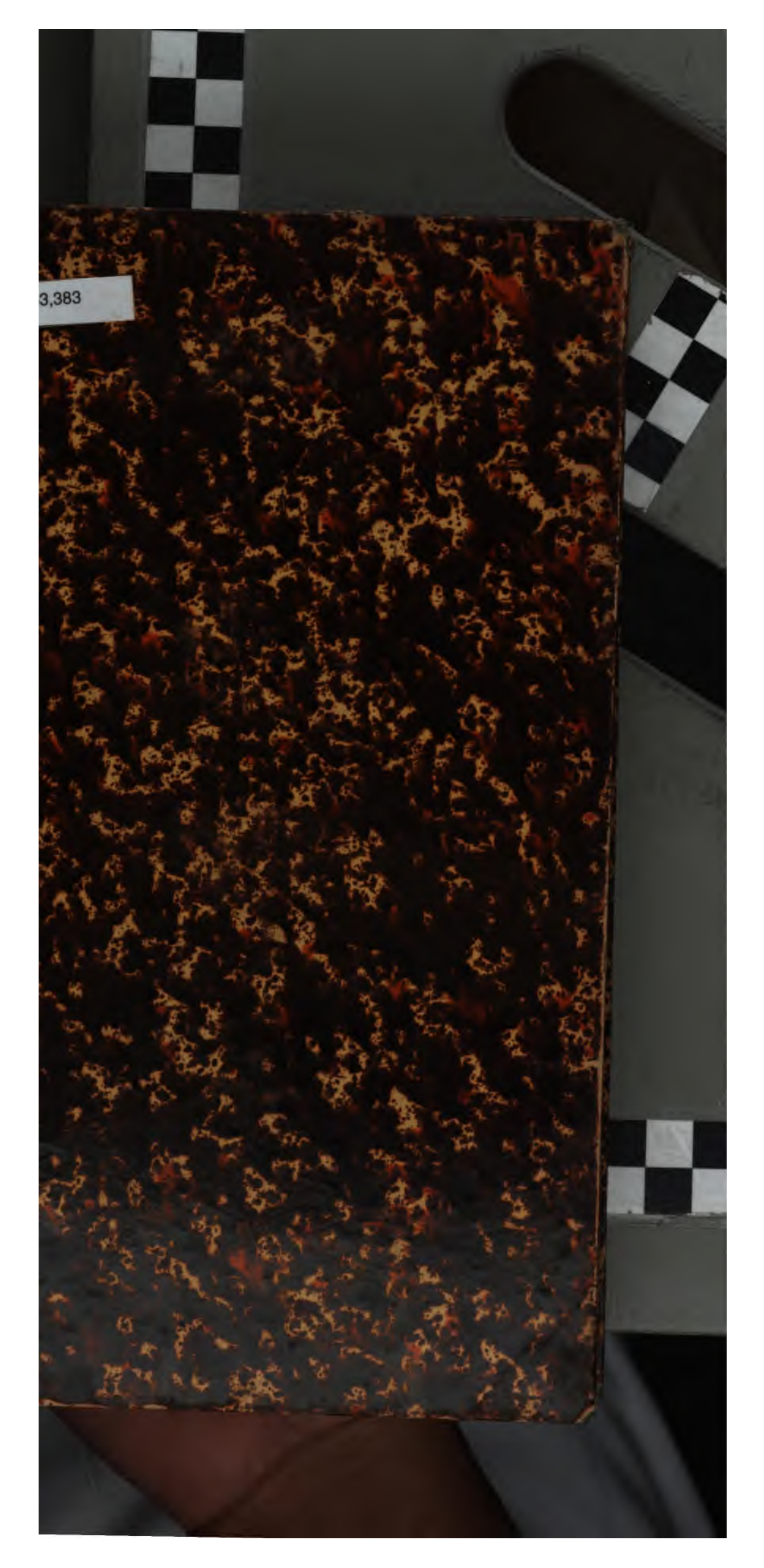

3,383



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ DES

SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

Bordeaux — Imp. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11.

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ

DES SCIENCES

PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

TOME IV

1er Cahier

A PARIS
CHEZ J.-B. BAILLIÈRE
LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DE MÉDECINE
rue Hautefeuille, 19.
A LONDRES, chez H. BAILLIÈRE, 219, Regent Street.—A NEW-YORK, chez H. BAILLIÈRE, 290, Broadway.
A MADRID, chez BAILLY-BAILLIÈRE, calle del Principe, 11

A BORDEAUX
CHEZ CHAUMAS-GAYET, LIBRAIRE
Fossés du Chapeau-Rouge, 34

1866

Bordeaux — Imp. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11.

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ

DES SCIENCES

PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

TOME IV

1er Cahier

A PARIS

CHEZ J.-B. BAILLIÈRE

LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DE MÉDECINE

rue Hautefeuille, 19.

A LONDRES, chez H. BAILLIÈRE, 219, Regent Street. — A NEW-YORK, chez H. BAILLIÈRE, 290, Broadway.

A MADRID, chez BAILLY-BAILLIÈRE, calle del Principe, 11

A BORDEAUX

CHEZ CHAUMAS-GAYET, LIBRAIRE

Fossés du Chapeau-Rouge, 34

1866

COMPOSITION DU BUREAU DE LA SOCIÉTÉ

pour l'année 1865-1866.

MM. ROYER, *président.*
H. GINTRAC, *vice-président.*
CHATARD, *secrétaire.*
MÉTADIER, *secrétaire-adjoint.*
MICÉ, *trésorier.*
VALAT, *archiviste.*
AZAM, ABRIA ✻, LESPIAULT, } *membres du Conseil.*

LISTE DES MEMBRES TITULAIRES ET CORRESPONDANTS.

§ Ier. — Membres titulaires.

MM. ABADIE, licencié ès sciences.
ABRIA ✻, doyen de la Faculté des Sciences.
ALEXANDRE, pharmacien.
AZAM, professeur à l'École de Médecine.
BAUDRIMONT ✻, agrégé libre de la Faculté de Médecine de Paris, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.
BAUDRIMONT (Édouard), chef des travaux de physique et de chimie à la Faculté des Sciences.
BÉRO, ingénieur civil, ancien élève de l'École Centrale des Arts et Manufactures.
BERT, professeur à la Faculté des Sciences.
BILLIOT, licencié ès sciences mathématiques et physiques.
BROCHON (E.-H.), avocat à la Cour Impériale.
CHATARD, docteur en médecine.
COLOT, licencié ès sciences.
COUERBE, chimiste, à Verteuil (Médoc).
DELMAS, docteur en médecine.
DUPUY, professeur au Lycée Impérial.
GINTRAC (Henri), professeur à l'École de Médecine.
GLOTIN ✻, ancien officier de la Marine Impériale.
GUÉPIN, docteur en médecine.
GUESTIER (Daniel), négociant.
HOUËL, professeur à la Faculté des Sciences.
JEANNEL ✻, professeur à l'École de Médecine.
LACOLONGE (DE) ✻, chef d'escadron d'artillerie en retraite.
LADEVI-ROCHE, licencié ès sciences.
LANDE, interne adjoint à l'Hôpital Saint-André.
LANGLADE (DE), ingénieur civil, ancien élève de l'École Polytechnique.
LAVERGNE (comte DE).

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ DES

SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

MM. LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences.
LINDER ✱, ingénieur au corps Impérial des Mines.
LUZUN, docteur en médecine.
MANÈS ✱, officier de l'armée.
MARX, docteur en médecine.
MÉTADIER, docteur en médecine, licencié ès sciences.
MICÉ, licencié ès sciences, professeur à l'École de Médecine.
MORIZOT, professeur au Lycée Impérial.
ORÉ, docteur ès sciences, professeur à l'École de Médecine, chirurgien en chef de l'hôpital Saint-André.
PÉRIER, pharmacien à Pauillac (Gironde).
PICKMAN, manufacturier à Séville.
PRAT, pharmacien à Bordeaux.
ROCHET, rédacteur du journal *les Tablettes agricoles*.
ROYER, licencié ès sciences mathématiques et physiques, chef d'institution.
SAINT-MARTIN, propriétaire.
SALET, docteur en médecine.
SAMY, préparateur à la Faculté des Sciences.
SANSAS, avocat à la Cour Impériale.
SENTEX, docteur en médecine, chef interne à l'hôpital Saint-André.
SERRÉ, professeur au Lycée Impérial.
SIRECH, médecin à Saint-André-de-Cubzac (Gironde).
SOLLES, docteur en médecine.
SOUS, docteur en médecine.
VALAT, ancien recteur.
VERGÉLY, docteur en médecine.

§ II. — Membres correspondants.

MM. BOUÉ, régent de physique au collége de Sarlat (Dordogne).
BOURGUIGNAT, aide naturaliste au Muséum d'histoire naturelle de Paris.
BURGADE, docteur en médecine, à Libourne.
DELBOS, docteur ès sciences, professeur à l'École des Sciences appliquées de Mulhouse.
GARRIGAT, docteur en médecine.
KEMMERER DE SAINT-MARTIN, docteur en médecine, île de Ré.
LAVERNELLE (Oscar DE), chef du cabinet du Directeur général des lignes télégraphiques, au Ministère de l'intérieur.
LE BESGUE ✱, correspondant de l'Institut de France (Académie des Sciences), professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Bordeaux.
MONTESQUIOU (Louis DE), docteur en médecine, près d'Agen.
MUSSET, docteur ès sciences, chef d'institution à Toulouse.
RAMEY (Eugène), naturaliste à Paris.
ROBIN (Édouard), professeur de chimie, à Paris.
RODET, ingénieur de la Manufacture des tabacs de Paris, ancien élève de l'École polytechnique.

ÉLOGE

DE F.-A. BAZIN

Fondateur de la Société des Sciences physiques et naturelles

DE BORDEAUX

PAR LE Dr AZAM

Professeur à l'École de Médecine, ancien Président.

Messieurs, il appartenait à la Société des Sciences physiques et naturelles de louer dignement le savant, l'homme de bien qui l'a fondée. En retraçant dans nos Mémoires cette vie pleine d'enseignements et de nobles exemples, nous ne faisons qu'acquitter une dette de reconnaissance et remplir un devoir pieux.

Vous m'avez choisi pour remplir cette tâche honorable, estimant sans doute que le souvenir de l'affection que Bazin m'a toujours témoignée saurait guider ma plume. Puissent, en effet, la reconnaissance de l'élève et le dévouement de l'ami m'inspirer un langage digne à la fois de vous et de lui.

Bazin (François-Aman) est né à Basseneville (Calvados) le 5 octobre 1796. Ses parents étaient de petits cultivateurs pauvres, ou pour pour mieux dire de simples paysans. Destiné comme eux aux travaux des champs, il ne reçut dans son enfance que les rudiments d'instruction qu'on distribuait alors aux enfants des campagnes. Il apprit à peine à lire. Il arriva ainsi à l'âge de seize ans, lorsqu'un hasard heureux développa en lui le goût de l'instruction. Ce goût, et plus encore une inébranlable volonté, furent le point de départ de sa carrière. Vers 1811, un vieux sous-officier qui avait parcouru le monde à la suite de nos armées, rentrait dans ses foyers, à Basseneville. Comme tout vieux soldat, il racontait volontiers ses campagnes, et la grande histoire à laquelle il avait été mêlé depuis vingt ans. Ses récits pittoresques charmaient les veillées. Quelle était la famille qui ne pleurât alors un fils, un

frère, victime de ces luttes gigantesques, ou qui n'attendît pas son retour?

De tous les auditeurs qui se pressaient autour du vieux militaire, le plus fidèle, le plus attentif, le plus désireux de tout savoir était le jeune Bazin; le sous-officier le remarqua, et le prit en affection. Il savait écrire, l'enfant voulait apprendre; après quelques mois de leçons, il en savait autant que son maître.

Touchant spectacle et singulier maître pour celui qui devait atteindre aux plus hauts grades que puisse conférer l'Université! Mais l'élève eut bientôt épuisé cette première source. S'il n'avait beaucoup appris, il savait du moins l'étendue de ce qui lui restait à connaître. Les vastes horizons de l'intelligence s'étaient ouverts devant lui.

Mais comment concilier son désir d'apprendre avec la nécessité de gagner par les plus durs travaux le pain de chaque jour? Bazin, qui avait alors seize ans, ne s'arrêtera pas devant un tel obstacle. Chaque soir, après sa rude journée, il va à Caen, distant de plusieurs lieues, pour suivre des cours élémentaires; il revient la nuit, et le matin le retrouve aux champs. Ainsi seulement il peut acquérir cette instruction élémentaire, premier fruit si facile de l'enfance, que ses difficultés ont disparu de nos souvenirs.

Quelque temps après, sa vocation était décidée, il quittait les travaux de la terre pour ceux de l'esprit. Installé à Caen, comme garçon de boutique d'un droguiste, il peut se livrer plus aisément à son goût pour l'étude.

Ainsi s'écoulèrent cinq années, après lesquelles il savait le français, l'anglais, un peu de latin et les mathématiques. Il possédait assez bien ces sciences pour pouvoir les enseigner à son tour. Sept ans auparavant il savait à peine lire.

Il pouvait donc renoncer au travail de ses bras. Muni de quelques bonnes recommandations, il part pour l'Angleterre pour s'y livrer au professorat.

Pendant les huit années qui suivirent, Bazin habita soit Londres, soit Bath, attaché comme professeur à diverses maisons d'éducation. Que de fois il m'a parlé de ce temps qui pour tous est le plus beau de la vie, car il est la jeunesse! Pour lui ce fut la lutte, la lutte incessante contre les plus dures nécessités. Il aimait cependant à dire que de cette époque date en lui le goût qui le dirigea

vers les sciences naturelles. Il apprit à aimer la nature dans ses excursions au pied des hautes falaises de Bath.

En 1828, il se marie dans cette petite ville, et quelques jours après il rentrait en France. Son mariage lui donnait une position qui, si elle n'était plus la misère, était bien loin de l'aisance. Il avait 1,200 fr. de rente.

A Paris, Bazin se fait recevoir bachelier ès-lettres, et il étudie la médecine.

Mais si modestes que soient les goûts, il faut faire vivre une femme et un enfant. L'illustre de Blanville, auquel Bazin sut plaire, l'aida de ses conseils, et lui donna une petite place dans son laboratoire du Museum. Épris des sciences naturelles, surtout de la zoologie, il arrive bientôt à une grande habileté dans l'art des préparations anatomiques.

Mais la fatalité le poursuit. A peine convalescent d'une fièvre typhoïde, il voit mourir son premier enfant. La mort frappait auprès de lui son premier coup. Elle ne devait pas s'arrêter.

A ce moment éclate le choléra de 1832. Encore affaibli, il brave l'épidémie et cette immense terreur qui frappa la France à l'apparition du mal inconnu. Le dévouement est une diversion à ses peines, il se distingue entre tous, et la ville de Paris lui décerne une médaille d'honneur.

Quelques mois après, il était reçu docteur en médecine. Sa thèse a pour titre : *Essai sur les maladies de l'utérus.*

En 1835, le choléra frappe Marseille. Bazin sollicite l'honneur d'être mis au nombre des médecins que Paris envoie contre le fléau. M. Guizot, qui le protégeait, fait agréer sa demande. On le voit, alors comme aujourd'hui, le Corps médical était à la hauteur de sa tâche. Pour avoir le droit de braver la mort de près, il n'était pas d'appui trop puissant.. A Marseille comme à Paris, Bazin se dévoue, et le maire de la ville, M. Consolat, lui donne une attestation de ses services conçue dans les termes les plus flattteurs. Son devoir accompli, ne cherchant rien de plus, et dénué de cette adresse qu'on nomme le *savoir faire,* Bazin retourne à ses travaux et rejoint sa femme malade. Mais à ce moment on l'attendait à Nîmes. Cette ville, où le choléra ne s'était pas montré, était dans la terreur. Recommandé au préfet du Gard par son puissant protecteur, Bazin ne voit pas de services à rendre à une population

que le fléau avait épargnée. Il n'y va pas. A l'heure des récompenses, on décore à sa place un médecin prudent qui, parti de Paris avec lui, était resté à Nîmes, où il avait joué le rôle facile de consolateur.

Si j'ai dit avec quelques détails cet épisode de la vie de notre fondateur, c'est qu'il en avait conservé un amer souvenir. Cet homme austère et honnête avait fait son devoir; il en avait la conscience, et lorsqu'on lui rendit une justice tardive, il disait volontiers que c'était trop tard, et que cette croix qu'on donnait à ses services universitaires, c'était sa conduite dans le choléra de Marseille qui l'aurait méritée.

De retour à Paris, Bazin continua à se livrer avec ardeur à l'étude des sciences naturelles et à travailler avec de Blainville. Pendant les années qui suivirent, il publia une série de travaux que nous mentionnerons plus loin, d'après une note laissée par lui. C'est à cette époque qu'il présenta à l'Institut plusieurs Mémoires importants sur la structure des poumons de l'homme et des animaux vertébrés. Ces travaux, après des Rapports de Flourens, de Blainville et de Serres, furent insérés dans le Recueil des Savants étrangers.

Grâce à cet honneur, Bazin put être autorisé à soutenir ses thèses pour le doctorat ès sciences naturelles. Ce grade lui fut conféré le 6 novembre 1839.

La première portait ce titre : *Recherches sur l'anatomie comparée de quelques parties du système nerveux des régions céphalique et cervicale des vertébrés.*

La deuxième : *De l'absence du système nerveux dans les végétaux.*

Quelques jours plus tard, le 21 novembre 1839, Bazin était nommé professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Depuis cette époque jusqu'à sa mort, il n'a cessé de remplir avec le plus grand zèle et la plus grande distinction ces fonctions élevées, et nous tous qui l'avons connu, et qui la plupart avons été ses élèves, nous avons pu apprécier son dévouement à la jeunesse. Cependant, il trouva à Bordeaux des obstacles matériels insurmontables : il n'avait pas de laboratoire. Habitué aux facilités de toute nature que donnent les vastes amphithéâtres du Museum, il dut se borner à regret à des travaux de cabinet. Ces travaux n'en eurent pas moins une haute importance.

Au reste, il eut bientôt un autre sujet d'études profondes. Ses recherches sur le système nerveux avaient porté leur fruit. La place de médecin en chef de l'Asile des Aliénés de Bordeaux était vacante. Bazin fut désigné au choix du Ministre, et entra en fonctions le 9 octobre 1843.

La mission était élevée. Les asiles venaient d'être réorganisés par une loi nouvelle; il fallait un homme instruit et bon pour se dévouer à ce genre spécial de malades : c'était bien la place de Bazin.

C'est dans ces fonctions que nous l'avons connu et suivi chaque jour pendant des années; c'est ainsi que nous avons pu l'apprécier et l'aimer.

Depuis cette époque jusqu'à sa mort, il partagea son temps entre l'Asile des Aliénés et la Faculté des Sciences. Après tant de luttes, le petit paysan de Basseneville occupait dignement deux fonctions élevées, et avait atteint le sommet des honneurs universitaires.

Mais si le succès couronnait ainsi ses travaux et sa juste ambition, de cruelles douleurs frappaient son foyer domestique. A Paris, il avait perdu son premier enfant; à Bordeaux, il voit mourir sa jeune femme d'une maladie de poitrine, et quelques années après, sa fille lui est ravie à vingt ans par la même maladie.

Ce dernier coup fut terrible. Cette jeune fille, d'un esprit élevé, d'une intelligence hors ligne [1], était l'espoir de sa vieillesse. Désormais, il était seul : le souvenir de cette pauvre enfant et de sa longue agonie resta la plaie secrète de sa vie.

Devenu notre compatriote, Bazin acquit bientôt dans sa patrie d'adoption la situation morale élevée dont il était digne. Si la rudesse de ses jeunes années avait laissé en lui une ineffaçable empreinte; si, inhabile aux légers succès de l'esprit, il ne charmait pas ceux qui l'écoutaient, sa physionomie loyale, respirant la droiture et la vérité, les contraignait à l'estime, et une bonté profonde perçait sous sa brusquerie. C'est ainsi qu'il acquit parmi nous le solide renom qui s'attache à l'homme de bien, et qu'il sut se créer d'inaltérables amitiés.

[1] Son aide, car elle dessinait avec talent.

Pendant qu'il cultivait les sciences, il se livrait à l'exercice de sa profession. Les maladies des femmes, qui avaient fait l'objet de sa thèse inaugurale, étaient pour lui le sujet d'une prédilection particulière. De plus, sa position de médecin en chef d'un grand Asile, le désignait naturellement pour éclairer les difficultés du traitement des maladies mentales.

Dans l'exercice de la médecine, nul ne fut plus honorable, et il a emporté l'estime de tous les médecins qui l'ont connu. Membre et ancien président de la Société de Médecine de Bordeaux, il a été loué à ce titre par les paroles élevées qu'a prononcées sur sa tombe M. le Dr Dupuy.

Dans ses fonctions de médecin en chef de l'Asile, notre fondateur était aimé de tous, nous pouvons le dire, et de longs jours paisibles l'attendaient, depuis surtout qu'un changement administratif lui avait donné pour collaborateur un administrateur digne et éclairé, qui bientôt avait su le comprendre. Il a publié sur son service plusieurs Rapports remplis de vues sages, et il était membre correspondant de la Société médico-psychologique de Paris.

Bazin trouvait aux sciences d'autres charmes que les spéculations élevées; il aimait à les rendre utiles, et il seconda de son mieux toutes les applications qui peuvent améliorer le bien-être général. Il aimait aussi à les vulgariser; je dirai même que ce fut peut-être le trait le plus saillant de sa vie.

C'est ainsi qu'il fut successivement membre et président de la Société Linnéenne et membre de la Société Philomathique. Cette institution, dont le but est d'instruire les ouvriers, lui était particulièrement chère; il savait, par le souvenir de ses jeunes années, tout ce que le savoir coûte à acquérir, et il aimait à rendre facile à d'autres le chemin qu'il avait trouvé si rude.

Plus tard, il fut membre délégué, puis président du Comité régional d'Acclimatation, président du Comité de Pisciculture, membre de la Société des Amis des Sciences de Paris, etc., etc.; en un mot, toute agrégation d'hommes faite dans un but utile pouvait compter sur lui.

C'est ainsi, Messieurs, qu'il fut le fondateur de notre Société.

Vers 1850, il se vit entouré de quelques jeunes hommes, dont beaucoup sont encore parmi nous, aimant les sciences naturelles

et cherchant un moyen de travailler en commun. Il saisit avec empressement cette occasion d'être utile à la jeunesse. Plusieurs de ses collègues se joignirent à lui, et la Faculté des Sciences nous accueillit. Les maîtres donnaient la main aux élèves : notre Société fut ainsi fondée.

Que vous dire à ce sujet que vous ne sachiez mieux que moi ! Il aimait son œuvre; assidu à nos séances, il se retrouvait avec bonheur au milieu de ses élèves. Presque tous, en effet, n'avons-nous pas suivi ses cours? N'a-t-il pas été de ceux qui nous ont conféré nos grades universitaires? Bientôt la Société des Sciences physiques et naturelles s'agrandit, ses succès furent les siens, et il parlait avec joie de la situation élevée où la placent aujourd'hui ses travaux.

Bazin avait une passion, celle des beaux livres. Malgré les difficultés qu'offre la province à la satisfaction de ce goût délicat, il avait pu réunir une foule de livres rares et d'œuvres magnifiques. Il avait pour elles une affection singulière; c'était son orgueil, et il les montrait volontiers aux amis qu'il aimait à recevoir; c'était aussi, je dois le dire, toute sa fortune.

Professeur à la Faculté des Sciences depuis 1839, médecin en chef de l'Asile des Aliénés de Bordeaux depuis 1843, dans une situation scientifique éminente et entouré de l'estime de tous, notre fondateur était naturellement désigné pour une distinction honorifique élevée. Longtemps il l'avait désirée, mais jamais autant qu'après le choléra de Marseille. Lorsque, en 1864, elle lui fut tardivement décernée, il l'accueillit avec une joie mêlée de quelque amertume. Je l'ai déjà dit, il ne l'attendait plus, et ses amis en furent peut-être plus heureux que lui.

D'une constitution vigoureuse, d'une santé parfaite, il était permis d'espérer que Bazin vivrait de longs jours. Il n'en fut pas ainsi. Le 21 octobre 1865, à six heures du soir, sans que rien le fît pressentir, après une longue causerie avec le directeur de l'Asile, il remonte dans son appartement, et il est frappé d'une attaque d'apoplexie. On accourt au bruit de sa chute; mais le coup était mortel, les sources de la vie étaient atteintes; il succombait dans la nuit, frappé dans le foyer même de cette intelligence et de cette volonté dont toute sa vie avait été la glorification la plus éclatante.

C'était, je puis le dire, la mort qu'il avait désirée.

Tout ce que Bordeaux compte d'esprits éclairés tint à honneur de rendre un dernier hommage à cet homme de bien, à ce vaillant athlète. Une foule considérable se pressa autour de sa tombe. On sut alors les bienfaits qu'il avait répandus : les malades et les pauvres perdaient un père.

La plupart des Corps savants dont il avait fait partie ont retracé sur son cercueil, par la voix de leurs présidents, les services qu'il avait rendus.

Le doyen de la Faculté des Sciences, M. Abria, notre collègue, a peint sa carrière en des termes émus.

M. Guignard, directeur de l'Asile, auquel il avait été attaché depuis tant d'années ; le président de la Société de Médecine ; le président de la Société Philomathique, lui ont aussi payé leur tribut de regrets.

Nous-même, en qualité de président de la Société des Sciences physiques et naturelles, nous avons dit à notre fondateur un dernier adieu.

Combien, dans cette foule recueillie, même parmi ceux qui l'avaient aimé, ignoraient les luttes de sa jeunesse et ne se doutaient pas des efforts surhumains qu'avait dû faire son inébranlable volonté !

Après ces témoignages suprêmes, nous avons quitté ses restes le cœur plein d'une même pensée : c'est que, au dessus du faste, au dessus de la richesse, planent bien haut la royauté de l'intelligence et le culte de l'honnêteté.

NOMENCLATURE ET ANALYSE DES TRAVAUX DE BAZIN

d'après une note laissée par lui.

1° *Thèse pour le doctorat en médecine ; Essai sur les maladies de l'utérus.* — 1833.

2° *Thèses pour le doctorat ès sciences : Recherches sur l'anatomie comparée de quelques parties du système nerveux des régions céphalique et cervicale des vertébrés. — De l'absence du système nerveux dans les végétaux.* — 1839.

3° *Recherches sur la structure des organes respiratoires des animaux vertébrés.*

J. Hunter avait déjà annoncé, contrairement à l'opinion de Malpighi, qui voulait que le poumon des mammifères, des oiseaux et des reptiles fût un amas de cellules communiquant les unes avec les autres et avec les bronches, que les dernières divisions bronchiques des mammifères se terminaient par des vésicules ou des cœcums. Reissessen professait la même opinion en 1808, et obtenait le prix offert par l'Académie de Berlin. Comme le poumon est très difficile à disséquer, plusieurs anatomistes distingués, tels que Sœmmering, Laennec, Magendie, Cruveilher et autres, étaient conduits, par le très défectueux procédé de coupes faites sur des portions de poumon desséchées, à soutenir l'opinion de Malpighi, bien que Cuvier eût professé avant 1815 l'opinion de Hunter, que les nombreuses préparations de Bazin ont définitivement mises hors de doute.

Ces recherches ont été l'objet de plusieurs Mémoires présentés à l'Institut dès 1836, avec préparations et planches à l'appui. Après des Rapports de MM. Flourens, Serres et de Blainville, elles ont été insérées dans le *Recueil des Savants étrangers,* 1839.

4° La manière dont les bronches se terminent une fois connue, restait à connaître la signification des lobules pulmonaires. La découverte de la capsule pulmonaire faite par Bazin est venue résoudre cette question. Cette capsule en tissu élastique, située sous la plèvre, enveloppe les poumons, et envoie dans leur épaisseur des prolongements qui, sous des formes variées, s'étendent jusqu'à la surface de chaque cœcum. Ces prolongements se font de deux manières : chez les plantigrades, les digitigrades, les pinnigrades et les cétacés, ils se présentent sous la forme de filaments élastiques, qui s'étendent dans toutes les directions à

la surface des ramifications bronchiques; chez les autres mammifères, ce sont des expansions membraneuses qui se détachent de la face interne de la capsule pulmonaire et s'étendent dans l'épaisseur des poumons. Les surfaces que ces prolongements circonscrivent et que l'on aperçoit à travers la plèvre et la capsule elle-même, dans l'homme et dans un grand nombre de mammifères, ont été attribuées à des lobules pulmonaires; mais on en ignorait la cause, on ignorait que ces lobules se subdivisent et diminuent à mesure que l'on suit les expansions de la capsule pulmonaire dans l'épaisseur même des poumons. On ignorait et on ignore en général le rôle important que cette capsule joue dans l'expiration.

5° Bazin a constaté l'existence inconnue jusqu'à lui du tissu musculaire lisse dans les canaux bronchiques d'un millimètre à un demi-millimètre de diamètre, ce qui explique l'état spasmodique des organes respiratoires sous l'influence de certaines perturbations du système nerveux.

6° Il a prouvé que la structure du poumon des oiseaux diffère de celle des poumons des mammifères. Les poumons des oiseaux se composent de canaux aériens de plus en plus fins, à la surface desquels viennent se distribuer les vaisseaux sanguins.

7° Il a démontré que les réservoirs aériens des oiseaux ne concourent pas directement à l'hématose.

8° Il a trouvé dans les poissons à bronches libres, des muscles qui se rendent de chaque arc branchial aux lamelles branchiales, et qui en se contractant rapprochent ces dernières les unes des autres. Ces muscles, signalés par Artidi, retrouvés par Alessandrini (de Bologne) et par lui, sont de véritables muscles expirateurs.

9° Il a découvert que la prétendue glande pituitaire reçoit plusieurs faisceaux nombreux du plexus carotidien. Cette connexion directe entre un véritable *ganglion céphalique* et le grand sympathique avait été soupçonnée par Fontana et par quelques anatomistes, mais personne avant Bazin ne l'avait mise en évidence.

10° Il a constaté dans l'homme et les autres mammifères l'entre-croisement des racines des nerfs olfactifs.

11° Bazin a fait voir que les nerfs optiques envoient de nombreux faisceaux dans les pédoncules cérébraux.

12° Il a décrit pour la première fois, d'une manière complète, le système nerveux des régions céphalique et cervicale des oiseaux, et les connexions qui existent entre leurs nerfs et le grand sympathique. Ainsi, leur ganglion ophthalmique et leur ganglion de Meckel sont en communication avec le nerf facial et avec le ganglion cervical supérieur. Leur nerf facial donne naissance à une corde du tympan. Leur ganglion cervical supérieur donne naissance à deux filets nerveux : l'un, découvert

par Weber, accompagne l'artère vertébrale; l'autre, jusqu'alors inconnu, a été figuré et décrit par Bazin en 1841. Cette portion du grand sympathique des oiseaux, analogue à celle de la même région chez les mammifères, accompagne la carotide primitive et présente un ou deux ganglions cervicaux.

13° Il a poursuivi des recherches analogues dans les reptiles et dans les poissons, et s'est convaincu qu'il existe dans ces deux classes, comme dans les mammifères et les oiseaux : 1° un ganglion ophthalmique, que Cuvier n'admettait pas chez les poissons; 2° un ganglion de Meckel; 3° un analogue du nerf vidien établissant une connexion entre le nerf facial et le grand sympathique.

14° Bazin a décrit le premier le système nerveux et le grand sympathique du marsouin. (Ces recherches ont été communiquées à l'Institut en 1841, et publiées en un volume in-4° avec cinq planches.)

15° Il a suivi dans la moelle épinière la distribution de racines des nerfs rachidiens. Bichat, Cuvier, Desjardin considéraient cette dissection comme impossible. (Communication à l'Académie des Sciences, 7 septembre 1840.)

16° Il a présenté à l'Institut une Note sur l'anatomie du *Botrydium pythonis*.

Bazin a publié plusieurs Mémoires et des travaux variés dans les *Annales françaises et étrangères d'Anatomie et de Physiologie*, dont il était un des fondateurs.

Voici l'énumération de ces travaux :

17° *Analyse d'un Mémoire du professeur Owen, sur la génération des marsupiaux.*

18° *Mémoire sur la rétroversion de l'utérus à l'état de vacuité.*

19° *Histologie du tissu musculaire et élastique, et Histologie de la capsule pulmonaire.*

20° *Du degré de certitude que présentent les sciences d'observation, et Examen de cette question : La statistique est-elle applicable à la médecine?*

21° *Note sur l'état pathologique des lymphatiques d'un poumon d'Agouti.*

22° *Analyse des recherches de Panizza, sur le système lymphatique des reptiles.*

23° *Analyse des Mémoires de Bertholdi, sur la température des animaux à sang froid; — de Newport, sur la température des insectes; — de Henle, sur l'épithelium des membranes muqueuses.*

24° Un extrait de ses *Recherches sur la structure intime du poumon de l'homme et des animaux vertébrés.*

25° Plusieurs Mémoires sur des sujets d'histoire naturelle dans les

Actes de la Société Linnéenne, et dans les *Bulletins de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.*

Titres divers et fonctions honorifiques de Bazin.

1° Fondateur de la Société méd. d'observation de Paris (mars 1832).
2° Médaille d'or décernée par la ville de Paris (choléra de 1832).
3° Chirurgien aide-major du 4e bataillon de la Garde nationale de Paris (1834).
4° Médecin de la Salle d'Asile de l'île Saint-Louis (1839).
5° Membre de la Société libre des Beaux-Arts.
6° Membre de la Société Linnéenne de Bordeaux, le 5 juin 1840 (Président honoraire).
7° Membre de la Société Philomathique de Bordeaux (1848).
8° Membre de la Société de Médecine.
9° Fondateur de la Société des Sciences physiq. et naturelles (1850).
10° Membre de la Société impériale d'Acclimatation (1857);
11° — de la Société des Amis des Sciences;
12° — de la Société des Amis des Arts de Bordeaux;
13° — de la Société d'Horticulture;
14° — de la Société d'Anthropologie;
15° Président du Comité régional d'Acclimatation.
16° — du Comité de Pisciculture.

DISCOURS

PRONONCÉ

AUX OBSÈQUES DE M. BAZIN

PAR M. ABRIA.

Messieurs, tout habitués que nous sommes au peu de durée et à la fragilité de notre existence, nous n'en sommes pas moins émus douloureusement toutes les fois que la mort vient frapper à nos côtés et vient frapper des personnes dont le commerce agréable et sûr était devenu pour nous une douce habitude, remontant à une époque déjà éloignée et paraissant devoir durer longtemps encore. Combien cette séparation est plus pénible lorsqu'elle arrive par un de ces coups soudains, preuves trop évidentes du peu de sécurité de notre vie, mais qui nous surprennent toujours et nous abattent; lorsque quelques heures à peine séparent le moment où l'ami en apparence plein de jours répondait à notre affection, et celui où sa langue fixe et glacée est devenue à jamais muette!

Pardonnez-moi, Messieurs, ces réflexions; elles se sont présentées d'elles-mêmes à mon esprit lorsque j'ai voulu adresser à notre cher collègue un dernier adieu au nom d'une Faculté à laquelle nous appartenons l'un et l'autre depuis vingt-six ans.

Avant de se fixer à Bordeaux, M. Bazin lutta et lutta courageusement contre la mauvaise fortune.

Obligé de se créer une position par son travail, il suivit, dès l'âge de vingt ans, de 1816 à 1819, des cours publics de mathématiques élémentaires, professés dès cette époque dans la ville de Caen. Il alla ensuite en Angleterre, où il séjourna huit ans, donnant des leçons de français et de mathématiques et continuant les études qui lui étaient indispensables pour arriver au grade de docteur en médecine, objet de son ambition.

Il l'obtint en 1833 devant la Faculté de Paris, après cinq ans

d'études sur les lieux mêmes, études ardemment entreprises et laborieusement poursuivies, malgré les préoccupations d'une famille à soutenir et à élever.

A peine reçu docteur, il se dévoue pour aller soigner les cholériques dans le Midi, à Marseille surtout, où l'épidémie de 1835 exerça de grands ravages. Rentré à Paris, il se livre au Muséum d'histoire naturelle, dans le laboratoire de M. de Blainville, à des recherches sur le système nerveux, qu'il présenta en 1839 comme sujet de thèse pour le doctorat à la Faculté des sciences de Paris.

L'originalité de ses travaux, la persévérance avec laquelle il les avait poursuivis, le talent qu'il mit à les exposer, le désignèrent au choix du ministre pour la chaire de zoologie et de physiologie de la Faculté de Bordeaux, vacante par la retraite d'Isidore Geoffroy Saint-Hilaire.

Il l'a occupée jusqu'à son dernier moment, apportant dans l'exercice de ses devoirs un zèle et un dévouement qui ne se sont jamais démentis, s'imposant volontiers des leçons supplémentaires pour aider les aspirants à la licence ès sciences naturelles qui suivaient son cours à parcourir le cercle des nombreuses matières exigées pour cet examen.

C'est à Bordeaux que s'est écoulée la meilleure part de sa vie, mêlée aussi de peines douloureuses. Deux cruelles séparations ont attristé son intérieur : il perdit successivement en 1841 et 1854 son épouse et sa fille unique. S'il ne put triompher du mal qui les minait, il eut du moins la consolation de prolonger leur existence.

Cette vie, je puis le dire hautement, a été bien remplie. Parti de très bas, M. Bazin s'est élevé par un travail opiniâtre à une position honorable. Il a véritablement conquis sa chaire à la Faculté, le poste de médecin de l'Asile des Aliénées et la décoration de la Légion-d'Honneur, qui a couronné l'an dernier une carrière si honorablement parcourue.

Adieu, cher collègue, adieu au nom de tes élèves, au nom de tes nombreux amis, au nom de ceux voués comme toi à l'enseignement et qui ont pu apprécier de longue date ton bon et affectueux caractère.

NOTICE NÉCROLOGIQUE

SUR

M. FÉLIX BERNARD

ANCIEN MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ

PAR M. E.-HENRY BROCHON FILS

Le 23 novembre 1865, M. Félix Bernard s'est éteint, épuisé, jeune encore, par une implacable maladie qui, en dépit de soins tendres et pieux, devait tarir en lui les sources de la vie. Il avait quarante-neuf ans à peine, et occupait avec distinction la chaire de physique à la Faculté des Sciences de Clermont. L'énergie et l'élévation de son caractère, la remarquable portée de son esprit, ses mérites comme professeur, l'importance de son œuvre scientifique lui avaient fait dans notre estime une place exceptionnelle qu'il conservera toujours dans nos regrets. Pour mieux sentir nous même sinon l'amertume de notre deuil, du moins l'étendue de notre perte, rappelons en quelques mots combien fut exemplaire la vie de notre éminent collègue et combien de qualités diverses le rendaient cher à la science et à ses amis.

M. Félix Bernard naquit à Bordeaux le 5 février 1816. Admirablement doué par la nature, il fit preuve, dès son enfance, d'une aptitude particulière pour les beaux-arts. Son goût pour la peinture et la musique était extrême; il s'y adonna avec ardeur et y fit de rapides progrès. Bientôt cependant la mort prématurée de son père, architecte de talent, l'obligea d'abandonner ses études favorites. Il prit son parti en brave et s'en fut fonder au Mexique un établissement d'instruction publique. Mais il lui fallait des émotions plus vives. Le journalisme, dont il ne voyait que les nobles aspects, souriait à sa nature en quelque sorte militante; il

s'y jeta fiévreusement, et, soldat du progrès sur la terre étrangère, il se fit le patriotique champion des intérêts de la France.

Il menait cette existence toute de luttes et de périls, au milieu des secousses qui agitaient le pays, lorsque la prise de Saint-Jean-d'Ulloa ouvrit à l'amiral Baudin les portes de la Vera-Cruz. Le retentissement de ce fait d'armes, augure de prochains désastres pour la république fédérative, contraignit M. Bernard à quitter Mexico, où le nom de Français l'eût exposé peut-être à d'anonymes et mortelles représailles. Il revint donc en France, sans avoir eu le temps de recueillir le fruit de plusieurs années d'opiniâtre travail, mais heureusement désillusionné de sa chimère, et décidé à reprendre dans l'enseignement une place qu'il ne voulait plus demander à la politique. C'est alors que nous le voyons, en 1841, entrer dans l'honorable maison d'éducation de M. Lecoutre de Beauvais et y prendre la direction des études scientifiques. Dès ce moment, M. Bernard avait trouvé sa voie, et chaque jour allait la jalonner d'un nouveau succès. Douze ans plus tard, en effet, sans que pour cela il eût déserté le culte de la peinture et de la musique, M. Bernard, d'abord bachelier, puis licencié, puis docteur ès sciences, puis professeur adjoint au Lycée de Bordeaux, était, grâce à l'éclat de sa renommée, chargé de cours à la Faculté de Clermont, pour, quatre ans plus tard, y occuper comme titulaire une chaire autour de laquelle il avait su attirer un public studieux et distingué.

Que de choses dans le rapprochement de ces étapes pressées, et quel jour leur rapide succession jette sur les habitudes et la valeur de M. Bernard ! Heureuse, entre toutes, était la nature qui pouvait ainsi exceller indifféremment dans les plus aimables manifestations de l'art et dans les spéculations les plus ardues de la science ! Bien puissante était la volonté qui, en un pareil trait de temps, avait fait du jeune publiciste de Mexico le savant que nous avons aimé, tout en laissant vivaces dans son cœur ses aspirations d'artiste !

Ce n'est là pourtant, de la vie de notre regretté collègue, que le côté en quelque sorte social. Si digne qu'il soit de méditations, il ne saurait nous dispenser de rappeler, en M. Bernard, le côté purement scientifique ; il ne saurait surtout nous faire oublier en lui l'homme privé.

Mais au moment où je devrais aborder l'étude, au moins synthétique, des œuvres de notre ancien collègue, je sens combien est au dessus de mes forces la tâche dont la Société m'a honoré. Pour me rassurer, j'ai besoin de me dire que les travaux de M. Bernard sont bien connus; qu'ils ne souffriront en rien de mon impuissance à les apprécier, et que du reste, pour en faire l'éloge, je puis passer parole à des voix d'une imposante autorité.

C'est à la solution des problèmes les plus délicats de l'optique et de l'acoustique que M. Bernard a consacré ses recherches les plus assidues. L'absorption de la lumière à travers les milieux non cristallisés, la détermination des indices de réfraction des lames réfringentes; la vérification des lois de la double réfraction par le transport, la polarisation de l'atmosphère, le mouvement vibratoire des membranes élastiques, l'action générale des milieux colorés sur la lumière, la détermination des longueurs d'onde des raies du spectre au moyen de bandes d'interférence, tels furent les principaux sujets qui sollicitèrent à la fois la pénétration de son esprit et l'habileté de sa main. Il leur consacra de longues heures patientes et réfléchies, et en publia les résultats soit dans les *Annales de physique et de chimie*, soit dans les comptes-rendus de l'Institut, soit enfin dans la *Revue des Sociétés savantes*.

Trois Mémoires, qui tous contribuèrent à attirer sur leur auteur l'estime des physiciens, lui créèrent plus spécialement des droits à une flatteuse notoriété. Je veux parler du Mémoire qu'il présenta, en collaboration avec M. Bourget, le 27 août 1860, à l'Institut, sur les *Vibrations des membranes élastiques* (1) et celui qu'il envoya à cette illustre Compagnie, en juin 1864, sur l'emploi des bandes d'interférence, produites par réfraction sur les mesures des longueurs d'onde des rayons lumineux et leur application à l'analyse spectrale (2). Mon devoir est d'insister sur ces travaux, à raison de leur importance vraiment capitale.

Dans une lettre familière que M. Merget a adressée récemment à notre président, le savant professeur de Lyon s'exprime ainsi au sujet du travail de M. Bernard sur les *Vibrations des membranes élastiques* : « Savart avait affirmé qu'une membrane tendue

(1) *Comptes-rendus, 1859*, et *Ann. de phys. et de chim.*, 3e série, p. 60
(2) *Revue des Sociétés savantes*, 12 juin 1863 et 10 juin 1864.

» peut vibrer à l'unisson de tous les sons au-dessus du son fonda-
» mental. Poisson et Lainé arrivaient par le calcul à une conclu-
» sion diamétralement opposée et affirmaient que la membrane
» devait vibrer seulement à l'unisson de certains sons déterminés.
» Il y avait donc désaccord entre la théorie et l'expérience. Ber-
» nard et Bourget ont montré que Savart s'était trompé et que les
» lois théoriques se vérifiaient complètement. » — « M. Lainé,
» ajoute M. Merget, faisait un très grand cas de ce beau Mémoire
» sur un sujet qui ne pouvait être abordé que par un expérimen-
» tateur possédant tout à la fois une grande habileté pratique et
» des qualités exceptionnelles d'organisation musicale. »

Aussi le succès de ce Mémoire fut extrême. M. Milne Edwards le constata dans le rapport qu'il lut en 1863, à la Sorbonne, sur les travaux des Sociétés savantes de province. « Le Comité, dit-il,
» a suivi avec intérêt les travaux de M. Bernard, de Clermont.
» Depuis 1852, ce physicien a publié chaque année des recherches
» bien faites, relatives à l'optique et à l'acoustique. Un Mémoire
» qui lui est commun avec M. Bourget, et qui porte sur les vibra-
» tions des membranes élastiques, a de l'importance pour la phy-
» siologie aussi bien que pour la physique, et nous permet de
» mieux comprendre les fonctions de la chaîne des ondes de l'ouïe
» que ne l'avait fait Savart. »

Par ce juste hommage la réputation de notre éminent collègue se trouvait publiquement consacrée à la face de la France savante. M. Bernard devait, les années suivantes, y ajouter encore, par ses belles recherches sur les bandes d'interférence, leur emploi dans la mesure des longueurs d'onde des rayons lumineux et leur application aux raies du spectre. Ce sujet, qui le premier l'avait occupé au début de sa carrière, devait lui inspirer ses deux derniers mémoires et lui fournir le couronnement de ses travaux.

Laissons encore parler M. Milne Edwards : « A Clermont, disait-
» il en 1864, dans l'assemblée des Sociétés savantes, à la Sor-
» bonne, M. Félix Bernard a fait de nombreuses et utiles expé-
» riences d'optique. Il a fourni de nouvelles preuves à l'appui de
» la théorie de Newton, touchant la composition des couleurs, et
» il a réfuté les objections que l'un des physiciens les plus célèbres
» de l'Écosse, M. Brewster, avait cru devoir y faire. Enfin, il a
» comparé avec soin les longueurs d'ondes de diverses teintes avec

» celles de la lumière de la raie que les physiciens distinguent par » la raie D, et il a contrôlé ainsi les résultats de Frauenhofer. » Précédemment, M. Bernard avait apporté des perfectionnements » considérables à l'appareil photométrique, et, par l'ensemble de » ses travaux, il s'est placé très haut dans l'estime du Comité. En » conséquence, une médaille d'argent lui est décernée. »

Ne semble-t-il point, en lisant ces lignes, que M. Bernard avait alors conscience de sa fin prochaine, et M. Milne Edwards avec lui : l'un en mettant le sceau à sa propre renommée, l'autre en résumant les titres de notre collègue à une récompense en quelque sorte nationale, et en la lui décernant au nom de la science et de la patrie?

Aussi habile de ses mains que de sa pensée, ajoutons que M. Bernard a construit une foule d'instruments très remarquables, dont quelques-uns sont devenus classiques. « Il était, écrivait de » Clermont l'ami qui fut son collaborateur et lui ferma les yeux, » il était ingénieux à concevoir des combinaisons mécaniques, et » je l'ai souvent comparé à Foucaut sous ce rapport. Grâce à cette » habileté, il suppléait dans ses cours à la pénurie de notre Faculté » et à l'inexpérience de son préparateur, et souvent il imaginait de » charmantes expériences entièrement nouvelles. » Il puisait, on le conçoit, dans cette habileté des ressources infinies pour ses recherches. C'est ainsi que, pour démontrer la fausseté de l'hypothèse de Brewster sur le triple spectre, et pour établir que chaque couleur est simple et non un mélange de couleurs superposées, il construisit, avec des pièces exécutées par lui ou empruntées à divers instruments du cabinet de physique de la Faculté de Bordeaux, un nouvel instrument précieux pour mesurer les intensités relatives de deux lumières et la quantité de lumière polarisée qui existe dans un rayon lumineux; c'est ainsi que, comme le rappelait M. Milne Edwards, il perfectionna, pour ses recherches sur l'absorption, le photomètre employé jusque-là; c'est ainsi qu'à l'appui de sa détermination des indices de réfraction des lames réfringentes, il présenta à l'Académie des Sciences (1854) un instrument spécial, appelé réfractomètre, qui aujourd'hui est aux mains de tous les physiciens; c'est ainsi qu'il décrivit un nouveau polarimètre très sensible et très facilement maniable, qui abrége considérablement la durée des observations, sans en diminuer

aucunement la précision; c'est ainsi enfin qu'il inventa, pour mesurer la vivacité de la teinte bleue qui colore l'atmosphère, un appareil réputé pour son utilité au point de vue d'une foule de recherches astronomiques, et qui, outre qu'il permettait de procéder par des observations directes et rigoureuses en reproduisant la teinte d'une partie quelconque du ciel, avait de plus l'avantage de se prêter à une série de modifications qui le transforment, suivant les besoins, en polarimètre, en photomètre et en cyanomètre.

Disons-le donc, si cruelle que fût pour lui la destinée, M. Bernard pouvait quitter ce monde : il ne devait pas mourir tout entier. Ses travaux restent pour protéger sa mémoire.

Et maintenant que dirai-je des qualités privées de M. Bernard? A plusieurs d'entre nous il a été donné de les connaître dans la plus cordiale familiarité; à tous, elles peuvent être proposées pour modèles. M. Bernard, en effet, avait tous les mérites qui commandent la sympathie et attirent l'affection. Écoutons M. Bourget, que je me plais à citer; il a tracé de son pauvre ami le portrait touchant que voici : « Il joignait à une bonté très grande pour tout » le monde une loyauté poussée jusqu'au scrupule. Il était dans » les relations sociales d'une délicatesse extrême; il ne soupçonnait » pas le mal et voyait chez tout le monde de bonnes intentions à » travers des actes parfois mauvais à son égard. Il avait la naïveté » d'un enfant...... Le voyant à peu près tous les jours, j'ai pu ap- » précier ses qualités solides et je n'ai jamais découvert le moindre » défaut dans son âme droite et élevée. »

M. Merget ajoute, de son côté : « Pendant les années de notre » professorat au Lycée de Bordeaux, j'ai vécu dans l'intimité la » plus cordiale et la plus confiante avec l'excellent et regrettable » Bernard. J'avais pour l'homme autant d'affection que d'admira- » tion pour le savant. A vous, qu'il a familièrement connu, je n'ai » pas besoin d'apprendre combien, sous les dehors de la modestie » les plus naïvement sincères, il était véritablement supérieur par » les plus éminentes qualités du cœur et de l'esprit. »

Tel fut l'homme que notre Société a eu l'insigne honneur de compter dans ses rangs, d'abord comme membre titulaire, et plus tard, vers la fin de l'année 1855, quand il fut chargé de cours à Clermont, comme membre correspondant. Pendant plusieurs années, il prit à nos réunions une part active, et ceux d'entre nous

qui étaient présents à la séance du 27 juillet 1855, se rappellent avec quelle sagacité de pensée et quelle netteté d'expression il exposa le résultat de ses expériences sur le spectre solaire.

Combien il était enjoué à cette époque, et combien sa camaraderie était expansive! Hélas! peu de temps après, des nuages de tristesse venaient parfois obscurcir son front et refroidir sur ses lèvres la gaîté. C'était surtout aux heures où la solitude se faisait autour de lui. Peut-être qu'alors le silence lui permettait d'entendre comme une voix secrète qui lui disait sa fin prématurée. Amer pressentiment des affections qui allaient bientôt se briser pour lui!

Au moment des dernières vacances, Félix Bernard comprit mieux encore qu'il était perdu. Patient et doux il avait vécu, patient et doux il attendit sa dernière heure. Quand la bise qui annonçait l'hiver eut emporté la dernière feuille, il exhala son dernier soupir entre l'ami dévoué qui avait partagé ses travaux et l'épouse courageuse dont la tendresse l'avait consolé d'un premier veuvage.

Mais il est des douleurs qu'il faut savoir respecter en les laissant tout entières à elles-mêmes. Détournons donc nos regards de ce foyer naguère si heureux, où la mort de M. Bernard a laissé un vide irréparable. Pour nous, qui fûmes ses collègues, rapprochons-nous dans un commun sentiment d'affectueux regret; et pour tirer un enseignement de cette existence dont je viens d'esquisser les mérites, méditons sans relâche cette austère vérité que nul n'est sûr du lendemain, et que ceux-là sont les seuls enviables de ce monde, qui peuvent laisser après eux l'impérissable souvenir de leurs services et de leurs vertus!

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES

SUR

LA TRANSFUSION DU SANG

DEUXIÈME MÉMOIRE

PAR LE D[r] ORÉ

Professeur de physiologie à l'École de Médecine de Bordeaux, Chirurgien de l'hôpital Saint-André, Membre correspondant de la Société de Chirurgie.

J'ai publié, en 1863, dans le *Recueil des Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* une histoire très détaillée de la *transfusion du sang,* opération qui consiste à faire passer dans l'appareil vasculaire d'un animal le sang pris à un autre animal. Je ne reviendrai donc pas sur ce point, développé avec toute l'étendue que comportait un tel sujet. Mon but, dans cette nouvelle étude, est d'aborder la question au point de vue *expérimental,* et de montrer quelle vive lumière la physiologie peut apporter à la solution des problèmes qui intéressent le plus le médecin et le chirurgien.

Je diviserai mon travail en trois parties :

Dans la *première partie,* je décrirai les appareils employés à diverses époques pour pratiquer la transfusion.

La *seconde partie* sera consacrée à l'exposé de mes expériences de transfusion, faites soit avec le sang tel qu'il sort des vaisseaux, soit avec chacun des éléments qui le constituent.

Dans la *troisième,* j'apprécierai le rôle de la fibrine.

PREMIÈRE PARTIE

Des appareils employés pour pratiquer la transfusion du sang.

1° *Appareil de Richard Lower.* — Richard Lower a, le premier, décrit un appareil et un procédé pour opérer la transfusion. Voici en quoi ils consistent : l'artère carotide d'un animal étant mise à nu, il place autour d'elle deux fils, à un pouce de distance l'un de l'autre. Après cela, il ouvre le vaisseau et y introduit un *petit tuyau de plume,* qu'il noue fortement, en ayant le soin de boucher son extrémité libre. Pour faciliter l'intelligence de la manœuvre, j'appellerai ce premier tuyau, *tuyau carotidien.* Découvrant alors la veine jugulaire d'un autre chien, il place également deux ligatures entre lesquelles il incise la paroi. *Deux tuyaux* y sont placés : l'un, dirigé du côté de la tête, que j'appellerai *tuyau céphalique;* l'autre, du côté du cœur, ou *tuyau cardiaque.* Le premier est destiné à laisser couler le sang, afin d'épuiser l'animal; le second, à recevoir le sang transfusé. Les choses étant ainsi disposées, les deux chiens sont fortement rapprochés, et l'intervalle qui sépare le tuyau carotidien du cardiaque est rempli par une série de tubes articulés les uns avec les autres : *le sang passait ainsi dans un appareil de tuyaux de plumes allant de l'artère à la veine, et unis entre eux par leurs extrémités.*

La Figure 2, Pl. I, représente l'appareil de Richard Lower.

A est le tube cardiaque, B le tube carotidien, CCCCC les tuyaux intermédiaires.

Cet appareil, décrit dans une lettre adressée à Robert Boyle par le chirurgien anglais, fut mentionné, en 1667, par le *Journal des Savants.* Denys et Emmeretz l'employèrent en France. Quoique fort ingénieux, il offre un inconvénient grave : celui de laisser pénétrer, dans les vaisseaux, l'air contenu dans les différents tubes. Cette quantité d'air était à coup sûr bien minime; mais si l'on songe qu'elle arrivait chez des animaux affaiblis par une hémor-

rhagie préalable, on comprendra qu'elle pouvait déterminer des accidents. Quoi qu'il en soit, l'appareil de Richard Lower a rendu des services importants aux transfuseurs du XVII[e] siècle.

Avec Blundell, nous voyons apparaître, en 1818, un appareil nouveau et plus compliqué que le précédent. Cet appareil n'ayant jamais, ou presque jamais été employé, il est inutile de le décrire.

Dieffenbach a pratiqué la transfusion *immédiate* et la transfusion *médiate*.

Dans le premier cas, *il s'est servi d'un tube introduit à la fois dans l'artère d'un chien par l'une de ses extrémités, et par l'autre, dans la veine jugulaire de l'animal qu'il voulait transfuser*. C'est le procédé de Richard Lower. Il en diffère cependant en ce que ce dernier unissait entre eux un certain nombre de tuyaux de plumes, tandis que Dieffenbach n'employait qu'*un seul tube*.

Pour faire la transfusion *médiate*, il a eu recours à la *seringue à injection*. Le sang étant recueilli dans un vase, Dieffenbach remplissait l'instrument, et poussait le liquide dans la veine.

La méthode de la transfusion *médiate* ayant été préférée par la plupart des chirurgiens, on s'est servi habituellement, pour la pratiquer, de la seringue à hydrocèle; mais quelque bien calibré que soit le corps de pompe, on n'est pas toujours à l'abri de la pénétration d'une certaine quantité d'air. Aussi, pour éviter cet inconvénient, M. Mathieu, l'habile fabricant d'instruments de chirurgie, a-t-il, d'après les indications de mon excellent ami le professeur Pajot, modifié l'appareil de la manière suivante (Pl. I, fig. 3).

La partie principale de l'instrument se compose d'une seringue S (Pl. 1, fig. 3), dont le corps de pompe, en cristal très fort de parois, est terminé par des extrémités (RR') en métal, reliées entre elles par deux tringles latérales T munies d'une graduation qui donne la mesure du liquide contenu. A la partie inférieure de l'instrument se trouve un entonnoir A, monté sur un collet à frottement qui communique avec l'intérieur de la pompe; un trou B, disposé de la même manière, destiné à laisser une sortie libre à l'air, lorsque le sang de l'homme qui le fournit pénètre dans la seringue par l'entonnoir. Aussitôt que l'instrument est chargé, on fait exécuter un petit mouvement de rotation au collet, et les

deux communications A,B sont interceptées; on pousse alors le piston en tenant l'instrument dans la position verticale. De cette manière, on le purge d'air à l'instant même. Aussitôt, on met la canule dans le petit tube en ivoire C, qu'on a préalablement placé dans la veine D, et qui sert de conducteur au liquide injecté.

Je ne conteste pas l'utilité des modifications que M. Mathieu a introduites dans le mécanisme de cet instrument. Je me contente de dire que je ne m'en suis jamais servi, et que dans aucune des nombreuses observations que j'ai recueillies, je n'ai trouvé la mention de son emploi.

Hématophore de Moncocq. — L'hématophore de Moncocq est un instrument ingénieux et commode pour pratiquer la transfusion. Le but de l'auteur se résume dans cette proposition : *mettre en rapport, par un courant non interrompu, un sujet pléthorique destiné à fournir le sang, et un sujet anémique destiné à le recevoir.*

La partie moyenne de cet instrument à circulation intermédiaire est un petit cylindre en verre gradué, jouant le rôle d'un ventricule artificiel dans lequel un piston plein forme la systole et la diastole, par ses mouvements alternatifs d'élévation et de descente.

Deux petites valvules CC' très sensibles (Pl. II), placées en sens inverse à la partie inférieure du ventricule artificiel, servent à diriger le courant sanguin. A ces valvules vient aboutir un tube capillaire, en caoutchouc, long de 15 à 20 centimètres. Chaque tube capillaire est terminé par une aiguille courbe en argent, canaliculée, et portant sur sa partie convexe, à 15 millimètres de sa pointe, une ouverture qui termine le canal dont elle est percée

Le sang dans les vaisseaux étant parfaitement liquide, si son contact instantané avec un tube inorganisé ne le coagulait pas, il devrait traverser l'appareil conformément aux lois physiques des liquides ordinaires.

Or, voici comment, dans la pensée de Moncocq, devait fonctionner l'hématophore : étant donnés deux animaux immobilisés pour la transfusion, on pique avec l'aiguille DO la veine de l'animal qui doit recevoir le sang, de façon que l'ouverture O du canal qu'elle porte à sa face convexe, après avoir traversé la veine en deux points, ressorte au dehors.

Avec la seconde aiguille D'O', on pique de même la veine de

l'animal qui doit donner le sang, avec cette différence que l'ouverture O′ de l'aiguille D′ se trouve dans le centre même de la veine, et plonge dans le courant sanguin.

Les deux aiguilles étant ainsi disposées, si l'on fait la diastole dans le cylindre en élevant le piston B, le premier effet du vide que l'on pratique est d'ouvrir de dehors en dedans la soupape C′, qui est pressée d'abord par quelques bulles d'air contenues dans le tube, et aussitôt par le sang qui afflue de O′.

Si on fait ensuite la systole en baissant le piston, on chasse le sang et l'air du ventricule en CDO, et le tout sort par l'ouverture O de la seconde aiguille. Dès lors tout l'air est chassé de l'appareil, et en ramenant l'ouverture de cette seconde aiguille dans le centre de la veine qui doit recevoir le sang, le courant est établi, et il ne reste qu'à faire fonctionner le ventricule dont chaque systole chasse une ondée sanguine proportionnelle au mouvement que l'on imprime au piston, ondée sanguine qu'on peut évaluer par la graduation en grammes du cylindre de cristal.

J'ai employé plusieurs fois l'appareil de Moncocq, et j'affirme qu'aucun n'est à la fois plus utile et plus facile à manier.

Le moment serait venu de décrire tous les instruments que j'ai moi-même imaginés depuis quatre ans; mais, afin de mieux faire comprendre les indications que j'ai voulu remplir en modifiant leur forme à plusieurs reprises, je préfère en renvoyer la description à l'exposé de mes propres expériences.

SECONDE PARTIE.

Après avoir décrit les divers appareils inventés pour pratiquer la transfusion médiate ou immédiate, j'en aborde actuellement l'étude au point de vue expérimental. L'expérimentation peut seule, en effet, faire passer cette opération dans la pratique, car elle peut, seule, résoudre tous les problèmes qui s'y rattachent.

La première question qui se présente est celle-ci :

Est-il possible de ramener à la vie un animal rendu exsangue par une forte hémorrhagie, en faisant pénétrer dans ses vaisseaux du sang pris à un autre animal?

Les expériences de Denys et Emmeretz, Richard Lower, Blundell, Dieffenbach, Bischoff, Magendie, Nicolas, Longet, Moncocq, etc., mentionnées dans mon premier Mémoire, ne peuvent laisser aucun doute sur ce point.

Mes nombreuses expériences, entreprises depuis quatre années, me permettent aussi de répondre par l'affirmative. Je ne les rapporterai pas toutes. Je me contenterai d'en citer une seule, qui offre toutes les garanties d'authenticité, par les conditions exceptionnelles dans lesquelles elle a été exécutée.

Dans un récent voyage à Paris, m'entretenant avec M. Gosselin, professeur à la Faculté de Médecine, de toutes les difficultés que présente le traitement du choléra, je l'engageai à tenter, pour le guérir, la transfusion du sang. Je lui offris d'assister à des expériences que je faisais alors à l'École pratique, dans le laboratoire de mon excellent maître et ami le professeur Longet. Il accepta mon offre, et j'eus la bonne fortune de le rendre témoin du fait suivant, qu'ont pu constater également le professeur Robin, M. Lucien Corvisart, M. Labbé, chirurgien des hôpitaux, qui m'a prêté, dans cette circonstance, son concours éclairé et amical.

Deux chiens de haute taille ayant été attachés à côté, je mis à découvert la veine crurale gauche de l'un et la veine crurale droite de l'autre. Je retirai de l'artère crurale du premier deux grandes éprouvettes de sang dont la quantité peut être évaluée à deux ou

trois livres environ. Bientôt les mouvements de la poitrine s'arrêtèrent. L'oreille, appliquée sur la région précordiale, distinguait une sorte de murmure sourd qui avait remplacé les battements du cœur; les muscles des membres et du cou étaient dans un état complet de relâchement. L'animal paraissait presque mort. Plongeant alors la canule de l'appareil de Moncocq dans la veine du chien qui n'avait subi aucune hémorrhagie, je fis passer 90 grammes de son sang dans la veine de celui que j'avais rendu exsangue. Dès que le liquide commença à pénétrer, les mouvements de la poitrine reparurent. Ceux du cœur devinrent plus perceptibles. La vie semblait renaître comme par enchantement; après une minute et demie, le chien ouvrit les yeux, les muscles du cou et des pattes se contractèrent. A la fin de la troisième minute, le chien était sauvé. Je le détachai rapidement, après avoir lié les vaisseaux; aussitôt il s'élança de la planche et se mit à marcher dans l'appartement.

On comprendra facilement, au récit de cette expérience, l'émotion de tous les assistants, et leur étonnement en présence d'une opération qui avait amené, chez un animal si près de mourir, une résurrection instantanée.

Une expérience semblable avait été faite à la Faculté de Médecine de Paris, en juin 1863, avec le même instrument et le même succès, par le professeur Longet.

Lorsqu'on a été témoin de pareils faits, il est impossible de ne pas rester convaincu des services immenses que la transfusion du sang peut rendre dans le traitement de certaines hémorrhagies, contre lesquelles échouent si souvent tous les moyens dont la thérapeutique dispose.

De cette expérience, et de beaucoup d'autres semblables, je suis en droit de conclure *que la transfusion peut rappeler à la vie un animal rendu exsangue par une forte hémorrhagie.* Mais le sang est composé de trois éléments, le *sérum,* les *globules,* la *fibrine.* Il devenait intéressant de rechercher la part que prend les deux premiers dans ces phénomènes de véritable résurrection.

1° *Expériences faites avec le sérum.* — Déjà Dieffenbach avait inutilement essayé de sauver des animaux exsangues, en leur transfusant une assez grande quantité de sérum. Magendie était arrivé aux mêmes conclusions. Il injecta 300 grammes de sérum

de sang humain dans les veines d'un chien adulte : il succomba en vingt-quatre heures. Il renouvela l'expérience avec le sérum du sang pris à un chien de même race que celui dans les veines duquel il faisait l'injection : la mort n'en arriva pas moins. On sait enfin que des transfusions partielles de sérum avaient été pratiquées sans plus de succès, chez l'homme, pour lutter contre le choléra.

J'ai fait *dix* expériences avec le sérum chez des chiens, des lapins, des poules. Elles m'ont toutes conduit à ce résultat :

Jamais le sérum du sang introduit dans les veines d'un animal exsangue n'est parvenu à le ranimer.

Je ferai remarquer en outre que je n'ai pas pu, comme Magendie, faire vivre un animal pendant vingt-quatre heures. Le plus souvent les chiens ont succombé après cinq ou six heures. Cette différence tient peut-être à ce que la quantité de sang perdu par mes animaux était plus forte.

Donc, *le sérum injecté seul ne peut ranimer un animal épuisé par des pertes de sang considérables.*

En est-il de même des *globules?* La dernière conclusion autorisait à penser que puisque la transfusion peut lutter avec avantage contre les effets funestes de l'hémorrhagie, c'est aux *globules* que le sang doit, surtout, ses propriétés revivifiantes.

Voici les résultats de six expériences faites, avec les *globules seuls,* sur deux chiens, deux lapins, un coq et une poule.

Expériences. — Ayant enlevé à deux chiens une quantité de sang veineux assez grande pour les affaiblir considérablement, j'ai fait tomber doucement un filet d'eau sur le caillot. J'ai obtenu *par le lavage,* un liquide fortement rougi, où le microscope m'a permis de constater la présence de globules sanguins dans un état de parfaite intégrité, mais distendus par l'eau qui avait traversé leurs parois. J'ai injecté ce liquide dans la veine crurale. Les bons effets de l'opération se sont fait longtemps attendre. Chez les deux chiens, la vie ne s'est ranimée que très lentement, car pendant les six premiers jours, ils sont restés si faibles que j'ai craint, un moment, de les voir mourir. Peu à peu les forces ont reparu et les deux chiens ont guéri. J'ai constaté le même résultat sur un lapin. L'autre lapin, le coq et la poule ont succombé, le premier après vingt-deux heures, les autres après huit et dix heures.

Dans *trois* expériences sur *six*, j'ai donc obtenu des effets avantageux par la transfusion des *globules seuls*, tenus en suspension dans l'eau. Néanmoins, je n'hésite pas à dire que si les globules sont la partie réellement active du sang, il serait quelquefois dangereux de trop compter sur eux.

Je me trouve donc conduit à étudier l'action du sang lui-même.

Expériences de transfusion exécutées avec le sang tel qu'il sort des vaisseaux.

Blundell a fait avec du sang *non défibriné* des expériences de transfusion *médiate*. Il s'est servi d'une seringue à injection. La première question qu'il s'est posée est celle de savoir *si le passage du sang par la seringue ne le rend pas impropre à ranimer les fonctions*.

Première expérience. — La veine fémorale ayant été mise à découvert sur un chien, le chirurgien introduisit dans l'artère un tube à l'aide duquel il tira, en deux minutes, huit onces de sang à l'animal.

Les symptômes les plus alarmants se montrèrent bientôt : difficulté dans la respiration, convulsions, profond évanouissement marqué par l'arrêt de la circulation, par la perte de la sensibilité, par un relâchement complet des muscles abdominaux.

Après quelques secondes, six onces de sang furent prises dans l'artère fémorale d'un autre chien et injectées dans la veine. L'animal se ranima, la respiration redevint régulière et la sensibilité se rétablit. Cette résurrection fut si complète, que l'animal parut se réveiller plutôt que sortir d'un état de mort apparente.

Deuxième expérience. — La veine fémorale d'un chien fut mise à découvert, un tuyau y fut introduit, ainsi que dans l'artère : à mesure que le sang s'échappant de ce dernier vaisseau tombait dans un vase, il fut de suite introduit dans la veine.

Cette opération fut continuée pendant *vingt-quatre minutes,* et le chien n'en parut pas incommodé. Or, pour que cette expérience ait été prolongée pendant vingt-quatre minutes, il faut, dit Blundell, que *le même sang ait passé plusieurs fois par les instruments.*

De ces deux expériences, il conclut *que le sang peut être trans-*

mis par la seringue, et cela à plusieurs reprises, sans devenir impropre aux fonctions vitales.

J'accepte la première partie de la conclusion, à savoir : *que le passage du sang dans une seringue à injection ne l'empêche pas de conserver ses propriétés régénératrices.* Aucun expérimentateur ne le contestera ; mais ce que je nie d'une manière absolue, c'est que le sang ait pu, pendant vingt-quatre minutes, et cela à plusieurs reprises, passer par la seringue, sans perdre les qualités qui sont indispensables pour que la transfusion soit *exécutable.* Je signalerai bientôt les faits sur lesquels repose ma dénégation.

Après Blundell vient Dieffenbach, qui a pratiqué la transfusion de deux manières :

1° Transfusion *immédiate* faite à l'aide d'un tube intermédiaire allant de l'artère d'un animal à la veine de l'autre ;

2° Transfusion *médiate* faite au moyen d'une seringue.

Dieffenbach a pratiqué onze fois la transfusion *immédiate.* Je ne citerai qu'une seule de ces expériences, toutes les autres étant semblables pour le procédé suivi et les résultats obtenus.

Il ouvrit la carotide à un *petit* chien et laissa couler le sang jusqu'à ce que l'animal ne donnât plus aucun signe de vie. Cet état de mort apparente fut précédé de convulsions violentes ; pendant les accidents nerveux, la pupille se dilata et se contracta alternativement, jusqu'à ce qu'elle restât complétement et largement immobile. A ce moment, la veine jugulaire fut ouverte.

Un tube étant alors placé dans la carotide du premier et dans la jugulaire de l'autre, le sang passa dans la veine de ce dernier. Le chien parut d'abord respirer mieux, mais il ne survécut pas.

Pratiquée sur six chiens, deux chats, une vieille brebis, un veau et un taureau, cette expérience fut suivie de mort chez trois chiens, un chat et un taureau. Tous ces animaux périrent plus ou moins promptement. Les trois autres chiens, un chat, la brebis et le veau, se rétablirent peu à peu, et recouvrèrent la santé au bout d'un temps variable, depuis quelques heures jusqu'à trois jours.

La transfusion *immédiate* peut donc quelquefois sauver la vie, dit Dieffenbach ; mais, même dans les cas heureux, elle n'est pas sans danger.

En pratiquant au contraire la transfusion *médiate,* les deux tiers des animaux ont été ramenés à la vie.

Malgré le respect que je professe pour le grand chirurgien allemand, je me permettrai quelques observations. Et d'abord, est-on autorisé à proscrire un procédé opératoire qui a donné six succès sur onze cas? Ne pratique-t-on pas tous les jours dans les hôpitaux des opérations qui ne permettent pas au chirurgien d'enregistrer d'aussi beaux résultats? En second lieu, faut-il accuser la transfusion *immédiate* des cinq revers, ou bien la manière dont elle a été pratiquée? Si l'on réfléchit, on ne tardera pas à s'apercevoir que le tube intermédiaire employé par Dieffenbach est essentiellement défectueux. Pour établir un trait d'union entre les animaux, ce tube devait avoir une certaine longueur, et par conséquent contenir une *assez grande quantité d'air*. Or, le sang n'a pu passer d'un animal dans l'autre, sans pousser devant lui l'air renfermé dans le tube. Mes expériences m'ont appris, il est vrai, qu'une proportion minime de ce gaz peut circuler dans l'appareil vasculaire sans compromettre immédiatement la vie d'un animal; mais cela n'est possible que lorsque l'animal *n'a pas été préalablement épuisé par une forte hémorrhagie ;* il n'en est plus ainsi, lorsque cette dernière circonstance se produit. Les pertes de sang diminuent les mouvements du cœur; elles les affaiblissent et les ralentissent beaucoup. Que de l'air, même en petite quantité, arrive dans les cavités droites et les distende, la mort n'arrivera pas toujours, mais elle se manifestera souvent, surtout si les animaux sont de petite taille. Aussi, loin d'accepter les reproches que Dieffenbach adresse à la transfusion *immédiate*, je démontrerai bientôt, à l'aide des faits, que ce procédé est préférable à tous les autres.

Comme Blundell, Dieffenbach a voulu vérifier *pendant combien de temps le sang tiré des vaisseaux conservait sa propriété de revivifier les animaux*, et il est arrivé à penser qu'après *trois heures* il perd son action.

Donc, pendant *trois heures,* le sang possède cette faculté régénératrice. J'oppose à ce fait la même dénégation qu'à celui de Blundell. Je pourrais multiplier les citations et rapporter les expériences si nombreuses qui ont été faites avec du sang renfermant ses trois éléments constitutifs : *sérum, fibrine, globules;* je ne le ferai cependant pas; je préfère exposer les faits qui me sont personnels.

Lorsque j'ai commencé, il y a quelques années, mes études sur

la transfusion du sang, je ne me suis pas dissimulé toutes les difficultés d'un pareil sujet. Cette opération, qui a joui d'une faveur si exceptionnelle dans la seconde moitié du XVIIe siècle, ne comptait guère de partisans, à notre époque, parmi les hommes de science les plus justement estimés. L'historique que j'ai publié en 1863 le prouve surabondamment. J'avais donc à lutter contre des opinions arrêtées et des répugnances qui semblaient invincibles. Je compris que l'expérience seule pouvait changer le cours des idées, et rendre à la transfusion du sang la place légitime qu'elle mérite. J'ai donc expérimenté.

Encouragé par l'exemple de Blundell et de Dieffenbach, je songeai à pratiquer la transfusion à l'aide de la seringue que l'on emploie, soit pour les préparations du système sanguin, soit dans quelques opérations chirurgicales, comme l'hydrocèle.

Les animaux que je choisis furent les chiens, les lapins, les chats, les poules, les canards, etc., etc. Ayant présente à l'esprit l'expérience dans laquelle Blundell avait pu faire passer *le même sang* par la seringue, *pendant vingt-quatre minutes;* sachant aussi que le chirurgien de Berlin avait établi *que ce liquide tiré des vaisseaux conserve pendant trois heures* la propriété de revivifier l'animal, je crus que mes expériences se feraient avec une extrême simplicité. Malheureusement, je me suis trouvé, dès le début, en présence d'une difficulté que j'ai cru un moment insurmontable : j'avais compté sans la coagulation rapide du sang. Mais le récit des faits parlera plus haut que tous les raisonnements.

Première expérience. — Après avoir mis la veine crurale à découvert sur deux chiens, je plaçai autour de ce vaisseau deux ligatures chez l'animal auquel je voulais pratiquer la transfusion. L'une de ces ligatures devait interrompre la circulation de retour; l'autre, oblitérer le vaisseau après l'opération. Les choses étant ainsi disposées, je fis à la veine du chien qui devait fournir le sang, une très large ouverture, afin que l'écoulement en fût facile et rapide; je le recueillis dans un vase placé au milieu d'un bain-marie chauffé à 38 ou 40°. Le vase ne pouvait donc faire subir au sang aucun refroidissement. Malgré ces précautions, je m'aperçus que quelques secondes après sa sortie, *une partie du sang était déjà coagulée.* Je chargeai néanmoins la seringue, j'introduisis l'extrémité effilée de la canule dans la veine, et je poussai l'injec-

tion. Le piston marcha d'abord assez bien dans le corps de pompe. Mais bientôt il fut arrêté, et malgré les mouvements de va-et-vient que je lui imprimai, *le sang ne pénétra plus,* et le chien succomba. Voulant apprécier exactement la cause de cette terminaison fatale, il me fut facile de constater que la plus grande partie du sang contenu dans la seringue était *solidifiée,* et que l'obstacle à la circulation de ce liquide était constitué par des *caillots* qui oblitéraient la canule.

L'expérience n'avait duré que deux minutes environ. Craignant toutefois que ce résultat négatif dépendît de l'opérateur, je la recommençai sur un autre chien, en ayant le soin d'observer les mêmes conditions et de recueillir le sang dans un vase préalablement chauffé. Tout marcha bien et vite. L'animal n'en succomba pas moins. La mort fut due à la même cause : *la présence des caillots qui obturaient la canule.*

Sur des lapins, des chats et des poules, je ne fus pas plus heureux dans les vingt-deux expériences auxquelles ils furent soumis.

Ce premier résultat était, il faut en convenir, peu encourageant; mais il motive la dénégation absolue que j'ai opposée : 1° à l'opinion de Blundell, sur la propriété qu'a le sang de traverser, pendant vingt-quatre minutes, la seringue à injection, en restant toujours *apte* à être transfusé; 2° à celle de Dieffenbach, qui lui reconnaît la même faculté *pendant trois heures.*

Il devenait nécessaire de modifier les conditions expérimentales en recherchant les moyens qui peuvent retarder ou empêcher la coagulation.

Pour éviter des répétitions inutiles, je dirai, une fois pour toutes, que j'ai toujours transfusé le sang de *veine à veine,* choisissant tantôt la crurale, tantôt la jugulaire externe, et les animaux étant toujours disposés comme dans les deux expériences précédentes.

La première modification que j'ai apportée consiste à recevoir le sang *dans un vase qui n'avait pas été préalablement chauffé, et qui se trouvait en équilibre de température avec le milieu ambiant.*

Première expérience faite au mois de novembre 1862, — la température extérieure étant de 13° au-dessus de zéro.

J'ai recueilli 100 grammes de sang, pris à un chien de chasse de haute taille, dans un verre gradué pouvant contenir 150 gram-

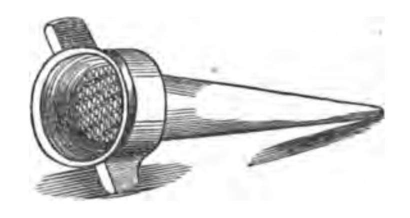
mes d'eau. J'ai d'abord observé ce qui allait se passer. Pendant les deux premières minutes, le sang m'a paru tout à fait liquide. Vers la fin de la seconde minute, les phénomènes de la coagulation se sont montrés. Au milieu de la masse liquide, j'ai constaté l'existence de petits coagulums. A partir de ce moment, ces derniers sont devenus plus nombreux

Le sang de lapin et de poule a offert à peu près les mêmes particularités.

Quelques jours après, la température extérieure étant tombée à 7°, j'ai recommencé les mêmes observations, et j'ai pu vérifier ce fait : que, *plus la température extérieure est basse, plus la coagulation du sang est retardée.* Le problème se simplifiait, et les chances de succès pour la transfusion, avec du sang non défibriné, devenaient plus favorables.

Je songeai alors à bénéficier des circonstances nouvelles que l'observation m'avait révélées, et à recommencer les expériences malheureuses rapportées précédemment. Convaincu cependant que de petits coagulums avaient pu échapper à mes investigations, alors que le sang me paraissait tout à fait liquide, et que leur entrée dans les vaisseaux déterminerait des accidents graves, je fis subir à la seringue à injection la modification suivante :

Je plaçai dans la partie évasée de la canule un cadre circulaire aplati en acier, sur lequel était tendue une toile métallique, dont le réseau, à mailles fortement serrées, devait retenir les petits caillots et laisser passer seulement la partie du sang restée liquide.



A l'aide de cette modification, j'ai pu expérimenter sur quatre chiens et trois lapins.

Expériences. — Trois chiens ayant été réduits à un état voisin de la mort, par suite d'une piqûre de la carotide, je leur ai transfusé 100 grammes de sang dont la température était tombée

à 6°. Ces trois chiens ont été ramenés à la vie. Le même résultat a été obtenu chez un lapin. Un chien et deux lapins ont succombé. Des caillots assez volumineux s'étant engagés dans les mailles de la toile métallique, avaient, chez ces derniers animaux, empêché le sang de passer par la canule.

C'était un assez beau résultat. Le froid retardant la coagulation donnait à l'opérateur une chance de succès de plus.

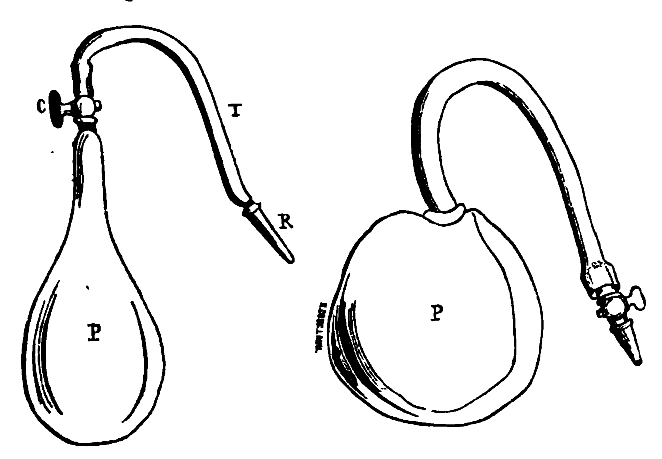
Je crus qu'il fallait persévérer dans cette voie, et rechercher les autres circonstances capables, avec la *réfrigération du sang,* de retarder la formation du caillot.

Et d'abord, je songeai à empêcher le contact du sang et de l'air extérieur.

Expériences démontrant l'influence du contact de l'air sur la coagulation du sang.

Ces expériences remontent déjà à deux ans. Je les ai répétées récemment, dans mon laboratoire de l'École de Médecine, en présence de mon ami M. Merget, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

Première expérience. — Afin d'éviter le contact de l'air avec le sang, je me suis servi, pour recueillir ce dernier, d'une poire en caoutchouc P, munie d'un robinet de cuivre C, que l'on peut ouvrir et fermer à volonté. Du robinet part un tube T de la même substance long de 20 centimètres, et terminé par une canule R



dont l'ouverture offre de 5 à 6 millimètres de diamètre. Après avoir fait le vide dans la poire à l'aide de l'aspiration, le robinet C étant fermé, j'ai introduit la canule effilée R dans la veine jugulaire d'un chien de moyenne taille. J'ai ouvert alors le robinet. Le sang, attiré par le vide, a commencé à couler par le tube de caoutchouc et à remplir la poire. *Après dix minutes,* j'ai constaté, et M. Merget a pu constater avec moi, une fluctuation évidente, en pressant sur les parois du récipient. Voulant apprécier dans quel état se trouvait le sang, j'ai ouvert la soupape, et j'ai pu apprécier qu'*il était encore liquide.* Il renfermait bien quelques caillots isolés; mais il aurait pu être transfusé sans déterminer d'accident, surtout si l'on avait eu soin de se servir de la seringue modifiée comme je l'ai dit.

Cette expérience offrait un intérêt véritable, si l'on songe que le sang du chien, mis au contact de l'air, se coagule presque immédiatement.

Deuxième expérience. — L'appareil et le chien étant disposés comme précédemment, j'ai fait plonger la poire de caoutchouc dans un vase rempli d'eau, où j'avais fait dissoudre une assez grande quantité de nitrate de potasse, afin d'abaisser la température. Le thermomètre marquait de 4 à 5° dans cette dissolution saline. *Après un quart d'heure,* la plus grande partie du sang était encore liquide.

Troisième expérience. — Encouragé par les résultats de ces deux expériences, j'en ai tenté une troisième, qui ne laissera aucun doute sur la double influence du froid et de la privation de l'air dans le phénomène de la coagulation du sang.

Au lieu de me servir d'eau ayant la température ambiante, ou dans laquelle se trouvait une assez grande quantité de nitrate de potasse, j'ai fait plonger la poire dans un vase contenant le même liquide et placé au milieu d'un mélange de glace et de sel marin. Après *vingt minutes,* la poire s'étant remplie peu à peu, j'ai changé la direction de la canule dans la veine jugulaire, *en la tournant du côté du cœur.* J'ai pressé sur les parois de la poche de caoutchouc, de manière à rendre à l'animal le sang que je lui avais ôté. J'ai pu ainsi vider tout l'appareil, et l'animal a survécu. Il a donc reçu, sans en éprouver aucune gêne, du sang dont la température était descendue à 0°.

De tous les faits que je viens d'exposer, je me crois en droit de conclure :

1° Le sang ne peut rester pendant *vingt-quatre minutes* (Blundell) ou pendant *trois heures* (Dieffenbach) hors des vaisseaux dans des conditions qui permettent de l'utiliser pour la transfusion.

2° Le sang veineux des chiens, lapins, chats, poules, canards, etc., recueilli dans un vase dont la température *est égale, ou à peu près, à celle du corps, commence à se coaguler dès qu'il est sorti des vaisseaux.* Il est alors impossible de le transfuser aux animaux épuisés par une forte hémorrhagie. Si l'on persiste cependant à faire l'opération, la mort arrivera, ou par l'insuffisance de la quantité de sang introduite dans les veines, ou par suite de la pénétration de caillots qui déterminent des troubles rapides dans la circulation.

3° Plus le sang est *refroidi,* après sa sortie des vaisseaux, plus il met de *temps à se coaguler;* plus, par conséquent, il se trouve dans des conditions favorables pour être transfusé.

4° Le contact de l'air extérieur avec le sang est une des principales causes de la coagulation.

5° Il est indispensable, lorsqu'on veut pratiquer la transfusion *médiate* à l'aide de la seringue, de faire subir à cet instrument la modification que j'ai le premier signalée.

6° Le sang dont la température est réduite à 0° possède la propriété de revivifier les animaux aussi bien que celui qui a conservé la température normale.

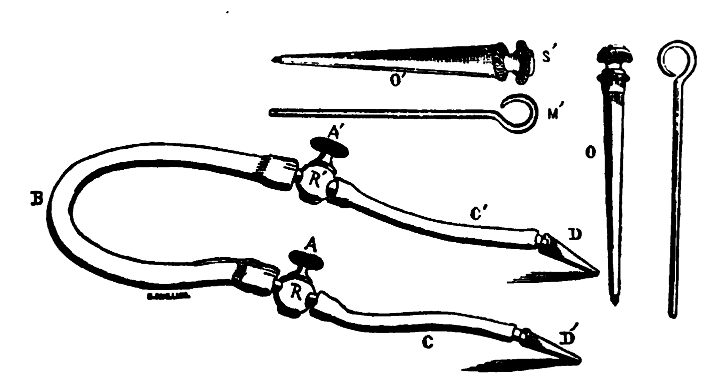
7° Il est enfin une autre conclusion que je peux déjà faire pressentir, c'est que la transfusion *immédiate* doit être préférée à la transfusion *médiate.*

L'expérience et l'observation m'ayant appris que pour que la transfusion du sang soit possible chez les animaux, il faut réunir ces deux conditions : 1° *éviter le contact de l'air;* 2° *refroidir le liquide,* je me trouvai dans l'obligation de créer des appareils nouveaux, car je n'avais alors à mon service que la seringue à injection ordinaire. Le moment est venu de décrire ces appareils, qui sont au nombre de quatre.

Mon premier appareil se compose d'un tube de caoutchouc B, aux deux extrémités duquel se trouvent deux robinets de cuivre RR', munis chacun d'une soupape AA', que l'on ouvre et ferme à volonté. A chaque robinet vient s'adapter un tube en caoutchouc CC' qui se termine par des canules très effilées DD'.

Pour compléter cet appareil, je me sers : 1° de deux canules OO′ traversées par des trois-quarts SS′ (disposé comme pour le trois-quart explorateur). Ces deux canules, armées de leurs trois-quarts, sont destinées l'une à piquer la veine où l'on doit injecter le sang, l'autre à piquer la veine qui doit le fournir; 2° deux mandrins MM′.


Premier Appareil.



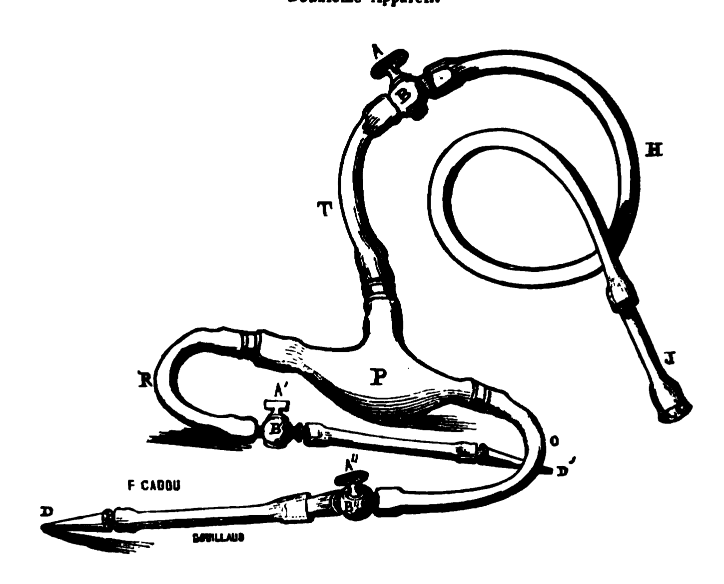
Manière de se servir de l'instrument. — Je commence par piquer les deux veines entre lesquelles je veux établir le courant sanguin avec les canules O et O′, armées de leurs trois-quarts. Une fois en place, j'enlève les trois-quarts SS′, que je remplace par les mandrins MM′. Ces derniers, se terminant par une extrémité arrondie, risquent moins à blesser les parois des vaisseaux. Cela fait, j'enlève le mandrin M placé dans la veine qui doit fournir le sang, et je le remplace par la canule effilée D′. Les soupapes A et A′ étant ouvertes, je fais l'aspiration en D. Je purge ainsi l'appareil de l'air qu'il renferme, et le sang commence à couler. A ce moment je mets cette dernière canule D à la place du mandrin M′. Les deux animaux se trouvent ainsi en contact, et le sang de l'un passe directement dans l'autre.

Quoique très simple, cet appareil m'a rendu de grands services. Il m'a permis : 1° de faire la transfusion *immédiate;* 2° d'empêcher le contact du sang avec l'air extérieur, et par suite d'éloigner cette cause d'une coagulation trop rapide.

Il présentait néanmoins un inconvénient dû à la lenteur avec

laquelle le sang le traversait. J'ai donc cherché à le modifier : j'essayai d'y parvenir de deux manières.

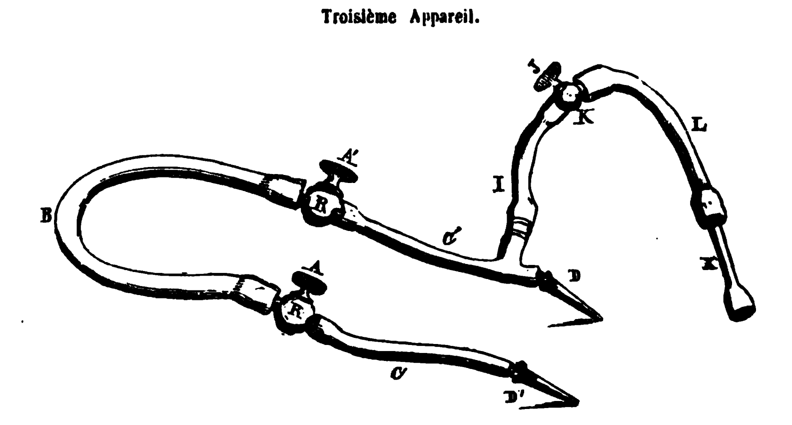

Deuxième Appareil.



Cet appareil se compose d'un renflement en caoutchouc P, duquel partent trois tubes T, R, O, terminés par des robinets en cuivre à soupapes AB, A'B', A"B". Les deux robinets A'B', A"B" se terminent par des canules effilées comme dans le cas précédent. Le robinet AB est uni à un tube en caoutchouc H, qui offre à son autre extrémité un tube en verre J. Ce dernier étant mis dans la bouche, servait à faire le vide dans l'appareil, par l'aspiration. Il devait, en outre, une fois les canules disposées comme il a été dit précédemment, servir, par suite d'aspirations répétées, à faire arriver plus vite le sang dans l'ampoule P, qui, saisie avec la main, pouvait être plus rapidement vidée à l'aide de la compression.

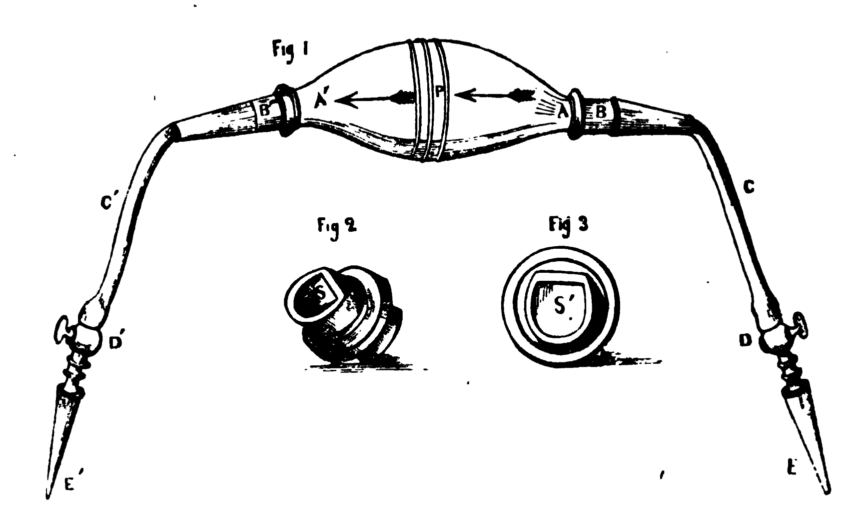
Dès la première application, je m'aperçus bientôt que cet appareil était moins commode que le précédent. Le sang arrivait plus vite, en effet, dans l'ampoule P, mais une fois là, l'aspiration continuant, le liquide montait dans le tube T et coulait mal par le tube R. Je compris que ce tube aspirateur était placé *trop loin du point où le sang devait sortir*. Je dus le modifier ainsi :

Troisième Appareil.



Dans ce troisième appareil, qui est la reproduction exacte du premier, j'ai placé le tube aspirateur *près de la canule* qui pénètre dans la veine de l'animal que je voulais transfuser. Il m'a permis de faire le vide, par suite d'appeler le sang, et d'accélérer son mouvement. Il m'a offert des avantages sérieux, mais néanmoins il ne réalisait pas encore mes espérances; aussi l'ai-je remplacé par l'appareil suivant, qui a fonctionné dans presque toutes mes expériences, et qui m'a conduit à de très beaux résultats.

Quatrième Appareil.



Cet appareil se compose d'une poche en caoutchouc P, de forme ovoïde et à parois assez résistantes pour l'empêcher de s'affaisser sous la pression atmosphérique. A cette poche s'adaptent, de chaque côté, deux pièces métalliques AB et A'B', vissées l'une sur l'autre et séparées par une soupape S'S (fig. 2 et 3). La soupape qui est placée en B s'ouvre de *dehors en dedans ;* la soupape en B' s'ouvre de *dedans en dehors,* de telle sorte que le liquide arrivant dans l'appareil par le tube C, soulève la première, remplit la poche et passe dans le tube C' en soulevant la seconde soupape. D'après cela, il est facile de concevoir que les deux soupapes agissent en sens opposés.

De la pièce métallique B part un tube de caoutchouc terminé par un robinet de cuivre D et une canule E. La même disposition existe du côté opposé.

Manière de s'en servir. — Après avoir ouvert le robinet D', on ferme D, et l'on presse sur la poche de manière à chasser par le tube C' tout l'air qu'elle renferme, dont on évite le retour dans l'appareil en fermant aussitôt D'. Alors la canule E est placée dans la veine de l'animal qui doit fournir le sang. Le robinet D étant ouvert, le sang se précipite dans la poche, qu'il remplit. La pression exercée sur elle le fait couler dans le tube C' terminé par la canule E', introduite dans la veine de l'animal sur lequel on opère la transfusion. On comprend que la soupape qui se trouve en AB s'élève pour laisser arriver le sang en P, mais que la pression exercée sur la poire de caoutchouc suffit pour fermer cette soupape et lui permettre de s'opposer au retour du liquide dans le tube C.

Tous ces appareils ont été habilement exécutés par M. Gendron, chirurgien herniaire des hôpitaux.

TROISIÈME PARTIE.

Du rôle de la fibrine dans la transfusion.

La réfrigération et la soustraction du contact de l'air ne sont pas les seules circonstances qui retardent la coagulation du sang. Il en est une qui l'empêche d'une manière complète : je veux parler de *la défibrination*. J'arrive à l'un des points difficiles de cette étude, à l'un de ceux qui, par suite d'interprétations étranges, a donné lieu à des théories dont l'expérimentation prouve la fausseté.

Et d'abord, le sang défibriné perd-il ses propriétés revivifiantes ?

Magendie le croyait. Voici comment il s'exprime dans ses leçons publiques de 1837 : « Dieffenbach, voulant réhabiliter la transfusion du sang, avait recommandé d'extraire la fibrine afin de prévenir l'obstruction des capillaires. Il y a quelques mois, un procédé pareil m'eût paru fort rationnel. Aujourd'hui mes expériences m'ont appris qu'il n'est plus proposable. Si on enlève la fibrine, l'animal doit succomber inévitablement. »

Expérience du 17 février 1837. — La veine jugulaire d'un chien mise à nu et ouverte, on en a retiré huit onces de sang, qu'on a recueilli, qu'on a battu pour en extraire la fibrine, qui s'est déposée sur la baguette en filaments jaunâtres. On a filtré le sang à travers un linge fin et on l'a ensuite réinjecté dans la veine.

L'animal a paru inquiet : il s'est couché, il a refusé les aliments et a fait des efforts pour vomir. Il s'est affaibli graduellement, sa respiration s'est embarrassée, et il est mort dans la soirée après la deuxième injection.

A l'autopsie, faite douze heures après, on a déjà constaté une odeur de putréfaction des plus fétides, comme on la retrouve dans toutes les maladies qui résultent d'une altération du sang, et que les anciens appelaient *putrides*.

Ce chien est mort parce que la *viscosité* de son sang se trouvant diminuée, ce sang n'a pu circuler dans ses canaux : sa partie séreuse s'est extravasée dans les poumons à travers les parois des capillaires.

Le 21 juin 1835, poursuivant les mêmes recherches, Magendie s'exprime ainsi : « Ayant voulu enlever au sang la faculté dont il jouit de se prendre en masse, nous avons soustrait la fibrine. La même expérience, répétée nombre de fois sur divers animaux, nous a toujours donné les mêmes résultats : toujours l'animal est mort, et d'autant plus vite qu'il restait moins de sang normal. Le sang défibriné ne peut plus se mouvoir dans les vaisseaux : le sérum les traverse par imbibition, il forme des congestions, des extravasations, principalement dans les poumons, et il amène promptement l'asphyxie et la mort.

» Ainsi, la même substance qui se solidifie quand elle est hors des vaisseaux, mais qui est liquide dans leur intérieur, la fibrine, donne au sang *la merveilleuse viscosité* nécessaire pour parcourir les capillaires les plus fins; et il est intéressant de savoir que ce sang coagulable est seul propre à entretenir la vie : *sa viscosité même est précisément ce qui le fait circuler.* »

J'admets avec Magendie que le sang est un liquide *visqueux;* mais il m'est impossible de trouver dans *sa viscosité la cause principale qui le fait circuler*. En outre, n'est-on pas en droit de se demander si c'est à la fibrine qu'est due cette viscosité?

La coagulation du sang due à la fibrine a tellement préoccupé certains physiologistes, Muller, Dieffenbach, Bischoff, que beaucoup ont conseillé de ne pratiquer la transfusion qu'avec du sang préalablement défibriné.

Mes expériences avec le sang défibriné m'ont conduit à des résultats diamétralement opposés à ceux obtenus par le grand physiologiste. Je ferai remarquer, avant de les indiquer, que j'ai toujours eu le soin, après la défibrination, de *filtrer* le liquide; il peut rester, en effet, des filaments de fibrine qui, en s'introduisant dans les vaisseaux, déterminent des accidents graves.

Expériences avec le sang défibriné.

J'ai fait *dix* expériences avec du sang défibriné sur des chiens et des lapins. Je n'en rapporterai qu'une seule.

Un chien de chasse de haute taille ayant été épuisé par une hémorrhagie due à une piqûre de la carotide, j'ai introduit doucement dans la veine crurale droite 120 grammes de sang *défibriné*

et filtré avec soin. L'animal est revenu à la vie, et la résurrection a été presque aussi rapide que lorsque le sang renferme tous ses éléments.

Le même résultat a été obtenu sur six autres chiens et sur un lapin.

Pénétré cependant des conclusions formulées par Magendie sur le rôle de la fibrine, M. Moncocq n'hésite pas à dire dans sa thèse :

« Ces expériences si concluantes de Magendie nous font bien comprendre que la transfusion avec le sang défibriné ne pouvait *jamais réussir chez l'homme*. Nous verrons qu'elle a toujours échoué. »

Les faits étaient seuls capables de renverser cette assertion. Interrogeons-les.

Chlorose avec irritation cérébro-spinale; guérison par le docteur GIOVANNI POLLI (1857).

Une jeune demoiselle était affectée depuis plusieurs années de chlorose avec irritation spinale, pour laquelle on lui avait fait plus de trois cents saignées; elle avait été traitée aussi par le quinquina, les ferrugineux, les toniques, les dépuratifs, les narcotiques, les résolutifs; elle avait été martyrisée de toutes les manières par des révulsifs appliqués sur toutes les parties du corps, et tout cela sans avantage, puisque la menstruation était devenue de plus en plus rare et difficile, surtout depuis deux ans; la digestion languissante, la nutrition imparfaite, la peau d'un jaune pâle, presque ictérique. La malade traînait ainsi une existence douloureuse, abandonnait son lit de temps en temps, mais pour être reprise quelques jours après d'irritations congestives de la tête ou de la poitrine, qui obligeaient les médecins à la priver de nouveau du peu de forces qu'elle avait pu rassembler.

Depuis quinze jours, la malade gardait le lit avec une toux sèche et fatigante, accompagnée de fièvre le soir. Elle avait déjà été saignée trois fois sans aucune diminution dans les symptômes.

M. Giovanni Polli proposa la transfusion. Quatre onces de *sang défibriné* par le battage furent introduites par la veine médiane céphalique droite. Bientôt après, trois onces furent de nouveau introduites.

Le lendemain de l'opération, la toux avait disparu. Trois jours après elle put se lever; le quatrième jour, elle quittait la chambre pour aller prendre le bateau à vapeur, sur lequel elle s'embarqua pour faire un voyage d'agrément.

L'opération avait été faite le 20 octobre, et à la fin de décembre M. G. Polli reçut une lettre de cette demoiselle annonçant qu'elle était parfaitement guérie, et que la menstruation, suspendue depuis longtemps, s'était rétablie; *elle n'hésitait pas à attribuer la guérison à la transfusion.*

M. G. Polli reçut encore de ses nouvelles le 15 février 1852, et la guérison ne s'était pas démentie.

Est-il possible de dire, après la lecture de cette observation, que la transfusion pratiquée avec du *sang défibriné ne peut jamais réussir chez l'homme?*

M. Neudefer a fait en 1860 la transfusion du sang, à l'hôpital San Spirito de Vérone, sur les blessés de l'armée autrichienne. Les sujets étaient tous dans des conditions extrêmement désespérées; ils étaient réduits au dernier degré de marasme par des suppurations interminables, suite de blessures par armes à feu. La perte complète de l'appétit et du sommeil faisait du rétablissement par les ressources diététiques ordinaires une impossibilité.

La transfusion fut tentée avec toutes les précautions exigées; le sang était injecté, *défibriné,* et maintenu à une température convenable; sa quantité ne dépassait pas trois ou quatre onces; les cinq sujets qui subirent cette opération accusèrent une sensation agréable de chaleur s'étendant du bras où se faisait l'injection vers la poitrine. L'état général présenta une amélioration manifeste, le pouls prenait plus d'ampleur et de force, les malades jouissaient d'un sommeil réparateur que les préparations narcotiques n'avaient pu leur donner jusque-là, l'appétit se réveillait. L'amélioration de l'état général persista chez tous pendant cinq à huit jours; elle eut même une durée de dix jours, à la suite de la deuxième transfusion, chez un sujet sur lequel cette opération fut répétée. Mais là s'arrêta l'effet bienfaisant de la transfusion. A partir de ce moment les malades retombèrent dans l'état désespéré qui avait motivé l'essai thérapeutique. Sur les cinq opérés, quatre moururent après quatre semaines; celui qui fut soumis deux fois à la transfusion vécut cinq semaines. La vie de ces malades ayant paru être prolongée de quelques jours au moins, M. Neudefer se proposait de poursuivre ses expériences, lorsqu'un sixième malade mourut peu après l'opération.

Ce résultat funeste est attribué par l'auteur à la nature du sang pris sur un sujet qui se trouvait sous l'imminence d'un accès de goutte. Il pense que le sang vicié par la diathèse d'acide urique a dû agir à la manière d'un poison.

Réflexions. — Des cinq faits signalés par M. Neudefer découle un grand enseignement : les malades étaient arrivés à un état de faiblesse extrême, épuisés par des suppurations abondantes et réduits au dernier degré de marasme; l'appétit était complétement nul et la perte de sommeil absolue. Sous l'influence de la transfusion, le sommeil a reparu avec l'appétit, et l'état général s'est sensiblement amélioré. Cette amélioration n'a été que passagère il est vrai, mais bien que passagère elle a été incontestablement le résultat de la transfusion faite avec du *sang défibriné.* Si le chirurgien avait pratiqué l'opération plus tôt, à une époque où la vie était moins sérieusement compromise, le changement heureux apporté par elle dans l'état des malades, au lieu d'être momentané, serait devenu définitif. Lorsque la mort est sur le point d'arriver par suite d'une maladie longue, la transfusion faite avec du sang *renfermant tous ses principes* ne l'empêche pas plus d'arriver que lorsque ce liquide est *privé* de sa fibrine. Mais que, dans ce dernier cas, une amélioration se produise et retarde la terminaison fatale, n'est-on pas en droit d'affirmer que la *défibrination* ne fait pas perdre au fluide nourricier ses propriétés revivifiantes?

La physiologie expérimentale et l'observation clinique se prêtent donc un mutuel appui pour démontrer combien la conclusion de Magendie sur l'inefficacité du sang défibriné est dépourvue de fondement. Les faits que nous allons examiner lèveront toute incertitude à cet égard.

Le sang d'un animal peut-il être transfusé sans danger à un animal appartenant à une espèce différente?

Au mois d'avril 1865, Denys écrivait à M... : « Depuis les expériences dont je vous ai écrit le 9 du mois précédent, nous avons fait passer le sang de trois *veaux* dans trois *chiens,* afin de nous assurer des effets que pouvait produire le *mélange de deux sangs si différents.* Je vous en ferai savoir plus au long les particularités dans quelque temps; aujourd'hui je me contenterai de vous dire que les animaux dans lesquels on a fait la transfusion du sang mangent tout aussi bien qu'auparavant, et qu'un de ces trois chiens,

à qui on avait tiré tant de sang le jour précédent qu'il ne se pouvait presque plus remuer, ayant le lendemain reçu le sang d'un *veau*, reprit à l'instant des forces et fit paraître une vigueur surprenante. Nous avons trouvé tant de moyens nouveaux pour faire la transfusion avec facilité, que M. Emmeretz se fait fort de la faire sans aucune ligature, avec une ponction semblable à celle que l'on fait dans la saignée. »

« En 1668, le docteur King ayant tiré à un *mouton* 49 onces de sang, et lui ayant donné autant de sang d'un *veau* dont il avait ouvert la veine jugulaire, le mouton, après l'opération, parut aussi fort et aussi vigoureux qu'auparavant. »

« Le même chirurgien tira 45 onces de sang à un autre *mouton* qui était plus petit, et cette évacuation ayant fort affaibli cet animal, il lui redonna à peu près autant de sang de *veau*. Quand on eut fermé la plaie de ce mouton et qu'on l'eut délié, il ne se sentit pas plus tôt en liberté, que, voyant auprès de lui un épagneul auquel on avait auparavant transfusé du sang de mouton, il lui alla donner trois ou quatre coups de tête, et depuis il s'est toujours bien porté. »

Il résulte de ces expériences, que du sang de veau transfusé à des chiens ou à des moutons, a produit les meilleurs effets et a ranimé les animaux épuisés par une forte hémorrhagie.

Les transfuseurs du XVII[e] siècle ne se sont pas contentés d'expérimenter sur les animaux, ils ont agi sur l'homme lui-même.

Ainsi, Denys transfusa avec succès à *trois hommes* du sang d'*agneau*. Richard Lower et Ed. King ôtèrent 6 ou 7 onces de sang à un homme nommé Arthur Coga, et lui transfusèrent après 9 ou 10 onces de sang tiré de l'artère carotide d'*un agneau :* il se trouva si bien de cette opération, qu'il pria instamment qu'on la lui fît de nouveau.

Malgré le soin que j'ai mis à recueillir tous les faits de transfusion mentionnés à l'époque où cette opération était si universellement acceptée, c'est-à-dire de l'année 1666 à l'année 1668, il m'a été impossible d'en trouver un seul dans lequel du sang pris à l'homme ait été communiqué à l'homme. Tous les succès publiés par le *Journal des Savants* ont donc été obtenus à l'aide d'un sang *emprunté à des animaux d'espèces différentes.*

Condamnée par la fameuse sentence du Châtelet (17 avril 1668),

la transfusion tomba dans l'oubli jusqu'en 1818, époque à laquelle elle fut ressuscitée par Blundell.

La question que je traite actuellement fut reprise, et voici comment s'expriment à ce sujet MM. Prévost et Dumas :

« Si l'on prend du sang qu'on injecte sur un animal d'espèce différente, mais dont les globules soient de même forme, quoique de dimension différente, l'animal n'est qu'imparfaitement relevé, et l'on peut rarement le conserver plus de *six jours.* »

Les animaux soumis à ces épreuves présentent quelques phénomènes que nous ne devons pas omettre : le pouls devient plus rapide, la respiration conserve son état normal; mais la chaleur s'abaisse avec une rapidité remarquable lorsqu'elle n'est pas artificiellement maintenue dès l'instant de l'opération; les déjections deviennent muqueuses et sanguinolentes, et conservent ce caractère jusqu'à la mort; les facultés instinctives ne sont point altérées. Ces observations s'appliquent à l'injection du sang frais comme à celle du sang extrait depuis douze et même vingt-quatre heures.

Si l'on injecte du sang à globules circulaires à un oiseau, l'animal *meurt ordinairement* au milieu d'accidents nerveux très violents, et comparables, pour leur rapidité, à ceux que l'on obtient *au moyen des poisons les plus intenses.* Ils se manifestent encore lorsque le sujet sur lequel on opère n'a pas été affaibli par une notable déperdition de ce liquide.

« On a transfusé du sang de mouton et de vache dans des chats et des lapins. Soit qu'on ait pratiqué l'opération immédiatement après l'extraction du sang, soit qu'on ait laissé celui-ci dans un endroit frais, pendant douze et même vingt-quatre heures, l'animal a été rétabli pour quelques jours dans un grand nombre de cas.

» Le sang de mouton transfusé à des canards excite des convulsions rapides et très fortes suivies de mort. Souvent nous avons vu mourir l'animal avant que l'on ait achevé de pousser la première seringue, quoiqu'il n'ait éprouvé qu'une saignée très faible auparavant et qu'il fût fort bien portant.

» Nous nous bornerons, disent en terminant MM. Prévost et Dumas, à ce peu de mots sur la question que Blundell a traitée récemment avec succès, mais sous un point de vue différent du nôtre; et s'il en a été fait mention ici, c'est afin de prouver *que la transfusion sur l'homme doit être abandonnée comme absurde et*

dangereuse, tant que nous ne serons pas plus avancés sur la connaissance entière du principe actif du sang. »

Les conclusions de MM. Prévost et Dumas diffèrent essentiellement de celles qui découlent des expériences faites par les premiers transfuseurs. Nous indiquerons bientôt la cause de cette différence.

Dieffenbach est arrivé au même résultat que les expérimentateurs dont je viens de parler :

« Je n'ai jamais parfaitement réussi, dit-il, à ranimer un animal avec le sang d'animaux d'espèces différentes. Des chiens furent cependant tirés quelquefois de leur état de mort apparente par la transfusion *médiate* du sang de brebis ou d'homme, mais la plupart d'entre eux périrent promptement au milieu de *convulsions violentes,* surtout lorsque j'employai du sang humain. Aucun de ces animaux ne survécut au sixième jour. D'autres expérimentateurs cependant paraissent avoir été plus heureux que moi. M. Blundell, entre autres, assure avoir ramené à la vie un chien, en lui transfusant du sang pris à un homme. Le chien survécut parfaitement à cette expérience.

« *Quant à moi, malgré toutes les précautions imaginables, j'ai constamment échoué.* »

A l'appui de cette assertion, Dieffenbach cite des expériences où du sang humain fut injecté à un chat, du sang de bœuf à un mouton et à un chien : chat et mouton succombèrent. Du sang de lapin fut injecté à un chat : l'animal mourut le même jour. Du sang de veau fut injecté à un chat; après être *resté vingt-quatre heures à l'air,* le chat périt.

Imitant Dieffenbach, Bischoff a pratiqué la transfusion *médiate.*

Expériences faites par Bischoff avec du sang non défibriné.

Il transfusa à un jeune coq, qui avait perdu un peu de sang, une certaine quantité de ce liquide frais, *non défibriné,* qui avait été pris à un chat. Après quelques secondes, l'animal fut pris de *convulsions violentes* et mourut en présentant tous les *symptômes d'un empoisonnement narcotique violent.*

Le même résultat fut observé chez un autre coq, auquel il avait transfusé du sang de lapin. Il mourut sur-le-champ, quoiqu'il n'eût

pas eu d'hémorrhagie et que la quantité de sang de lapin introduit dans son systèmc veineux fût peu considérable.

Expériences faites avec du sang défibriné.

Bischoff mit à nu la veine jugulaire droite à un jeune coq, et lui injecta une petite quantité de sang de veau, *fouetté,* qui avait été tiré de la carotide quelque temps auparavant. L'animal ne parut pas affecté par cette opération et se mit à courir dans la chambre. Aucun accident n'ayant eu lieu, il fit la même expérience sur un autre coq. Le nerf vague fut lié pendant l'opération sans donner lieu à aucun accident. Les deux coqs survécurent, ainsi qu'un troisième, auquel il injecta du sang artériel et veineux mélangé et qui avait été préalablement *défibriné.*

Le 2 juillet 1835, il injecta dans la veine jugulaire droite d'une poule forte et adulte une assez grande quantité de sang artériel *défibriné,* pris à un chien et chauffé à 36° R. La poule en perdit une assez grande quantité, mais moins cependant qu'on ne lui en injecta. Elle parut faible après l'opération : sa respiration était tranquille; elle se remit bientôt, guérit parfaitement, et vécut jusqu'au 6 août, époque où Bischoff s'en servit pour une autre expérience.

Une circonstance curieuse se manifesta : la poule devint méchante; elle sautait à la figure de tous ceux qui l'approchaient, et tua même quelques petits poulets. Cette méchanceté diminua plus tard, mais elle ne se perdit pas complètement.

De toutes ses expériences, Bischoff conclut :

1° Du sang frais de mammifère *non défibriné,* injecté dans les veines d'un oiseau, produit la mort en quelques secondes en déterminant des phénomènes violents semblables à ceux que l'on observe dans l'empoisonnement.

2° Du sang de mammifère *défibriné,* injecté à un oiseau, n'y produit aucuns phénomènes semblables aux précédents, et l'animal reste en vie, sans trouble fonctionnel.

3° La propriété qu'a le sang des mammifères de produire la mort dans les oiseaux, ne pouvant provenir d'un obstacle mécanique à la circulation, puisque les globules des premiers sont plus petits que ceux des seconds, et d'un autre côté les globules étant le principe vivificateur du sang, il en résulte que c'est la fibrine

qui, par suite de sa sortie des vaisseaux, passant de l'état de dissolution où elle est pendant la vie à l'état de coagulum, renferme *un principe délétère*. Dès lors, ce principe n'ayant pas, dans les animaux d'une même classe, d'action directe sur le rétablissement de la vie, et produisant des effets funestes d'une classe à une autre classe, *il sera utile et avantageux de défibriner le sang lorsqu'on voudra faire la transfusion.*

Cette conclusion diffère, on le voit, de celle qui avait été formulée par Magendie sur l'inefficacité du sang défibriné.

Mais il est exact de dire que la fibrine est un *élément toxique;* et n'est-ce pas plutôt à la rapidité avec laquelle le sang se caille chez les mammifères et chez les oiseaux, que l'on doit attribuer les accidents observés? Ne sont-ils pas le résultat et l'introduction dans les vaisseaux d'un sang *moitié liquide, moitié coagulé,* et ne trouve-t-on pas dans les *phénomènes convulsifs* quelques traits de ressemblance avec ceux que déterminent les *embolies?*

MM. Prévost et Dumas, Dieffenbach et Bischoff avaient pratiqué la transfusion *médiate* à l'aide de la seringue. Les transfuseurs du XVIIe siècle avaient au contraire employé la transfusion *immédiate.* La différence dans les résultats obtenus pouvait tenir au procédé opératoire, le second exposant moins que le premier à la coagulation de la fibrine.

Voici comment j'ai tranché la question :

Expériences faites le 26 octobre à l'Ecole pratique, dans le laboratoire de M. le professeur LONGET.

Première expérience. — J'ai mis à nu la veine crurale gauche d'un chien, après lui avoir fait perdre 30 grammes de sang; puis j'ai découvert la veine jugulaire à un canard. N'ayant pas à ma disposition mon appareil, qui a servi à presque toutes mes expériences, je me suis servi de l'appareil de Moncocq, qui remplit, je l'ai déjà dit, les mêmes indications.

J'ai injecté 15 grammes environ *de sang de canard dans la veine du chien*. Pendant les premiers moments, ce dernier animal a paru triste, affaissé et comme étourdi. Ces phénomènes se sont bientôt dissipés, et deux heures après il était dans son état le plus normal. Le soir même il a recommencé à manger.

Deuxième expérience. — A un jeune *chien* j'ai introduit 30 grammes environ de sang de *canard* par le même procédé. Immédiatement après, le chien a paru hébété; son sphincter anal s'est relâché, et les matières fécales se sont échappées. Le soir, l'animal a mangé. *Le lendemain il ne conservait aucune trace de l'expérience faite la veille.*

MM. Gosselin, Ch. Robin, Lucien Corvisart et Labbé, qui m'avaient assisté dans ces deux expériences, ont constaté les résultats que je viens de mentionner.

Troisième expérience. — J'ai fait passer dans la veine jugulaire d'un *canard* auquel j'avais fait perdre 40 grammes de sang environ, 30 grammes de sang pris dans la veine jugulaire d'un jeune *chien*. Le canard a paru peu impressionné de cette opération. Il est encore vivant aujourd'hui (3 novembre.)

Il est donc possible de transfuser à un animal d'une espèce, le sang provenant d'un animal d'une autre espèce, pourvu que ce liquide arrive dans les veines du premier tel qu'il circule dans les veines du second, c'est à dire sans avoir subi aucun commencement de coagulation. La théorie qui attribue à la fibrine une action *toxique* repose sur des expériences mal faites, dont le vice dépend du mode opératoire. Les phénomènes convulsifs observés tiennent à un obstacle à la circulation occasionné par l'introduction de caillots fibrineux, et non point à un principe délétère qui varierait suivant les espèces animales.

CONCLUSIONS.

1° On peut ramener à la vie un animal sur le point de mourir par suite d'hémorrhagie, en injectant dans ses veines du sang pris à un autre animal.

2° L'expérience démontre que les globules jouissent seuls de cette propriété revivifiante.

3° La rapidité avec laquelle le sang des animaux se coagule dès qu'il est sorti des vaisseaux, rend très difficile l'opération de la transfusion à l'aide de la seringue à injection ordinaire.

4° La *réfrigération du sang* et la *privation du contact de l'air* sont les deux circonstances qui m'ont paru le plus propres à retarder la coagulation. Dans les expériences sur les animaux, il sera indispensable de les observer, lorsqu'on voudra pratiquer la transfusion médiate.

5° On peut injecter dans les veines d'un animal le sang pris à un autre animal, sans déterminer d'accidents graves chez le premier, à la condition que le sang soit parfaitement liquide.

6° Les phénomènes observés par Prévost, Dumas, Bischoff et Dieffenbach, dans ce dernier cas, et attribués par ces physiologistes à une propriété *toxique* de la fibrine, sont déterminés *uniquement* par des *embolies*.

7° En pratiquant la transfusion *immédiate,* soit à l'aide de mon appareil, soit avec celui de Moncocq, on évitera facilement la formation des embolies, ainsi que le démontrent mes expériences.

8° La défibrination du sang est donc inutile, surtout chez l'homme, où le sang ne commence à se coaguler que quatre ou cinq minutes après sa sortie des vaisseaux.

EXPÉRIENCES

SUR LA

PRODUCTION DES ALGUES INFÉRIEURES

DANS LES INFUSIONS DE MATIÈRES ORGANIQUES.

PAR LE Dr ORÉ

Professeur de physiologie à l'École de Médecine de Bordeaux, Chirurgien de l'hôpital Saint-André, Membre correspondant de la Société de Chirurgie.

Les *algues* sont des végétaux vivant généralement sur la terre humide et dans les eaux douces ou salées, remarquables par une texture cellulaire ou filamenteuse dans laquelle il n'entre jamais de vaisseaux; en général libres, vivant isolément ou en société, nues ou enveloppées dans une sorte de substance gélatiniforme; à végétation continue ou interrompue par intervalles; puisant dans l'humidité ou le liquide ambiant les matériaux propres à leur accroissement, et dans l'air et la lumière, les principes de leur coloration; susceptibles enfin de se reproduire, soit par des germes prolifiques développés à leur surface *(gonidia)*, soit par des sporules ou des séminules résultant, autant du moins qu'on en peut juger, du seul acte de la nutrition (germes non fécondés), soit enfin par des sporidies que contient un *nucléus* renfermé lui-même dans des réceptacles ou apothésies diversement conformés. (C. Montagne. — *Dict. d'hist. naturelle*, d'Orbigny, t. I, p. 273.)

Mon but, dans ce travail, n'est pas d'étudier le caractère des algues, ni de faire leur histoire botanique. Je n'ai pas la compétence nécessaire pour traiter un sujet aussi difficile.

Je veux indiquer simplement une des conditions nécessaires à l'apparition de ces végétaux dans les infusions et décoctions de matière organique.

Les substances dont je me suis servi sont assez variées. Je les ai empruntées aux deux règnes végétal et animal. Pour le premier, ce sont : le foin, le poivre, la betterave, les asperges, la levûre de bière ; pour le second, le foie de veau, le liquide de l'ascite, l'urine, etc.

Pour bien apprécier le développement de ces végétaux inférieurs, j'ai fait deux séries d'expériences.

Dans la *première série,* j'ai placé les matières organiques dans l'eau exposée à l'air libre.

Dans la *seconde,* j'ai fait bouillir les matières pendant une heure ou deux, je les ai filtrées après l'ébullition, les abandonnant ensuite à l'air extérieur.

Dans ces deux séries d'expériences, j'ai obtenu les mêmes résultats, avec cette différence que la production des algues a toujours été plus lente dans le second cas que dans le premier.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

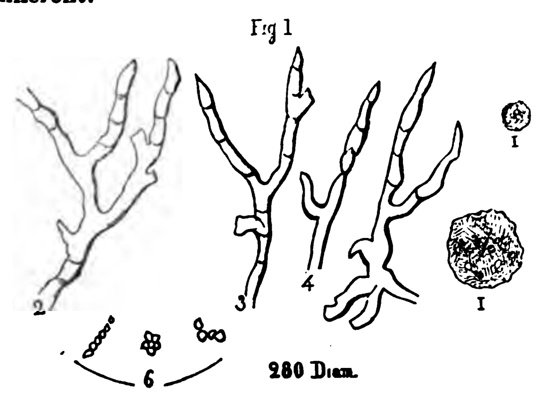
Décoction de foin filtrée après une ébullition de demi-heure, et abandonnée à l'air libre (1er juin 1865).

Après avoir fait bouillir 100 grammes de foin dans 500 grammes d'eau et avoir filtré la décoction, je l'ai exposée à l'air libre, la température ambiante étant de 25° centigrades.

Pendant les quinze ou seize premiers jours, la liqueur n'a présenté aucune altération sensible. Mais à partir de ce moment, il s'est produit à la surface trois plaques d'un vert noirâtre, plus foncé au centre que sur les bords, et affectant la forme lenticulaire. L'une de ces plaques offrant le diamètre d'une pièce de un franc, était renflée à son milieu et mince à sa périphérie. Elle offrait tous les caractères extérieurs d'un morceau de mousse. Les deux autres plaques, moins larges que la précédente, avaient la même forme et la même apparence.

J'ai examiné ces corps circulaires (fig. 1, n° 1) au microscope, avec un grossissement de 280 diamètres.

J'ai constaté l'existence de tubes à parois distinctes présentant de distance en distance des lignes transversales. Ces tubes (n° 2, 3, 4, 5) s'unissaient entre eux, en formant des angles plus ou moins aigus qui donnaient à la préparation l'apparence de rameaux d'aspect différent.



En étudiant avec soin les trois parties mentionnées précédemment, j'ai cru reconnaître dans l'une d'elles, la plus petite, des filaments moniliformes brisés, à articles presque tous séparés.

J'ai soumis ces préparations à mon savant collègue M. Lespinasse, pour savoir son opinion sur la nature de ces productions. Voici les renseignements qu'il m'a fournis; je les emprunte à la note écrite qu'il m'a remise.

« Cette curieuse algue appartient incontestablement au genre *Cladaphora œgagrophila,* de Kutzing.

» Quoiqu'on ne puisse guère la rapporter à aucune des descriptions de cet auteur, je suis loin d'affirmer qu'elle est nouvelle.

» Les corps organisés qui se produisent dans les infusions arrivent rarement à l'état adulte. Nés dans un milieu qui n'est point leur station naturelle, ils y sont toujours imparfaitement développés; et pour les algues, en particulier, je ne crois pas qu'on y ait jamais vu se produire leurs zoospores mûres. Ce sont en quelque sorte des êtres rachitiques. De cet état, sont nés tous ces enfants trouvés du règne végétal qu'on appelle les *algues infusoires.*

» Quant aux *filaments moniliformes* que vous avez figurés dans votre dessin (n° 6), et dont j'ai également constaté l'existence, ils me paraissent être une *Nostochinée* du genre *Anabaena.* »

Il résulte donc de mes recherches, contrôlées par celles de notre habile botaniste bordelais, que les productions qui se sont développées dans l'infusion de foin sont bien des matières végétales, et qu'on peut les rapporter aux *algues infusoires*.

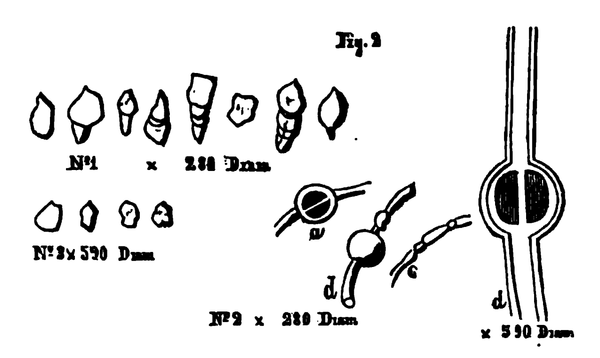
DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

(15 juillet 1865.)

J'ai fait bouillir une assez grande quantité d'asperges, pendant une heure, dans un litre d'eau. Ce liquide, filtré et placé dans un vase largement ouvert, a été abandonné à l'air libre.

Cette décoction a été, comme la précédente, examinée avec le plus grand soin après quinze jours.

J'y ai rencontré une vaste pellicule mucoso-gélatineuse, d'un blanc un peu jaunâtre, formée d'une sorte de tissu amorphe, flottant à la surface du liquide.



J'ai étudié cette pellicule avec le microscope Nachet (petit modèle). J'ai habituellement employé l'oculaire 1 et l'objectif 5, qui fournissent un grossissement de 280 diamètres, quelquefois l'oculaire 3 et l'objectif 5, qui donnent 590 diamètres.

A l'aide de ces grossissements, j'ai trouvé dans cette pellicule des corpuscules de trois sortes. Ainsi, le n° 1 représente des spores que M. Lespinasse a cru être celles du *Puccinia asparagi,* champignon parasite de l'asperge qui y est très commun.

Indépendamment de ces spores, j'y ai rencontré des cellules

homogènes transparentes, d'où partaient, en sens opposé, des tubes offrant de distance en distance des intersections formées par des petites cellules arrondies (d). Dans quelques points, j'ai trouvé la disposition précédente. Seulement, au milieu de la cellule se détachaient deux demi-sphères, séparées l'une de l'autre par une ligne transparente et offrant une teinte jaunâtre (d).

Ces derniers éléments ont paru à M. Lespinasse être des fragments d'un *Œdogonium,* algue assez compliquée de la famille des confervées. Les gonidies renfermées dans la cellule renflée m'ont paru avoir quelquefois un mouvement propre assez apparent.

Sous le nº 3, j'ai figuré des corpuscules noirs en très grand nombre, d'un très petit volume, qui formaient un dépôt au fond du liquide. Agglomérés quelquefois en masses d'un volume variable, je les ai rencontrés dans tout le liquide et sur la pellicule. Ces petits corpuscules avaient un mouvement propre de trépidation et de locomotion. Le mouvement de locomotion m'a paru lent, mais incontestable.

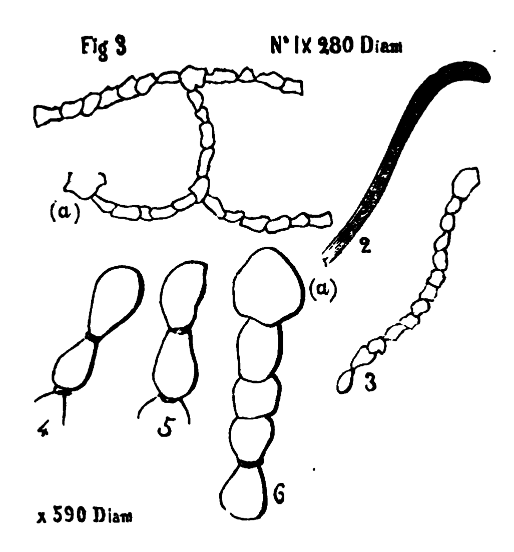
Ce sont, je le suppose, des animalcules de l'espèce la plus simple, car au microscope ils m'ont offert une seule cellule transparente. Peut-être s'agit-il seulement de corps d'une nature inconnue, pourvus du *mouvement Brownien.*

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

Décoction de foie de veau soumise à deux ébullitions pendant une heure chaque fois (20 juillet 1865.)

J'ai examiné cette décoction après trois semaines de contact avec l'air extérieur, la température étant en moyenne de 28 à 30° centigrades. J'y ai trouvé, flottant sur le liquide, de petites masses d'un noir verdâtre, paraissant veloutées, ayant de un millimètre à un centimètre de diamètre. Quelques-unes de ces masses étaient reliées entre elles par une membrane mince, blanche, un peu transparente; cette membrane, sur laquelle je ne reviendrai pas, était composée d'un mucus amorphe, de filaments formant un lacis irrégulier, et de granules très petits, d'une couleur un peu fauve, de formes et de grosseurs diverses.

La petite masse, qui seule offre de l'intérêt, est composée de filaments rameux, intriqués, caténiformes, à articles variés de



forme et de grosseur, mais se terminant généralement (les filaments) par une cellule beaucoup plus volumineuse (fig. 3, n°s 1, 3, 6). Ces caractères, malgré leur insuffisance, ont permis néanmoins à M. Lespinasse de rattacher cette algue au genre *Cylindrospermum,* de Kutzing. Placé dans la famille des *Nostochinées,* ce genre se rapproche davantage, suivant le même botaniste, de la famille des *Oscillariées*, et conséquemment se trouve dans cette catégorie de végétaux auxquels est attribuée une sorte de vie animale.

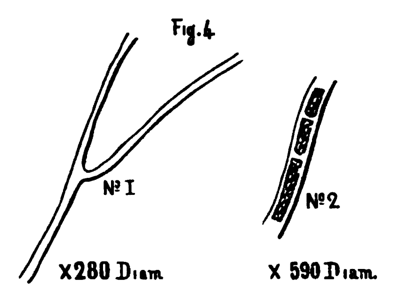
Quant au filament n° 2, il appartient à une algue qui a paru indéterminable.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Urine humaine soumise à une ébullition d'une demi-heure.

Il s'est produit au milieu de cette urine une membrane offrant la plus grande ressemblance, par l'aspect extérieur, avec la couenne inflammatoire d'un caillot sanguin.

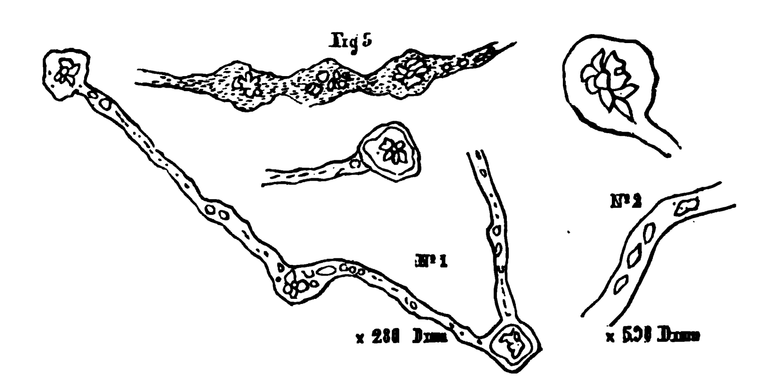
Le tissu de cette membrane est composé d'un lacis serré de filaments très longs et très ténus, rameux, non articulés ni cloi-



sonnés. Ils sont remplis d'une matière granuleuse incolore, qui par suite de certaines lacunes, fait paraître l'algue cloisonnée, bien qu'elle ne le soit pas (fig. 4, n° 2). S'il fallait rattacher cette production à une famille végétale, M. Lespinasse la ferait figurer dans la famille des *Oscillariées,* bien qu'elle n'ait offert aucune trace d'oscillation. Mais il croit plutôt à *la nature animale de ce produit.*

CINQUIÈME EXPÉRIENCE

faite le 13 mai avec de la levure de bière, du sucre et de l'eau.



Il serait difficile de décrire avec exactitude toutes les particularités de forme et d'aspect que présentent les productions végétales qui se sont manifestées à la surface du liquide. On y trouve, en

effet, une large croûte offrant tantôt des dépressions, tantôt des saillies d'inégale épaisseur. Là c'est une surface veloutée, ailleurs une surface hérissée d'aspérités et comme tapissée par un duvet extrêmement léger. La couleur de cette vaste production, qui occupe toute l'étendue de la couche liquide, est d'un blanc grisâtre dans quelques points, vert foncé dans d'autres, enfin complètement noire ailleurs.

La Figure 5 représente toutes les particularités que le microscope a révélées. M. Lespinasse pense que c'est en même temps le fameux *Mycoderma-Cervisiæ* et peut-être le *Leptomitus-Saccharicola* de Kutzing, le tout recouvert du mycelium d'une ou plusieurs mucédinées indéterminables.

De toutes les expériences que je viens de rapporter, et de leur étude microscopique, découle cette conséquence importante :

Les infusions ou décoctions de matières organiques végétales ou animales, exposées à l'air libre, se recouvrent, après un temps variable, de productions végétales qui se rapportent généralement aux algues.

L'habitude de me servir du microscope pour les recherches anatomiques m'a bien permis de juger par moi-même des aspects variés de ces végétaux; mais il m'eût été impossible, à cause de mon peu de compétence dans la matière, de rattacher ces caractères à des formes déterminées. L'étude des algues est du reste très peu connue. C'est là ce qui m'a fait recourir à l'obligeance de M. Lespinasse, auquel je suis heureux d'exprimer ici toute ma gratitude. Ce qui m'importait avant tout, c'était de savoir si *les productions qui s'offraient à mon observation étaient réellement de nature végétale.* A part le Mycoderma-Cervisiæ, que quelques botanistes regardent encore comme étant de nature animale, le doute n'est pas permis sur toutes les algues dont je viens de donner la description.

Ce fait une fois établi, je vais signaler quelle est, d'après mes expériences, la condition essentielle de leur apparition.

Du rôle de l'air dans la production des algues inférieures.

Avant d'exposer les expériences à l'aide desquelles j'ai cherché à apprécier le rôle de l'air dans la production des algues inférieures,

je dois mentionner celles que j'ai entreprises dans le même but avec l'oxygène et l'azote.

Au mois de décembre 1858, M. Pouchet communiqua à l'Académie des sciences l'expérience suivante :

« Un flacon d'un litre de capacité fut rempli d'eau bouillante, et ayant été bouché hermétiquement avec la plus grande précaution, immédiatement on le renversa sur une cuve à mercure; lorsque l'eau fut totalement refroidie, on le déboucha sous le métal et on y introduisit un demi-litre d'oxygène pur. Aussitôt après, on y mit sous le mercure une petite botte de foin pesant 10 grammes, qui venait d'être enlevée dans un flacon bouché, à une étuve chauffée à 100°, et où elle était restée trente minutes. Le flacon fut enfin hermétiquement fermé à l'aide de son bouchon soudé à l'émeri, et, pour surcroît de précaution, lorsqu'on l'eut enlevé de la cuve, on mit une couche de vernis gras et de vermillon tout autour de son ouverture.

» Huit jours après, la macération était d'une couleur fauve, sans pellicule apparente à sa surface, au moins à l'œil nu; mais le foin submergé offrait sur quelques-uns des brins qui hérissaient sa botte des globules d'un blanc jaunâtre, de la grosseur d'un grain de groseille blanche, auquel de loin ils ressemblaient beaucoup. Ces globules, au nombre de 8 à dix, mais dont quelques-uns étaient très petits, et flottant dans la liqueur, paraissaient évidemment formés de filaments d'une mucorinée, implantés à un même endroit, et de là s'irradiant en touffes serrées; le microscope le démontra. Le dixième jour, le flacon ayant été ouvert, on examina son contenu. Il n'y avait eu entre l'intérieur et l'atmosphère aucun échange. Le gaz oxygène qu'il contenait paraissait encore absolument pur, et les corps en ignition qu'on y plongeait activaient immédiatement leur combustion. On reconnut alors que les gros globules ou flocons blanchâtres étaient évidemment formés par une espèce de champignon à mycélicum très touffu et tassé.

» Cette plante, que je pris pour un *Aspergillus,* dit M. Pouchet, ne me paraissant point avoir été décrite, afin de m'éclairer à ce sujet, je me suis adressé à M. Montagne, dont l'autorité en semblable matière a une haute valeur. Il a pensé que c'était une espèce nouvelle, et il lui a plu de lui imposer le nom d'*Aspergillus Pouchetii*. J'ai respecté sa décision. »

Deuxième expérience de Pouchet, faite avec de l'air artificiel.

Dans un flacon disposé comme précédemment et ouvert sous le mercure, M. Pouchet a introduit un mélange de 21 0/0 d'oxygène et 79 parties d'azote. Une botte de foin sortant d'une étuve chauffée à 100° a été introduite par le même mécanisme.

Le douzième jour, M. Pouchet y découvrit un globule sphérique de 5 millimètres de diamètre, constitué très probablement par un amas d'*Aspergillus*.

Le dix-huitième jour, l'eau était fort trouble, et il apparut vers son milieu un îlot flottant, formé évidemment de *Penicillium* en fructification.

Après un mois, le flacon fut débouché; le gaz contenu dans son intérieur n'avait contracté aucune mauvaise odeur, la superficie de l'eau n'offrait aucune pellicule, et on y voyait flotter quatre petits îlots de *Penicillium,* ainsi que plusieurs flocons d'*Aspergillus*.

M. Pouchet conclut de ces deux expériences, que des plantes se sont développées dans un milieu absolument privé d'air atmosphérique, et dans lequel, par conséquent, celui-ci n'a pu apporter les germes des êtres organisés qu'on y a découverts.

J'ai répété les expériences de M. Pouchet pendant mon cours de physiologie à l'École de Médecine de Bordeaux, et j'ai constaté, comme ce savant, que des productions végétales se sont manifestées toutes les fois que je me suis placé dans les conditions qu'il indique. M. Pasteur lui-même, l'illustre antagoniste de l'hétérogénie, n'en conteste pas la vérité. Ainsi, dans une remarquable leçon sur les *générations spontanées,* faite à la Sorbonne, il a rappelé l'expérience du physiologiste de Rouen, mais il a nié la conclusion que ce dernier en a tirée. D'après M. Pasteur, la cuve à mercure étant exposée à l'air libre, le métal se trouve sans cesse en contact avec ses poussières, qui le pénètrent dans toute sa profondeur; de telle sorte que si la petite botte de foin ne renfermait aucun germe au moment où l'expérimentateur la plonge dans la cuve, il n'en est plus de même au moment où elle est introduite dans le flacon. M. Pouchet a donc laissé entrer dans l'eau du flacon des germes qui devaient donner naissance aux amas d'*Aspergillus* observés.

Voulant me mettre à l'abri de cette objection, j'ai ainsi modifié l'expérience :

Dans un flacon d'un litre, j'ai introduit une décoction de foin qui était restée en ébullition pendant une heure, et je l'ai immédiatement bouché. Renversant alors le flacon dans une cuve à mercure qui n'avait jamais servi à aucune manipulation, j'ai enlevé le bouchon, et j'ai fait arriver dans la décoction de foin de l'*oxygène* préparé avec le chlorate de potasse. Une partie du liquide ayant été chassée par le gaz, j'ai aussitôt rebouché le flacon, que j'ai laissé dans la cuve.

Après quinze jours, aucune modification ne s'était produite dans la décoction, qui avait conservé sa transparence. Il en a été de même après vingt jours. Après un mois, la liqueur offrait les mêmes caractères.

Je n'ai pas continué plus longtemps l'observation, ce résultat me paraissant suffisant pour trancher la question.

Les expériences faites de la même façon avec l'azote, ont été sans influence sur la production des matières végétales; elles diffèrent de celles de M. Pouchet en ce que, au lieu de faire pénétrer dans le flacon une petite botte de foin pouvant servir de véhicule aux poussières, j'ai employé une décoction de foin filtrée qui avait été soumise à une ébullition d'une heure avant d'être introduite dans le vase.

J'ai fait ainsi plusieurs expériences, dont un grand nombre de spectateurs ont été témoins, et j'ai constamment observé ce résultat que *ni l'oxygène ni l'azote, dans les conditions que je viens de signaler, n'ont donné naissance à des matières végétales.*

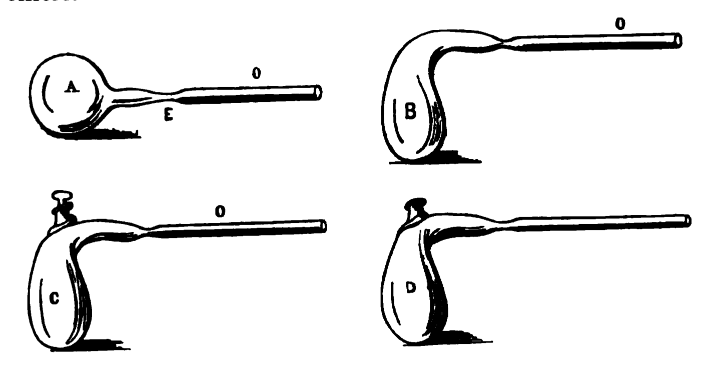
Étudions actuellement le rôle de l'air atmosphérique. Pour apprécier le rôle de l'air atmosphérique dans la production des algues inférieures, je me suis servi de ballons et de cornues offrant des formes variées :

La Figure 1 représente un ballon d'une capacité de 300 grammes terminé par un tube allongé qui, au point E, a été effilé avec une lampe à émailleur.

La Figure 2 représente une cornue de 500 grammes, fermée de toutes parts dans sa partie la plus évasée, et dont le tube offre la même disposition.

La Figure 3 représente une cornue ayant la même capacité,

mais qui, à la réunion de son corps avec le tube O, est munie d'une tubulure de 3 à 5 centimètres de longueur, fermée par un bouchon à émeri.



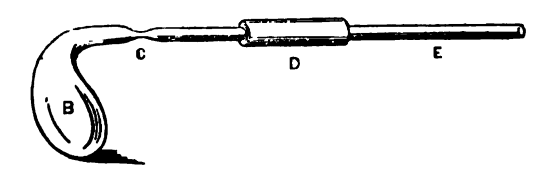
Dans la Figure 4, on trouve la même cornue à tubulure, sans bouchon à l'émeri.

C'est avec des cornues ou ballons représentant ces diverses formes que j'ai fait toutes mes expériences.

La partie large des ballons ou cornues était destinée à recevoir la décoction de matière organique. Le tube O ayant été effilé au point E, il était facile, une fois l'air arrivé au contact de la liqueur, d'intercepter toute communication avec l'extérieur en déterminant la fusion du verre dans ce point.

Pour faire pénétrer dans ces appareils de l'air privé de tous les germes qu'il peut contenir, j'ai disposé l'expérience de la manière suivante :

L'extrémité du tube O plongeait dans un tube de porcelaine avec lequel il se trouvait uni par une lame ou un tube de caoutchouc.



B représente la cornue dans laquelle j'ai introduit la décoction de matière organique;

D, le tube de caoutchouc unissant la cornue avec un tube de

porcelaine E, placé dans un fourneau à réverbère rempli de charbons incandescents et destinés à faire passer le tube de porcelaine au rouge blanc;

C, la partie du col de la cornue effilée à la lampe.

MANIÈRE DE SE SERVIR DE L'APPAREIL.

Première expérience (4 juin 1865). — J'ai introduit dans une cornue d'une capacité de 500 grammes 100 grammes d'une décoction de foie de veau soumise à une première ébullition de demi-heure et filtrée. La cornue ayant été mise en communication avec le tube de porcelaine placé dans le fourneau à réverbère, qu'il débordait par ses deux extrémités, j'ai placé sous la cornue une lampe à alcool à cinq becs, et pendant une demi-heure la décoction de matière organique animale a été soumise à une seconde ébullition. Bientôt la vapeur s'est dégagée par l'extrémité du tube de porcelaine. Enlevant alors la lampe à alcool, j'ai laissé refroidir la liqueur, afin de permettre à l'air extérieur de pénétrer dans l'appareil. Ce gaz a dû traverser, pour arriver au contact de la décoction, un tube dont la température était portée au rouge blanc. Cette seconde partie de l'expérience a duré *trois quarts* d'heure environ. A ce moment, mettant la lampe à alcool en contact avec la partie C effilée du tube de la cornue, j'ai déterminé la fusion du verre, et j'ai pu ainsi fermer complétement et très hermétiquement la cornue.

Il en résulte que la cornue B contenait :

1° Une décoction de matière organique animale (foie de veau) soumise à deux ébullitions de demi-heure;

2° De l'air qui s'était *purifié* en traversant un tube de porcelaine rougi à blanc.

L'expérience une fois terminée, j'ai abandonné l'appareil dans mon laboratoire, où il est resté jusqu'à ce jour exposé aux chaleurs excessives des mois de juin, juillet, août et septembre. Examinée le 30 novembre, c'est-à-dire *après six mois,* la liqueur a conservé toute sa limpidité, et ne présente pas la moindre trace d'une matière végétale quelconque.

J'ai répété deux fois, le même jour, l'expérience précédente avec une décoction de foin. Je me suis servi, dans la première, d'une

cornue; dans la seconde, j'ai pris un ballon de verre d'une capacité de 300 grammes, semblable à ceux dont M. Pasteur a fait usage dans ses expériences sur la génération spontanée.

Ces deux appareils ont été examinés le 30 novembre : la décoction de foin qu'ils renfermaient est en tous points semblable à la précédente.

Il sera facile de constater la vérité de ces résultats, les ballons ayant été conservés depuis le jour de l'expérience (4 juin).

Quatrième expérience faite le 4 juin avec la décoction de foie employée dans la première expérience. — L'appareil a été disposé comme précédemment. Mais au lieu d'une cornue fermée de toutes parts, je me suis servi d'une cornue bouchée à l'émeri dont le bouchon avait été recouvert d'une couche de vernis copal.

Examinée deux mois après, la décoction a offert un petit îlot d'une matière verdâtre et noirâtre dont les bords offraient une coloration grise. Cet îlot avait, le 30 novembre, la dimension d'une pièce de 50 centimes.

Il en résulte que la première et la quatrième expériences, faites le même jour, de la même manière, avec la même substance (décoction de foie de veau), avec les mêmes précautions, ont donné deux résultats essentiellement différents : dans l'une, la liqueur n'a présenté aucune altération; dans l'autre, s'est montrée, au contraire, une production végétale.

On est en droit de se demander quelle a pu être la cause de cette différence. Je n'hésite pas à affirmer qu'elle se trouve uniquement dans la différence des cornues employées, l'une étant fermée de toutes parts, tandis que l'autre était bouchée à l'émeri. Il m'est arrivé bien souvent, en effet, dans les si nombreuses expériences que j'ai faites, de vérifier *que la disposition des vases exerce une action incontestable sur les résultats*. On dira peut-être que le bouchon de la cornue fermait très hermétiquement, puisque l'appareil renversé ne laissait échapper aucune goutte de liquide. Je répondrai que l'expérience est plus forte que tous les raisonnements, et que l'air peut passer où l'eau ne passe pas, alors surtout qu'attiré par une décoction en voie de refroidissement, il doit nécessairement se précipiter avec plus de rapidité.

Cependant, il n'en a pas toujours été ainsi, comme le démontre le fait suivant :

Dans la collection de mes cornues, on peut en voir une *bouchée à l'émeri* qui renferme une décoction de foie soumise à deux ébullitions de demi-heure, et dans laquelle *aucune production végétale ne s'est montrée après six mois.*

Ceux qui seront tentés de répéter ces expériences, devront donc s'assurer qu'aucune pénétration de l'air n'est possible dans l'intervalle compris entre la petite tubulure de la cornue et le bouchon qui la ferme. Je n'abandonnerai pas ce sujet, sans mentionner deux autres causes d'erreur que j'ai fait constater expérimentalement aux élèves qui ont suivi mes leçons de physiologie à l'École de Médecine de Bordeaux.

La première se trouve dans l'emploi des bouchons de *liége,* la seconde dans celui des *tubes de caoutchouc.*

D'une manière à peu près constante, j'ai vu se développer des matières végétales dans les appareils fermés avec des bouchons de liége, même recouverts de couches épaisses de vernis.

La seconde cause d'erreur réside dans les tubes de caoutchouc qui servent de moyens d'union entre les cornues et le tube de porcelaine.

Il m'est arrivé souvent, dans le cours d'une expérience, de m'apercevoir qu'au moment où la décoction organique entrait en ébullition, non-seulement la vapeur se dégageait par l'extrémité libre du tube de porcelaine, mais qu'il en passait aussi, quoiqu'en très faible quantité, dans le point où le tube de caoutchouc entourait la cornue. Il est alors facile de comprendre que, par suite du refroidissement de la liqueur, l'air pouvait pénétrer facilement dans l'appareil en traversant la partie que la vapeur avait pu elle-même traverser. Lorsque cette circonstance s'est produite, j'ai constamment observé la production des matières végétales.

Pour écarter ces causes d'erreur, je me suis habituellement servi de cornues ou de ballons fermés, et j'ai veillé, en outre, à ce que le tube de caoutchouc unissant la cornue et le tube de porcelaine s'appliquât très fortement sur l'un et sur l'autre.

C'est ainsi que j'ai observé les résultats mentionnés dans mes trois premières expériences et dans les suivantes :

Sixième expérience (6 juin). — Décoction de *poivre* ayant bouilli pendant une heure et filtrée. Après cinq mois, on n'observe aucune production végétale.

Septième expérience. — *Eau, sucre, levure de bière.* — Pas d'altération de la liqueur après cinq mois et demi.

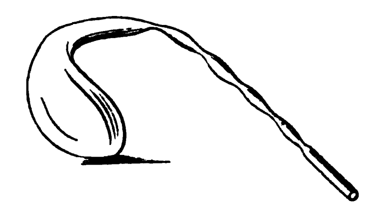
Huitième et neuvième expériences (13 et 15 juin). — Deux ballons contenant de l'eau d'asperges. La décoction est parfaitement limpide après six mois.

Dixième expérience (6 juin). — Poivre et foin mélangés, bouillis et filtrés. Pas de production végétale après cinq mois et demi.

Les partisans de l'hétérogénie, et à leur tête M. Pouchet, n'objecteront pas, je l'espère, que l'air n'ayant pu se renouveler par suite de l'occlusion de l'appareil, les matières organiques ne se trouvaient pas dans des conditions convenables pour donner naissance à des productions végétales. La réponse serait trop facile, car M. Pouchet, dans ses expériences exécutées sur la cuve à mercure, soit avec l'oxygène, soit avec l'air artificiel, se trouvait dans les mêmes conditions, et néanmoins il a constaté l'apparition de *Penicellium* et d'*Aspergillus*.

Mais on dira peut-être que l'air des cornues ayant été *calciné* par son passage à travers un tube rougi à blanc, était impropre au développement des algues. Pour répondre à cette objection, j'ai fait les expériences suivantes :

A l'exemple de M. Pasteur, j'ai introduit, le 3 juin, une décoction de foin dans une cornue dont j'avais étiré le col à la lampe, en le recourbant de diverses manières, mais en ayant le soin de laisser son extrémité ouverte. Le col présentait, par suite, une série de renflements et de parties étranglées. La figure suivante indique cette disposition.



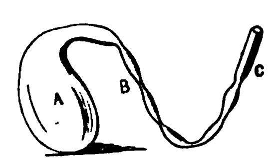
La décoction contenue dans la cornue ayant été soumise à une ébullition d'un quart d'heure, j'ai laissé pénétrer l'air extérieur. L'appareil a été ensuite abandonné dans mon laboratoire pendant plusieurs mois.

Les résultats de cette expérience et de plusieurs autres semblables faites avec la décoction de foie de veau ou d'asperges, ont été presque toujours les mêmes. La liqueur est restée limpide et aucune production végétale ne s'est montrée. Cependant, *toutes les cornues sont restées ouvertes,* et par suite en communication libre avec l'extérieur. Sans nul doute ce sont les sinuosités diverses de leur col qui garantissent les liquides de la chute des germes. L'air, il est vrai, est entré brusquement à l'origine; mais pendant toute la durée de sa rentrée brusque, les décoctions très chaudes et lentes à se refroidir faisaient périr les germes apportés par ce gaz. Puis, quand les liquides sont revenus à une température assez basse pour rendre possible le développement de ces germes, l'air rentrant lentement laissait tomber ses poussières à l'ouverture du col, ou les déposait en chemin sur ses parois intérieures.

Bien que dans la plupart de mes expériences les sinuosités du tube de la cornue aient suffi pour arrêter les poussières de l'air et par suite les germes qu'elles renferment, il est arrivé quelquefois que des productions végétales se sont montrées dans les décoctions. J'en ai cherché la cause dans le refroidissement du ballon, qui avait pu accélérer l'arrivée trop rapide de ce gaz. Aussi, pour obvier à cet inconvénient, ai-je eu recours à trois nouvelles séries d'expériences :

1° J'ai placé à l'ouverture du col de la cornue une petite bourre de coton poudre, destinée à tamiser l'air et à arrêter ses poussières. J'ai souvent réussi par ce moyen.

2° Je me suis servi d'un ballon dont le col effilé offrait la disposition représentée dans la figure suivante.



En même temps qu'une lampe à alcool était placée sous la cornue A, la portion BC de son col plongeait dans de l'eau dont la température avait été préalablement portée à plus de 120 degrés. Il en résulte que lorsque la décoction s'est refroidie, l'air se précipitant dans le tube n'a pu arriver en A qu'après avoir traversé la

partie BC où il s'est trouvé exposé à une chaleur considérable.

Jamais, en expérimentant ainsi, je n'ai vu se produire de matières végétales dans la décoction de foin, de veau, d'asperges, etc.

Voulant enfin m'entourer de toutes les conditions les plus favorables, j'ai modifié ainsi l'expérience.

Un ballon, dont le col offrait des renflements et des étranglements de distance en distance, a été uni à un tube à boule de Liebig contenant de l'acide sulfurique, à l'aide d'un tube de caoutchouc.

La décoction ayant été portée à l'ébullition, la vapeur s'est dégagée par le tube à boule; lorsque l'air s'est précipité dans la cornue pendant son refroidissement, il s'est trouvé en contact avec l'acide, où il a dû se dépouiller de tous ses germes. Dans ces conditions, la liqueur a toujours conservé sa limpidité; *aucun végétal, algue* ou *mucédinée ne s'est montré.*

Je ne sache pas que ces dernières expériences, qui me paraissent décisives, aient été faites, avant moi, par aucun expérimentateur.

Avant d'arriver à formuler les conclusions qui découlent des expériences précédentes, je ferai remarquer que j'ai parlé seulement dans ce travail du développement des algues à la surface des infusions et décoctions de matières organiques animales ou végétales. Là ne s'est pas borné le champ de mes études sur l'hétérogénie. J'indiquerai bientôt dans un nouveau Mémoire, qui complétera celui-ci, ce que je pense des générations spontanées. Je dois cependant formuler ces deux propositions que je démontrerai plus tard.

1° Toutes les fois que des algues ou des mucédinées se sont montrées, il y a eu en même temps apparition des microzoaires.

2° Mais l'apparition de ces derniers a eu lieu bien souvent en l'absence des premières.

CONCLUSIONS.

1° Les *algues infusoires* se montrent à la surface des décoctions de matières organiques végétales ou animales, lorsque ces der-

nières restent exposées à l'air libre. Leur apparition est retardée si l'ébullition a été longtemps prolongée.

2° Les *algues infusoires* ne se sont jamais montrées, lorsqu'en prenant les précautions indiquées précédemment, j'ai fait arriver au contact de la décoction, de l'air purifié par son passage à travers un tube de porcelaine rougi à blanc.

3° L'air peut donc être considéré comme le véhicule des germes qui donnent naissance à ces productions végétales.

OBSERVATIONS

SUR LA NOTE DE M. BAUDRIMONT

INTITULÉE :

De la non-identité de la chaleur et de la lumière (¹)

PAR M. ABRIA

Je ne me propose ici que de discuter les arguments invoqués par mon savant collègue de la Faculté des Sciences contre l'identité de la chaleur et de la lumière. J'ai examiné la question en elle-même, dans un travail imprimé parmi ceux de l'Académie de Bordeaux, pour l'année actuelle 1865, et je suis arrivé, avec la plupart des physiciens qui l'ont étudiée, à la conclusion que les deux agents sont dus à une même cause, ou, pour mieux préciser ma pensée, à un même mouvement moléculaire. Je n'ai donc en ce moment ici d'autre but que d'examiner les raisons alléguées par M. Baudrimont en faveur de l'opinion contraire, et de faire voir qu'elles ne sont nullement péremptoires.

J'observe d'abord que M. Tyndall n'a pas conclu, ainsi que paraît le croire mon honorable collègue, à l'identité des deux agents, par cela seul qu'il est parvenu à priver un faisceau lumineux et calorifique de sa partie lumineuse. Il a effectué cette séparation, plus nettement qu'on ne l'avait fait avant lui, avec le sulfure de carbone chargé d'iode, et a pu mesurer ainsi très exactement la proportion de lumière émise avec la chaleur par les différentes sources dont il s'est servi. La connaissance de cette proportion est l'un des éléments de la question qui nous occupe, mais n'est pas suffisante pour la trancher. Rien, dans les extraits que nous possédons du travail de M. Tyndall, n'autorise à croire qu'il ait conclu des expériences *seules* qu'il avait faites, à l'identité

(¹) *Mémoires de la Société*, t. III, p. 313.

de la lumière et de la chaleur. Mais ces expériences sont favorables à cette identité, ainsi que je le développerai plus loin, parce qu'il en résulte qu'un faisceau calorifique et lumineux, privé de la partie lumineuse, conserve encore presque toute son intensité, les $\frac{90}{100}$ dans le cas de la lampe électrique, les $\frac{92}{100}$, les $\frac{96}{100}$ ou plus encore, quand on emploie d'autres sources.

Je passe maintenant à l'examen des diverses objections faites à l'identité des deux agents.

Premièrement, dit M. Baudrimont, la lumière ne dilate point les corps et la chaleur les dilate.

Si le fait était exact, s'il était établi d'une manière incontestable, il serait suffisant sans doute pour séparer essentiellement la lumière de la chaleur. Mais il est loin d'en être ainsi : dans les cas qui deviennent de moins en moins nombreux, où la lumière seule n'agit pas sur nos instruments thermométriques, on peut légitimement attribuer cette apparente nullité d'action au peu de sensibilité des appareils de mesure. Il n'y a pas lieu, du reste, de s'en étonner, puisque nous savons, par les expériences de Melloni et de M. Tyndall, qu'en enlevant toute la lumière d'un faisceau nous ne diminuons que de très peu son énergie calorifique. En prenant la partie lumineuse seule, nous devons évidemment nous attendre à des effets extrêmement peu intenses. Mais, comme M. Tyndall l'a observé, on remarque de semblables effets avec des solutions d'alun, quoiqu'ils soient très faibles. En perfectionnant les instruments, la limite où l'action cesse est elle-même reculée; de sorte que si l'on se laisse guider, comme on doit le faire en physique expérimentale, par les règles ordinaires de l'induction, il faut poser en principe la proposition contraire, et dire : La lumière dilate les corps aussi bien que la chaleur.

Les deuxième, troisième et quatrième observations consignées dans la Note que j'examine, se réduisent à ceci, que la chaleur produit certains changements d'état, sans l'intervention de la lumière et sans que celle-ci puisse les produire; que, d'un autre côté, la lumière donne naissance à des réactions chimiques spéciales et indispensables au développement de la matière organique, phénomènes que le calorique seul est impuissant à réaliser; d'où résulte encore, suivant M. Baudrimont, une différence caractéristique entre les deux agents.

Étudions ces phénomènes, et tâchons de découvrir les conséquences qui en résultent.

Le chlorure d'argent ne noircit pas également sous l'influence des divers rayons du spectre solaire. L'action chimique des rayons rouges est nulle ou très faible, celle des rayons violets est au contraire extrêmement forte. De part et d'autre cependant, c'est de la lumière qui agit sur la substance; mais elle est composée de mouvements à longue période dans le premier cas, à courte période au contraire dans le second. Il faut donc considérer, quand on examine l'action chimique de la lumière, d'abord la nature de la substance impressionnée, ensuite l'espèce des mouvements vibratoires à l'influence desquels elle est soumise. Si l'on veut comparer les actions chimiques de la lumière et de la chaleur, ne faut-il pas avoir égard aux mêmes conditions? Un mélange de chlore et d'hydrogène détone sous l'influence de la lumière solaire, qui élève à peine sa température à 20° ou 25°, et ne détone pas si on le porte, par l'action directe de la chaleur, à une température beaucoup plus élevée que la première, à 50° ou 60° par exemple. Y a-t-il véritablement dans ce phénomène une objection à l'identité de la chaleur et de la lumière? Y a-t-il parité d'action dans les deux cas? Évidemment non : ce sont des mouvements d'ordres différents, qui, dans chacun d'eux, exercent leur action sur le mélange explosible. Il faudrait réellement, pour déduire de cet ordre de faits quelque conséquence applicable à la question qui nous occupe, comparer les effets produits par deux rayons de même réfrangibilité, ou plutôt par deux faisceaux de même réfrangibilité moyenne, émanés, l'un d'une source de lumière, l'autre d'une source de chaleur. Or, dans l'état actuel de nos connaissances expérimentales, nous savons qu'une source seulement calorifique émet des rayons dont l'indice est inférieur à ceux des divers rayons lumineux. Lorsque ces derniers apparaissent, la source devient lumineuse. Ainsi, en comparant les actions chimiques de la lumière et de la chaleur, on arrive à une conclusion plutôt favorable que contraire à l'identité.

Dans sa cinquième observation, M. Baudrimont affirme que deux rayons de même indice, l'un calorifique et l'autre lumineux, peuvent être séparés l'un de l'autre par l'absorption. J'avoue ne pas connaître l'expérience qui établit le fait ainsi énoncé. On peut

bien priver de sa partie lumineuse un faisceau émané d'une source de chaleur et de lumière séparé en ses divers éléments à l'aide d'un prisme de sel gemme. Mais trouve-t-on dans ce faisceau réfracté, après l'interposition du milieu absorbant, de la chaleur là où existait la partie lumineuse ? Nullement. En absorbant la lumière, on a aussi absorbé la chaleur correspondante. Les rayons de même indice n'ont donc pas été séparés ; on n'a fait qu'isoler ceux d'indices différents, le sulfure de carbone chargé d'iode se laissant traverser librement par les rayons les moins réfrangibles et arrêtant les autres ; mais ce phénomène est tout à fait différent du premier.

Parmi les autres assertions de la Note de M. Baudrimont, il s'en trouve une que je désire discuter avec quelques développements, parce que, de son exactitude ou de son inexactitude, dépend en effet la solution de l'intéressante question qui nous occupe.

Si la lumière et la chaleur sont dues au même mouvement, leurs vitesses de propagation dans le même lieu, dans le vide, par exemple, doivent être égales. La vitesse de la lumière a pu être évaluée directement ; si M. Baudrimont parvient, comme il l'espère, à mesurer celle de la chaleur, il aura certes rendu à la science un service signalé. Mais, jusqu'à ce que l'expérience ait prononcé, il me permettra d'examiner si dans l'état actuel de nos connaissances on doit regarder cette vitesse comme différente de celle de la lumière, et si tout ne porte pas au contraire à conclure, abstraction faite de toute idée préconçue sur l'identité ou la non-identité des deux agents, qu'elle est exactement la même.

Il est d'abord une propriété que l'on peut considérer comme bien établie par l'observation, c'est celle de l'égalité des longueurs d'onde de deux rayons calorifiques et lumineux concomitants. MM. Fizeau et Foucault, dans leurs belles et délicates expériences d'interférence et de diffraction de la chaleur, ont constamment trouvé que les franges chaudes et froides coïncident, autant du moins qu'ont permis de le vérifier les dimensions des thermomètres dont ils se servaient, avec les franges brillantes et obscures correspondantes. Je n'ai pas besoin de faire ressortir l'importance de ces expériences pour la discussion de la question en litige, importance d'autant plus grande qu'elles sont directes et que la longueur d'ondulation se déduit très simplement de la largeur des franges.

Les autres expériences des mêmes physiciens sur la différence de marche occasionnée par des lames cristallisées, celles de MM. Masson et Jamin, sur des phénomènes analogues et sur la rotation des plans de polarisation des faisceaux de chaleur par des plaques de quartz ou des substances actives, confirment les premières et conduisent à la même conséquence.

D'autres preuves, enfin, viennent s'ajouter à celles-ci. La quantité de lumière, réfléchie sous l'incidence normale par une lame transparente à faces parallèles, a pour expression

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$

n étant l'indice de réfraction de la substance. Les mesures de Melloni ont permis de déterminer très exactement cette quantité pour la chaleur dans le cas du sel gemme, et elles donnent le même nombre que pour la lumière : d'où résulte la conséquence que la valeur de l'indice est la même pour les deux espèces de rayons. Or, si l'on réfléchit que l'indice, c'est à dire le rapport des longueurs d'ondulation du rayon considéré dans le vide et dans le milieu, change avec la valeur absolue de la longueur d'onde elle-même, on ne peut s'empêcher de conclure que l'égalité des valeurs de n pour la lumière et la chaleur entraîne comme conséquence celle de chacun des termes du rapport, et par suite celle des longueurs d'onde dans le vide.

La réflexion sur les surfaces métalliques étant plus abondante que sur les substances transparentes, permet de donner une plus grande précision aux mesures thermométriques. MM. Masson et Jamin ont trouvé des nombres presque toujours identiques pour les proportions de lumière et de chaleur réfléchies par de telles surfaces, lorsque les rayons calorifiques et lumineux étaient pris dans les mêmes régions d'un spectre très pur. Dans ce cas encore comme dans le précédent, la réflexion dépend de la longueur d'onde du faisceau incident, et l'égalité des résultats de l'expérience pour les deux agents ne permet pas de mettre en doute l'égalité de leurs longueurs d'ondes.

Ce point étant bien acquis à la discussion, examinons les conséquences qui en résultent.

Si l'on représente par m le nombre des oscillations effectuées

dans l'unité de temps par une molécule vibrante, par v la vitesse de propagation du mouvement qui en résulte dans un milieu élastique, par l la longueur d'ondulation correspondante, on sait qu'on a entre ces trois éléments la relation

$$l = \frac{v}{m}.$$

Considérons, pour fixer les idées, deux rayons de lumière et de chaleur appartenant, par exemple, à la région rouge du spectre. l étant le même pour ces deux rayons, si v change de l'un à l'autre, on doit nécessairement admettre que m varie proportionnellement à v. Mais, d'une part, v est constant pour les divers rayons de lumière rouges, jaunes, verts, quoique m varie des uns aux autres. De plus, les mouvements lumineux accompagnent les mouvements calorifiques, leur succèdent d'une manière insensible, et sont du même ordre de grandeur. Comment se fait-il, si v est différent pour deux rayons de lumière et de chaleur de même réfrangibilité, que ces deux quantités v et m, entre lesquelles on n'aperçoit pas de relation nécessaire, augmentent ou diminuent exactement dans le même rapport? N'est-il pas, au contraire, plus probable que v a la même valeur pour les deux espèces de mouvements, surtout si l'on se rappelle que cette vitesse dépend non de ce qui se passe à l'origine, mais uniquement de la constitution du milieu dans lequel le mouvement se propage, c'est à dire de son élasticité et de sa densité?

Ces considérations me semblent décisives, et je regrette que mon savant collègue n'ait nullement parlé de cette égalité des longueurs d'ondes des deux espèces de rayons et des conséquences auxquelles elle conduit. Si l'on admet que la chaleur est due à un mouvement vibratoire, on doit nécessairement prendre pour guide dans l'étude de ce mouvement les résultats auxquels la même théorie, combinée avec l'observation, a conduit pour la lumière. Ce doit être là notre véritable fil conducteur. Comment expliquer alors dans l'hypothèse de la non-identité, je ne dis pas l'analogie des deux classes de phénomènes, mais l'égalité numérique des valeurs fournies par l'expérience dans les cas où nous pouvons répondre de l'exactitude de nos mesures?

Bordeaux, le 22 août 1865.

ÉTUDES GÉOMÉTRIQUES

SUR LA

THÉORIE DES PARALLÈLES

PAR N. I. LOBATSCHEWSKY

Conseiller d'Etat de l'Empire de Russie et Professeur à l'Université de Kasan;

TRADUIT DE L'ALLEMAND

PAR J. HOÜEL;

suivi d'un extrait de la Correspondance de Gauss et de Schumacher.

PRÉFACE DU TRADUCTEUR.

Le travail remarquable dont nous donnons ici la traduction n'a de commun que le titre avec les nombreuses élucubrations des auteurs qui, avant et après Legendre, se sont efforcés, sans beaucoup de succès, de démontrer *à priori* l'axiome XI d'Euclide, plus connu sous le nom impropre de *postulatum*.

Le but de l'auteur (¹) est, au contraire, de prouver qu'il n'existe *à priori* aucune raison d'affirmer que la somme des trois angles d'un triangle rectiligne ne soit pas inférieure à deux angles droits, ou, ce qui revient au même, qu'on ne puisse mener, par un point donné, qu'une seule droite ne rencontrant pas une droite donnée dans le même plan.

Cette question a été, pendant plus de cinquante ans, l'objet des méditations de Gauss, qui, dès 1792, était déjà en possession des vrais principes sur lesquels il a fondé une doctrine complète, appelée par lui *Géométrie non-euclidienne*. Malheureusement, il n'a jamais publié ses recherches, dont nous ne connaissons les résultats que par quelques notices dispersées dans les *Gelehrte*

(¹) N. I. Lobatschewsky, né à Nijnéi-Novogorod en 1793, mort à Kasan en 1856.

Anzeigen de Gœttingue, et par quelques passages de sa *Correspondance* avec Schumacher, éditée récemment par M. Peters. Lorsqu'il eut connaissance des travaux de Lobatschewsky (commencés en 1829 et continués jusqu'en 1855) et de J. Bolyai (1832), il fit alors ce qu'il avait fait lorsque Abel et Jacobi eurent retrouvé, par leurs propres efforts, ses résultats inédits, relatifs aux transcendantes elliptiques. Il renonça à la propriété de ses découvertes, et se contenta de donner son adhésion complète à la *Géométrie imaginaire* de Lobatschewsky, dont il trouvait seulement la dénomination mal choisie.

Malgré la haute valeur de ces recherches, elles n'ont attiré jusqu'ici l'attention d'aucun géomètre, ce qui ne fût pas arrivé si Gauss les eût communiquées lui-même aux savants, ou si, du moins, il les eût prises publiquement sous son patronage. Nous ne croyons pas cependant en exagérer la portée philosophique, en disant qu'elles jettent un jour tout nouveau sur les principes fondamentaux de la géométrie, et qu'elles ouvrent une voie encore inexplorée, pouvant conduire à des découvertes inattendues. Pour ne pas sortir de la question élémentaire, on ne peut nier qu'elles ne fassent faire un progrès immense aux méthodes d'enseignement, en reléguant parmi les chimères l'espoir que nourrissent encore tant de géomètres de parvenir à démontrer l'axiome d'Euclide autrement que par l'*expérience*. Désormais ces tentatives devront être mises au même rang que la quadrature du cercle et le mouvement perpétuel.

Nous croyons rendre service aux auteurs de Traités classiques (¹), en mettant sous leurs yeux une traduction française d'un opuscule peu connu de Lobatschewsky (²), dans lequel la *Géométrie imaginaire* est établie en partant des premières propositions d'Euclide. Nous allons donner une idée du contenu de cet ouvrage.

Après avoir rappelé les principes connus sur lesquels il s'ap-

---

(¹) M. Richard Baltzer, dans la seconde édition de ses excellents *Éléments de Géométrie*, a, le premier, introduit ces notions exactes à la place qu'elles doivent occuper.

(²) *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, von Nicolaus Lobatschewsky, kaiserl. russ. wirkl. Staatsrath und ordentl. Prof. der Mathematik bei der Universität Kasan*. Berlin, 1840 (in-18, 61 pages).

puiera, l'auteur pose une définition des parallèles, plus générale que la définition ordinaire, et se réduisant à celle-ci, lorsqu'on admet l'axiome XI d'Euclide. Il démontre ensuite diverses propositions, dont une partie étaient connues de Legendre :

La somme des angles d'un triangle rectiligne ne peut surpasser deux angles droits.

S'il existe un seul triangle rectiligne dans lequel la somme des angles soit égale à deux angles droits, cette somme sera aussi égale à deux angles droits dans tous les autres triangles rectilignes.

Si deux perpendiculaires à une même droite sont PARALLÈLES (dans l'acception généralisée du mot), *la somme des angles d'un triangle rectiligne quelconque est égale à deux angles droits.*

Etc.

Puis il établit, indépendamment de l'axiome d'Euclide, les principales propositions de la géométrie de la sphère. Enfin, il considère le cercle et la sphère dans le cas où le centre s'éloigne à l'infini, et où les rayons deviennent parallèles. On démontre dans ce cas que la somme des angles dièdres d'un angle trièdre dont les arêtes sont *parallèles*, est égale à deux angles droits. Par suite, dans les triangles sphériques tracés sur la sphère infiniment grande, il existe entre les angles et les côtés les mêmes relations que celles que la Géométrie ordinaire établit pour les triangles rectilignes.

De la trigonométrie de la sphère infinie, on passe à la trigonométrie de la sphère finie et à celle du plan. La trigonométrie sphérique est absolument la même dans la *Géométrie imaginaire* que dans la Géométrie ordinaire. La trigonométrie plane, au contraire, est essentiellement différente dans les deux systèmes. Ses formules, dans la *Géométrie imaginaire,* coïncident avec celles de la Géométrie ordinaire pour les triangles infiniment petits, comme cela a lieu pour celles de la trigonométrie sphérique. Pour des triangles de grandeur finie, elles se déduisent de celles de la trigonométrie sphérique, en y donnant aux côtés des triangles des valeurs imaginaires.

On peut résumer comme il suit l'ensemble des propositions de la Géométrie élémentaire qui ne dépendent pas de l'axiome XI (1) :

---

(1) Bolyai : *Kurzer Grundriss eines Versuchs* u. s. w., § 32.

Égalité des triangles. A des côtés égaux (ou inégaux) sont opposés des angles égaux (ou inégaux dans le même sens), et réciproquement. Relations entre les angles formés dans un plan tout autour d'un point, ou d'un même côté d'une droite, avec les réciproques. L'angle extérieur à un triangle est plus grand que chacun des intérieurs non adjacents. Élever ou abaisser une perpendiculaire. On n'en peut abaisser qu'une d'un point sur une droite. Cette perpendiculaire est la droite la plus courte. Partager une droite ou un angle en deux parties égales. Construire un triangle (ou un angle) égal à un triangle (ou à un angle) donné. Une droite peut avoir deux points communs avec un cercle, et pas plus. Trois points d'un cercle étant donnés, trouver son centre. Principales propriétés des cordes et des tangentes. Possibilité des polygones réguliers; construction des seuls polygones de 4, 8, 16,... côtés. Deux cercles ne peuvent avoir plus de deux points communs sans coïncider. La plupart de ces propositions ont leurs analogues dans la géométrie de la sphère, laquelle est tout entière indépendante de l'axiome XI.

Mais on ne peut plus, sans cet axiome, établir la théorie de la similitude, ni partager une droite en trois parties égales, ni calculer la grandeur de l'angle d'un polygone régulier. On peut faire passer un cercle par trois points donnés sur une sphère; mais on ne peut pas le faire passer par trois points donnés d'une manière quelconque sur un plan. Si trois points quelconques non en ligne droite pouvaient être placés sur une sphère, l'axiome XI d'Euclide serait démontré. Calcul de l'aire de la sphère.

Nous recommanderons spécialement aux lecteurs qui voudront entrer pleinement dans la pensée de Lobatschewsky, de s'y préparer par la méditation approfondie des vingt-huit premières propositions du premier livre d'Euclide, en faisant table rase de tout ce que l'on a écrit depuis sur ce sujet.

J. H.

ERRATA.

Page 111, ligne 4, *au lieu de* $\Pi(a')$, *lisez* $\Pi(\alpha')$.
— 112, — 12, — [prop. 32], *lisez* [prop. 33].
— 128, — 4, — reçues, *lisez* reçus.

ÉTUDES GÉOMÉTRIQUES

SUR LA

THÉORIE DES PARALLÈLES

Quelques-unes des théories de la géométrie élémentaire laissent encore beaucoup à désirer, et c'est à leur imperfection, je crois, qu'il faut attribuer le peu de progrès que cette science, en dehors des applications de l'analyse, a pu réaliser depuis Euclide.

Je compte parmi ces points défectueux l'obscurité qui règne sur les premières notions des grandeurs géométriques et sur la manière dont on se représente la mesure de ces grandeurs, ainsi que l'importante lacune que présente la théorie des parallèles, et que les travaux des géomètres n'ont encore pu combler. Les efforts de Legendre n'ont rien ajouté à cette théorie, cet auteur ayant été forcé de quitter la voie du raisonnement rigoureux pour se jeter dans des considérations détournées, et de recourir à des principes qu'il cherche, sans raison suffisante, à faire passer pour des axiomes nécessaires.

Mon premier essai sur les fondements de la géométrie a paru dans le *Courrier de Kasan*, pour l'année 1829. Désirant satisfaire à toutes les exigences des lecteurs, je me suis occupé ensuite de la rédaction de l'ensemble de cette science, et j'ai publié mon travail par parties dans les *Mémoires de l'Université de Kasan*, pour les années 1836, 1837 et 1838, sous le titre de *Nouveaux principes de Géométrie, avec une théorie complète des parallèles*. L'étendue de ce travail a peut-être empêché mes compatriotes de suivre cette étude, qui, depuis Legendre, semblait avoir perdu son intérêt. Je

n'en persiste pas moins à croire que la théorie des parallèles conserve toujours ses droits à l'attention des géomètres, et c'est pour cela que je me propose d'exposer ici ce qu'il y a d'essentiel dans mes recherches, en faisant d'abord remarquer, contrairement à l'opinion de Legendre, que les autres imperfections de principes, telles que la définition de la ligne droite, ne doivent point nous occuper ici, et sont sans aucune influence sur la théorie des parallèles.

Pour ne pas fatiguer le lecteur par une multitude de propositions dont les démonstrations n'offrent aucune difficulté, j'indiquerai seulement ici celles dont la connaissance est nécessaire pour ce qui va suivre.

---

1. *Une ligne droite se superpose à elle-même dans toutes ses positions.* J'entends par là que, si l'on fait tourner autour de deux points de la ligne droite la surface qui la contient, cette ligne ne change pas de place.

2. Deux lignes droites ne peuvent se couper en deux points.

3. Une ligne droite, suffisamment prolongée dans les deux sens, pourra dépasser toute limite, et partagera ainsi en deux parties toute portion de plan limitée.

4. Deux lignes droites perpendiculaires à une troisième, et situées dans un même plan que cette troisième, ne peuvent se couper, quelque loin qu'on les prolonge.

5. Une ligne droite coupera toujours une autre droite, lorsqu'elle aura des points situés de part et d'autre de celle-ci.

6. Des angles opposés par le sommet et ayant leurs côtés situés sur les prolongements les uns des autres sont égaux. Cette proposition est vraie aussi pour les angles dièdres.

7. Deux lignes droites ne peuvent se couper, lorsqu'elles sont coupées par une troisième sous des angles égaux.

8. Dans un triangle rectiligne, à des côtés égaux sont opposés des angles égaux, et réciproquement.

9. Dans un triangle rectiligne, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est plus grande que chacun des côtés de l'angle droit, et les deux angles adjacents à l'hypoténuse sont aigus.

10. Deux triangles rectilignes sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et deux angles égaux, ou deux côtés égaux comprenant un angle égal, ou deux côtés égaux et l'angle opposé au plus grand de ces deux côtés égal, ou enfin les trois côtés égaux.

11. Une droite perpendiculaire à deux autres droites situées dans un plan qui ne la contient pas est perpendiculaire à toute autre droite menée par son pied dans ce plan.

12. L'intersection d'une sphère avec un plan est un cercle.

13. Une droite perpendiculaire à l'intersection de deux plans perpendiculaires entre eux, et située dans l'un de ces deux plans, est perpendiculaire à l'autre.

14. Dans un triangle sphérique, à des côtés égaux sont opposés des angles égaux, et réciproquement.

15. Deux triangles sphériques sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés égaux comprenant un angle égal, ou bien un côté égal adjacent à deux angles égaux.

Les propositions que nous donnerons dans ce qui va suivre seront accompagnées de leurs explications et de leurs démonstrations.

16. Toutes les droites tracées par un même point dans un plan peuvent se distribuer, par rapport à une droite donnée dans ce plan, en deux classes, savoir : en droites *qui coupent* la droite donnée, et en droites *qui ne la coupent pas*. La droite qui forme la *limite* commune de ces deux classes est dite *parallèle* à la droite donnée.

Soit abaissée, du point A (*fig.* 1), sur la droite BC, la perpendiculaire AD, et soit élevée au point A, sur la droite AD, la perpendiculaire AE. Dans l'angle droit EAD, il arrivera ou que toutes les droites partant du point A rencontreront la droite DC, comme le fait AF, par exemple; ou bien que quelques-unes d'entre elles, comme la perpendiculaire AE, ne rencontreront pas DC. Dans l'incertitude si la perpendiculaire AE est la seule droite qui ne rencontre pas DC, nous admettrons la possibilité qu'il existe encore d'autres lignes, telles que AG, qui ne coupent pas DC, quelque loin qu'on les prolonge. En passant des lignes AF, qui coupent CD, aux lignes AG, qui ne coupent pas CD, on trouvera nécessairement une ligne AH, parallèle à DC, c'est-à-dire une ligne d'un côté de laquelle les lignes AG ne rencontrent aucune la ligne CD, tandis que, de l'autre côté, toutes les lignes AF rencontrent CD. L'angle HAD, compris entre la parallèle HA et la perpendiculaire AD, sera dit *l'angle de parallélisme,* et nous le désignerons par $\Pi(p)$, p représentant la distance AD.

Fig. 1.



Si $\Pi(p)$ est un angle droit, le prolongement AE' de la perpendiculaire AE sera également parallèle au prolongement DB de la droite DC; et nous ferons remarquer, à ce propos, que, par rapport aux quatre angles formés au point A par les perpendiculaires AE, AD et par leurs prolongements AE', AD', toute droite partant du point A est comprise, soit par elle-même, soit par son prolongement, dans un des deux angles droits dirigés vers BC, de sorte qu'à l'exception de la seule parallèle EE', toutes ces droites, prolongées suffisamment dans les deux sens, devront couper la droite BC.

Si l'on a $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$, alors, de l'autre côté de AD, il y aura une autre droite AK, faisant avec AD le même angle DAK $= \Pi(p)$, laquelle sera parallèle au prolongement DB de la ligne DC; de sorte que, dans cette hypothèse, il faut distinguer encore le *sens du parallélisme.* Toutes les autres droites comprises dans l'intérieur des deux angles droits dirigés vers BC appartiennent aux droites *sécantes,* lorsqu'elles sont situées dans l'angle HAK $= 2\,\Pi(p)$ des

deux parallèles; elles appartiennent, au contraire, aux droites *non sécantes* AG, lorsqu'elles sont situées de l'autre côté des parallèles AH, AK, à l'intérieur des deux angles EAH $= \frac{\pi}{2} - \Pi(p)$, E'AK $= \frac{\pi}{2} - \Pi(p)$, entre les parallèles et la droite EE', perpendiculaire sur AD. De l'autre côté de la perpendiculaire EE', les prolongements AH', AK' des parallèles AH, AK seront également parallèles à BC. Parmi les autres droites, celles qui sont dans l'angle K'AH' appartiendront aux droites sécantes, celles qui sont dans les angles K'AE, H'AE', aux droites non sécantes.

D'après cela, si l'on suppose $\Pi(p) = \frac{\pi}{2}$, les droites ne pourront être que sécantes ou parallèles. Mais, si l'on admet que $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$, on devra considérer alors deux parallèles, l'une dans un sens, l'autre dans le sens opposé; de plus, les autres droites devront se distinguer en *non sécantes* et en *sécantes*. Dans les deux hypothèses, le caractère du parallélisme est que la ligne devient sécante par la moindre déviation vers le côté où est située la parallèle; de sorte que, si AH est parallèle à DC, toute ligne AF, faisant, du côté de DC, un angle HAF aussi petit que l'on voudra avec AH, coupera nécessairement DC.

17. *Une ligne droite conserve le caractère du parallélisme en tous ses points.*

Soit AB (*fig.* 2) parallèle à CD, et AC perpendiculaire sur CD. Considérons deux points pris à volonté sur la ligne AB et sur son prolongement au delà de la perpendiculaire. Supposons le point E situé, par rapport à la perpendiculaire, du même côté que celle des directions de AB qui est considérée comme parallèle à CD. Abaissons du point E sur CD la perpendiculaire EK, et menons ensuite EF de manière qu'elle tombe à l'intérieur de l'angle BEK. Joignons les points A et F par une droite, dont le prolongement devra rencontrer CD quelque part en G [prop. 16]. Nous

Fig. 2.

obtiendrons ainsi un triangle ACG, dans l'intérieur duquel pénétrera la ligne EF. Cette dernière ligne, ne pouvant rencontrer AC, par suite de la construction, et ne pouvant pas non plus rencontrer AG ni EK pour la seconde fois [prop. 2], coupera nécessairement CD quelque part, en H [prop. 3].

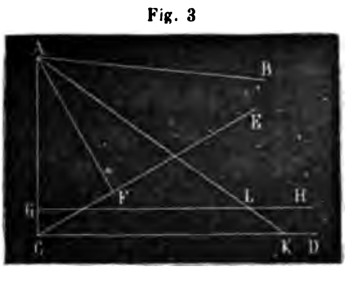
Soit maintenant E' un point sur le prolongement de AB, et E'K' une perpendiculaire abaissée sur le prolongement de CD. Menons la ligne E'F', faisant avec AE' un angle AE'F' assez petit pour couper AC quelque part en F'. Tirons du point A la ligne AF, faisant avec AB un angle égal à AE'F', et dont le prolongement coupera CD en G [prop. 16]. On formera ainsi un triangle AGC, dans lequel pénétrera le prolongement de la ligne E'F'. Or, cette ligne ne peut pas rencontrer une seconde fois AE; elle ne peut pas non plus couper AG, puisque l'angle BAG = BE'G' [prop. 7]. Il faudra donc qu'elle rencontre CD quelque part en G'.

Donc, quels que soient les points E, E', d'où partent les lignes EF, E'F', et quelque peu qu'elles s'écartent de la ligne AB, elles couperont toujours la ligne CD, à laquelle AB est parallèle.

18. *Deux droites sont toujours réciproquement parallèles.*

Soit AC (*fig.* 3) une perpendiculaire sur CD, et AB une parallèle à CD. Menons par le point C la ligne CE, faisant avec CD un angle aigu quelconque ECD, et abaissons du point A sur CE la perpendiculaire AF. Nous formerons ainsi un triangle rectangle ACF, dont l'hypoténuse AC sera plus grande que le côté AF de l'angle droit [prop. 9]. Faisons AG = AF, et plaçons AF sur AG; AB et FC prendront les positions AK et GH, de sorte que l'on aura l'angle BAK = FAC. Il faudra alors que AK coupe la droite DC quelque part en K [prop. 16], et il en résultera un triangle AKC, dans lequel la perpendiculaire GH rencontrera la ligne AK en L [prop. 3], et déterminera par là la distance AL du point A au point de rencontre de la ligne CE avec AB.

Fig. 3

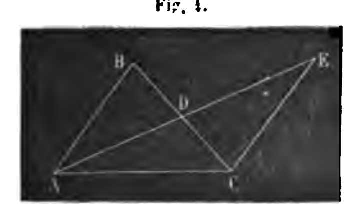


De là résulte que CE coupera toujours AB, quelque petit que soit l'angle ECD. Donc CD est parallèle à AB [prop. 16].

19. ***Dans tout triangle rectiligne, la somme des trois angles ne peut surpasser deux angles droits.***

Supposons que, dans le triangle ABC (*fig.* 4), la somme des trois angles soit $\pi + \alpha$. Dans le cas où les côtés sont inégaux, soit BC le plus petit. Partageons BC en deux parties égales au point D; par A et D, menons la droite AD, sur le prolongement de laquelle nous prendrons DE = AD; joignons, enfin, le point E au point C par la droite EC. Dans les deux triangles égaux ADB, CDE, on a l'angle ABD = DCE, et l'angle BAD = DEC [prop. 6 et 10]. De là résulte que la somme des trois angles du triangle ACE doit être aussi égale à $\pi + \alpha$. En outre, le plus petit angle BAC [prop. 9] du triangle ABC a passé dans le triangle ACE, où il se trouve partagé en deux parties EAC, AEC. En continuant de la même manière à partager toujours en deux parties égales le côté opposé au plus petit angle, on finira nécessairement par obtenir un triangle dans lequel la somme des trois angles sera $\pi + \alpha$, mais où il se trouvera deux angles dont chacun sera moindre, en valeur absolue, que $\frac{1}{2}\alpha$. Or, le troisième angle ne pouvant être plus grand que π, il faut donc que α soit nul ou négatif.

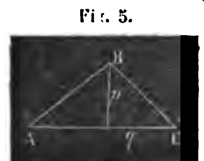
Fig. 4.



20. *Si, dans un triangle rectiligne quelconque, la somme des trois angles est égale à deux angles droits, il en sera de même pour tout autre triangle.*

Supposons que dans le triangle rectiligne ABC (*fig.* 5) la somme des trois angles soit égale à π; deux au moins de ces angles, A et C, devront être aigus. Abaissons, du sommet du troisième angle B, la perpendiculaire p sur le côté opposé AC : cette perpendiculaire partagera le triangle ABC en deux triangles rectangles, dans chacun desquels la somme des trois angles devra encore être égale à π, sans quoi elle serait dans l'un de ces deux triangles plus grande que π, ou dans le triangle total plus petite que π. On obtiendra donc ainsi un triangle rectangle, dont les côtés de l'angle droit seront p et q, et au moyen duquel on pourra former un quadrilatère dont les

Fig. 5.



côtés opposés seront égaux entre eux, et dont les côtés adjacents p et q (*fig.* 6) seront perpendiculaires l'un à l'autre. Par la répétition de ce quadrilatère, on pourra en former un pareil dont les côtés seront np et q, et enfin un autre ABCD, ayant ses côtés perpendiculaires entre eux, et dans lequel $AB = np$, $AD = mq$, $DC = np$, $BC = mq$, m et n étant des nombres entiers quelconques. Ce quadrilatère sera divisé par la diagonale BD en deux triangles rectangles égaux, BAD, BCD, dans chacun desquels la somme des trois angles est égale à π. Or, on peut prendre les nombres n et m assez grands pour que le triangle rectangle ABC (*fig.* 7), dont les côtés de l'angle droit sont $AB = np$, $BC = mq$, renferme dans son intérieur tout autre triangle rectangle donné BDE, lorsqu'on aura fait coïncider leurs angles droits. En menant la ligne DC, on obtient ainsi des triangles rectangles ayant deux à deux un côté commun. Le triangle ABC est formé par la réunion des deux triangles ACD, DCB, dans chacun desquels la somme des trois angles ne peut surpasser π; elle doit donc être, pour chacun, égale à π, sans quoi elle ne serait pas égale à π dans le triangle total. De même, le triangle BDC se compose des deux triangles DEC, DBE, d'où il s'ensuit que dans DBE la somme des trois angles doit être égale à π. Cela doit donc avoir lieu, en général, pour un triangle quelconque, puisque tout triangle peut être décomposé en deux triangles rectangles.

Fig. 6.

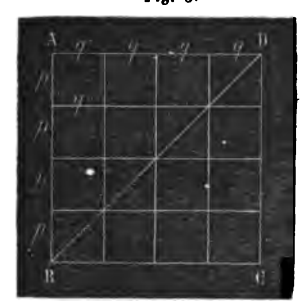
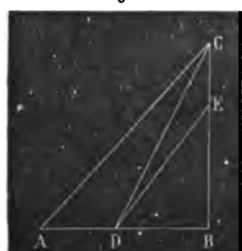


Fig. 7.



On conclut de là que deux hypothèses seulement sont possibles : ou la somme des trois angles est égale à π dans tous les triangles rectilignes, ou bien elle est dans tous moindre que π.

21. *Par un point donné, on peut toujours mener une ligne droite qui fasse avec une droite donnée un angle aussi petit que l'on voudra.*

Abaissons, du point donné A (*fig.* 8) sur la droite donnée BC,

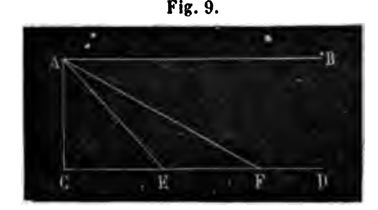
la perpendiculaire AB; prenons à volonté sur BC un point D; joignons AD; faisons DE = AD, et menons AE. Dans le triangle rectangle ABD, soit l'angle ADB = α; l'angle AED du triangle isoscèle ADE sera égal à $\frac{1}{2}\alpha$ ou $< \frac{1}{2}\alpha$ [prop. 8 et 20]. En continuant ainsi, on parviendra, à la fin, à un angle AEB, plus petit que tout angle donné.

Fig. 8.

22. *Si deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles, la somme des angles d'un triangle rectiligne quelconque sera égale à π.*

Soient les droites AB, CD (*fig.* 9), parallèles entre elles, et perpendiculaires sur AC. Menons du point A les droites AE, AF, aux points E, F, pris sur la droite CD à des distances quelconques, FC > EC, du point C. En supposant que la somme des trois angles soit égale à $\pi - \alpha$ dans le triangle rectangle ACE, et à $\pi - \beta$ dans le triangle AEF, elle devra être égale, dans le triangle ACF, à $\pi - \alpha - \beta$, α et β ne pouvant être négatifs. Soient, de plus, les angles BAF = a, AFC = b; on aura $\alpha + \beta = a - b$. Si l'on écarte maintenant la ligne AF de la perpendiculaire AC, on pourra rendre aussi petit que l'on voudra l'angle a, compris entre AF et la parallèle AB; on pourra de même diminuer l'angle b indéfiniment. Par conséquent, les deux angles α et β ne peuvent avoir d'autres valeurs que $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

Fig. 9.



D'après cela, il faut que, dans tous les triangles rectilignes, la somme des trois angles soit égale à π, et qu'en même temps l'angle de parallélisme $\Pi(p)$ soit égal à $\frac{1}{2}\pi$, quelle que soit la distance p; ou bien il faut que, dans tous les triangles, la somme des angles soit $< \pi$, et qu'on ait à même temps $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$.

La première hypothèse sert de fondement à la *Géométrie ordinaire* et à la *Trigonométrie plane*. La seconde hypothèse peut être également admise, sans conduire à aucune espèce de contradiction

dans les résultats, et elle est la base d'une nouvelle théorie géométrique, à laquelle j'ai donné le nom de *Géométrie imaginaire*, et que je me propose d'établir ici jusqu'au développement des équations entre les angles et les côtés des triangles tant rectilignes que sphériques.

23. *Étant donné un angle quelconque α, on peut toujours trouver une distance p telle que l'on ait $\Pi(p) = \alpha$.*

Soient AB et AC (*fig.* 10) deux droites formant, à leur intersection A, l'angle aigu α. Prenons à volonté sur AB un point B'; de ce point abaissons B'A' perpendiculaire sur AC; faisons A'A" = AA'; élevons en A" la perpendiculaire A"B", et continuons ainsi jusqu'à ce que nous arrivions à une perpendiculaire CD, qui ne rencontre plus AB. C'est ce qui doit nécessairement arriver; car, si la somme des trois angles du triangle AA'B' est égale à $\pi - a$, cette somme, dans le triangle AB'A", sera égale à $\pi - 2a$; dans le triangle AA"B", elle sera moindre que $\pi - 2a$ [prop. 20], et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'enfin elle devienne négative, auquel cas il serait impossible de former un triangle. La perpendiculaire CD pourrait être celle-là même qui forme la limite entre les perpendiculaires plus voisines du point A qui rencontrent AB, et les perpendiculaires plus éloignées qui ne le rencontrent pas. Dans tous les cas, il doit exister une telle perpendiculaire-limite FG, lorsqu'on passe des perpendiculaires sécantes aux perpendiculaires non sécantes. Menons maintenant par le point F la droite FH faisant avec FG l'angle aigu HFG, et située, par rapport à FG, du même côté que le point A. D'un point quelconque H de la droite FH abaissons sur AC la perpendiculaire HK, dont le prolongement devra par suite rencontrer AB quelque part en B, et former ainsi un triangle AKB, dans lequel pénétrera le prolongement de la ligne FH; ce prolongement rencontrera donc quelque part en M l'hypoténuse AB. L'angle GFH

Fig. 10.

étant arbitraire, et pouvant être supposé aussi petit que l'on voudra, FG sera donc parallèle à AB, et l'on aura $AF = p$ [prop. 16 et 18].

On voit aisément que, lorsque p diminue, l'angle α croît, et qu'il s'approche de $\frac{\pi}{2}$, lorsque p tend vers zéro. Au contraire, lorsque p croît, l'angle α diminue, et il s'approche de plus en plus de 0, à mesure que p tend vers ∞. Comme on peut choisir arbitrairement l'angle que l'on désignera par la notation $\Pi(p)$, lorsque p sera exprimé par un nombre négatif, nous poserons la relation

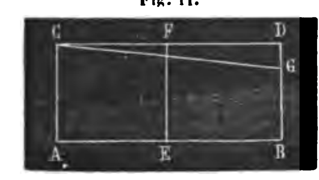
$$\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi,$$

relation qui aura lieu pour toutes les valeurs, tant positives que négatives, de p, aussi bien que pour $p = 0$.

24. *Si l'on prolonge de plus en plus loin deux lignes parallèles dans le sens de leur parallélisme, elles s'approcheront de plus en plus l'une de l'autre.*

Élevons sur la ligne AB (*fig.* 11) deux perpendiculaires $AC = BD$, et joignons leurs extrémités C et D par une droite. Le quadrilatère CABD aura, en A et en B, deux angles droits, et en C et en D deux angles aigus [prop. 22], lesquels seront égaux entre eux, comme il est aisé de s'en convaincre, si l'on imagine le quadrilatère superposé à lui-même, en plaçant la ligne BD sur AC, et la ligne AC sur BD. Partageons AB en deux parties égales, et au point milieu E élevons sur AB la perpendiculaire EF, laquelle devra être en même temps perpendiculaire sur CD, puisque les quadrilatères CAEF, FEBD coïncideront l'un avec l'autre, si l'on plie la figure totale autour de FE. Donc la ligne CD ne peut être parallèle à la ligne AB; mais la parallèle à AB menée par le point C, savoir la ligne CG, devra s'écarter de CD vers AB [prop. 16], et retranchera de la perpendiculaire BD une portion $BG < CA$. Le point C étant pris à volonté sur la ligne CG, il en résulte que CG s'approchera d'autant plus de AB, qu'on la prolongera plus loin.

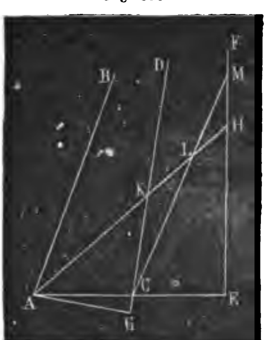
Fig. 11.



25. *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

Supposons d'abord que les trois droites AB, CD, EF (*fig.* 12), soient situées dans un même plan et se succèdent dans l'ordre indiqué. Si les deux premières AB et CD sont parallèles chacune à la troisième EF, je dis que AB et CD seront aussi parallèles entre elles. Pour le démontrer, d'un point quelconque A de la ligne extrême AB, abaissons sur l'autre ligne extrême EF la perpendiculaire AE, laquelle rencontrera la ligne intermédiaire CD en un point C [prop. 3], et sous un angle DCE $< \frac{1}{2}\pi$ dans le sens de la direction de CD, qui est parallèle à la direction EF [prop. 22]. Une perpendiculaire AG, abaissée du même point sur CD, devra tomber dans l'ouverture de l'angle aigu ACG [prop. 9], et toute autre ligne AH, menée par A dans l'intérieur de l'angle BAC, devra rencontrer quelque part en H la droite EF parallèle à AB. Par conséquent, dans le triangle AEH, la ligne CD devra couper AH quelque part en K, puisqu'il est impossible qu'elle rencontre EF. Si AH était menée du point A dans l'intérieur de l'angle CAG, elle devrait couper le prolongement de CD entre les points C et G, dans le triangle CAG. De là résulte que AB et CD sont parallèles [prop. 16 et 18].

Fig. 12.



Si les deux lignes extrêmes AB, EF, sont supposées chacune parallèles à la ligne intermédiaire CD, alors toute ligne AK, menée par le point A dans l'intérieur de l'angle BAE, coupera la ligne CD en un point quelconque K, quelque petit que soit l'angle BAK. Sur le prolongement de AK, prenons à volonté un point L, et joignons-le au point C par la ligne CL; celle-ci devra rencontrer EF quelque part en M, de manière à former un triangle MCE. Le prolongement de la ligne AL à l'intérieur du triangle MCE ne peut rencontrer une seconde fois ni AC ni CM; donc ce prolongement rencontrera EF quelque part en H, et par conséquent AB et EF sont parallèles entre elles.

Supposons maintenant que les parallèles AB, CD (*fig.* 13), soient situées dans deux plans dont l'intersection soit EF. D'un point

quelconque E de cette intersection, abaissons une perpendiculaire EA sur l'une quelconque AB des deux parallèles; puis, du pied A de la perpendiculaire EA, abaissons une nouvelle perpendiculaire sur l'autre parallèle CD, et joignons les extrémités E et C des deux perpendiculaires par la ligne EC. L'angle BAC doit être aigu [prop. 22]; donc une perpendiculaire CG, abaissée du point C sur AB, tombera en un point G, situé, par rapport à CA, du même côté que la direction suivant laquelle AB et CD sont considérées comme parallèles. Toute ligne EH, s'écartant si peu que ce soit de EF, appartiendra, avec la ligne EC, à un plan qui devra couper le plan des deux parallèles AB, CD le long d'une ligne quelconque CH. Cette dernière ligne rencontrera AB quelque part, et ce sera au même point H, commun aux trois plans, et par lequel la ligne EH devra aussi nécessairement passer. Donc EF est parallèle à AB. On demontrera de la même manière le parallélisme de EF et de CD.

Fig. 13.

La supposition qu'une ligne EF est parallèle à l'une des deux autres droites parallèles entre elles AB, CD, revient donc à considérer EF comme l'intersection de deux plans contenant les deux parallèles AB, CD; par conséquent, deux lignes sont parallèles entre elles, lorsqu'elles sont parallèles à une même troisième, bien qu'elles ne soient pas situées toutes les trois dans un même plan. Ce dernier théorème peut encore s'énoncer de la manière suivante : *Les intersections de trois plans deux à deux sont trois droites parallèles entre elles, toutes les fois que l'on suppose le parallélisme de deux de ces droites.*

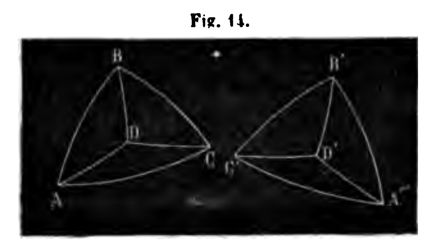
26. *Deux triangles opposés sur la surface de la sphère ont même surface.*

Nous entendons ici par *triangles opposés* ceux qui sont formés par les intersections de la surface sphérique avec les trois mêmes plans, de part et d'autre du centre. Dans ces triangles, les côtés et les angles ont donc deux à deux une direction opposée.

Dans les triangles opposés ABC, A'B'C' (*fig.* 14, où l'un de ces triangles doit être considéré comme *retourné*), on a entre les côtés

les égalités AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A', et les angles en A,B,C sont égaux à leurs correspondants en A',B',C', dans l'autre triangle. Par les trois points A,B,C imaginons que l'on mène un plan, et que sur ce plan l'on abaisse du centre de la sphère une perpendiculaire, dont les prolongements dans les deux sens rencontrent les deux triangles opposés aux points D et D' de la surface sphérique. Les distances du point D aux points A, B, C, mesurées sur la sphère en arcs de grands cercles, devront être égales [prop. 12], tant entre elles qu'aux distances D'A', D'B', D'C', dans l'autre triangle [prop. 6]. Donc les triangles isoscèles formés autour des points D et D' seront égaux deux à deux dans les deux triangles sphériques ABC, A'B'C'.

Fig. 14.

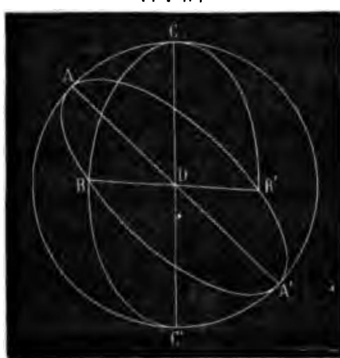


Nous prendrons pour caractère général de l'équivalence de deux surfaces la définition suivante : *Deux surfaces sont* ÉQUIVALENTES, *lorsqu'elles sont formées par l'addition ou la soustraction de parties* ÉGALES.

27. *Un angle trièdre est égal à la demi-somme de ses angles dièdres, moins un angle droit.*

Dans le triangle sphérique ABC (*fig.* 15), dont chaque côté est moindre que π, désignons les angles par A,B,C; prolongeons le côté AB, de manière à former le cercle entier ABA B'A, lequel partagera la sphère en deux parties égales. Dans l'hémisphère qui contiendra le triangle ABC, prolongeons encore les deux autres côtés au delà de leur intersection mutuelle C, jusqu'à leur rencontre avec le cercle en A' et en B'. L'hémisphère se trouvera partagé ainsi en quatre triangles ABC, ACB', B'CA', A'CB, dont nous désignerons les surfaces par P, X, Y, Z. Il est évident que l'on a

Fig. 15.



$$P + X = B, \qquad P + Z = A.$$

La surface du triangle sphérique Y est équivalente à celle du triangle opposé ABC′, qui a le côté AB commun avec le triangle P, et dont le troisième sommet C′ est situé à l'autre extrémité du diamètre CD de la sphère, mené par le point C [prop. 26]. De là résulte

$$P + Y = C,$$

et comme d'ailleurs

$$P + X + Y + Z = \pi,$$

il s'ensuit que l'on a

$$P = \frac{1}{2}(A + B + C - \pi).$$

On peut encore arriver à la même conclusion d'une autre manière, en s'appuyant seulement sur le théorème que nous avons démontré relativement à l'équivalence des surfaces [prop. 26].

Dans le triangle sphérique ABC (*fig.* 16), menons, par les milieux D,E des côtés AB, BC, le grand cercle FDEG, sur lequel nous abaisserons, des points A, B, C, les arcs perpendiculaires AF, BH, CG. Si l'arc perpendiculaire BH tombe entre D et E, le triangle résultant BDH sera égal à AFD, et le triangle BHE égal à EGC [prop. 6 et 15], d'où il résulte que la surface du triangle ABC est équivalente à celle du quadrilatère AFGC [prop. 26]. Si le point H coïncide avec le milieu E du côté BC (*fig.* 17), il n'y aura plus que deux triangles rectangles égaux AFD, BDE, par l'échange desquels on démontrera l'équivalence du triangle ABC et du quadrilatère AFEC. Si enfin le point H tombe en dehors du triangle ABC (*fig.* 18), la perpendiculaire CG pénétrant alors dans le triangle, on passera du triangle ABC au quadrilatère AFGC, en ajoutant le triangle FAD = DBH, et retranchant ensuite le triangle CGE = EBH. Imaginons maintenant que, dans le quadrilatère sphérique AFGC, on mène par les points A et G, ainsi que par les points F et C, des arcs de grands cercles, ces arcs AG, FC, seront égaux entre eux [prop. 15] : donc les triangles FAC, ACG seront aussi égaux [prop. 15], et l'angle FAC sera égal à l'angle ACG.

Fig. 16.

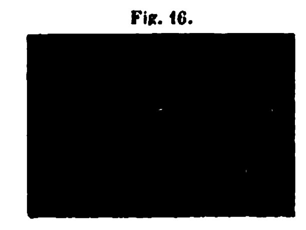
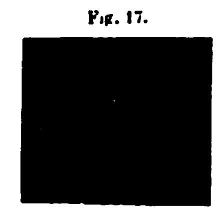


Fig. 17.



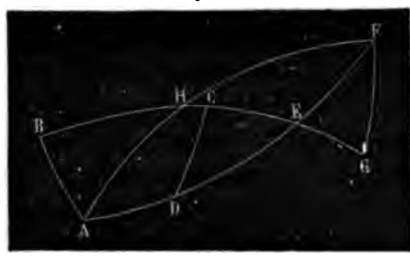
De là résulte que, dans tous les cas précédents, la somme des trois angles du triangle sphérique est égale à la somme des deux angles égaux du quadrilatère, autres que les deux angles droits. D'après cela, pour tout triangle sphérique dont la somme des trois angles est S, on peut trouver un quadrilatère de même surface, ayant deux angles droits et les deux côtés perpendiculaires égaux entre eux, et dont chacun des deux autres angles est égal à $\frac{1}{2}$S.

Fig. 18.



Soit maintenant ABCD (*fig.* 19) le quadrilatère sphérique dont les côtés AB = CD sont perpendiculaires sur BC, et dont les angles en A et en D sont égaux chacun à $\frac{1}{2}$S. Prolongeons les côtés AD et BC jusqu'à leur rencontre en E, et, au delà ce point E, portons encore sur le prolongement de AD la longueur EF = DE, et abaissons sur le prolongement de BC l'arc perpendiculaire FG. Partageons l'arc total BG en deux parties égales, et joignons le milieu H par des arcs de grands cercles aux points A et F. Les triangles EFG, DCE sont égaux [prop. 15]; on a donc FG = DC = AB. Les triangles ABH, HGF sont pareillement égaux, parce qu'ils sont rectangles et ont les côtés de l'angle droit égaux. Donc AH et HF appartiennent à un même cercle; l'arc AHF est égal à π. L'arc ADEF est pareillement égal à π, l'angle HAD = HFE = $\frac{1}{2}$S — BAH = $\frac{1}{2}$S — HFG = $\frac{1}{2}$S — HFE — EFG = $\frac{1}{2}$S — HAD — π + $\frac{1}{2}$S. Donc l'angle HFE = $\frac{1}{2}$(S — π), ou, ce qui revient au même, = la mesure du fuseau AHFDA, laquelle à son tour est égale à celle du quadrilatère ABCD, comme on le voit aisément, lorsqu'on passe de l'un à l'autre, en ajoutant d'abord le triangle EFG, puis le triangle BAH, et retranchant ensuite les triangles DCE, HFG, égaux aux précédents. D'après cela $\frac{1}{2}$(S — π) sera la mesure du quadrilatère ABCD, et en même temps aussi celle du triangle sphérique dont la somme des trois angles est égale à S.

Fig. 19.



28. *Lorsque trois plans se coupent deux à deux suivant des droites parallèles, la somme des trois angles dièdres est égale à deux angles droits.*

Soient AA', BB', CC' (*fig.* 20), les trois parallèles formées par les intersections des trois plans [prop. 25]. Prenons à volonté sur ces droites trois points A, B, C, et imaginons que l'on mène par ces points un plan qui coupera les plans des parallèles suivant les droites AB, AC, BC. Menons, de plus, par la ligne AC et par un point quelconque D de la ligne BB', un nouveau plan qui coupera le plan des parallèles AA', BB' suivant la droite AD, et le plan des parallèles CC', BB' suivant la droite CD, et qui fera avec le troisième plan des parallèlles AA', CC' un angle que nous désignerons par w. Soient X, Y, Z les angles dièdres des trois plans, suivant les arêtes AA', BB', CC' respectivement. Soient enfin les angles plans $BDC = a$, $ADC = b$, $ADB = c$. Imaginons que, du point A comme centre, on décrive une surface sphérique dont les intersections avec les droites AC, AD, AA' déterminent un triangle sphérique ayant pour côtés p, q, r, pour surface α, et pour angles w opposé au côté q, X opposé au côté r, et par suite $\pi + 2\alpha - w - X$ opposé au côté p [prop. 27]. De même CA, CD, CC' couperont la sphère de centre C, en déterminant un triangle de surface β dont les côtés seront p', q', r', et les angles w opposé à q', Z opposé à r', et par suite $\pi + 2\beta - w - Z$ opposé à p'. Enfin DA, DB, DC détermineront sur une sphère de centre D un triangle sphérique dont les côtés l, m, n auront pour angles respectivement opposés $w + Z - 2\beta$, $w + X - 2\alpha$, Y, et dont la surface sera par conséquent $\delta = \frac{1}{2}(X + Y + Z - \pi) - \alpha - \beta + w$. Lorsque w diminue, les surfaces des triangles α et β diminuent en même temps, de telle sorte que $\alpha + \beta - w$ peut être rendu moindre que toute quantité donnée. Dans le triangle δ, les côtés l et m peuvent également être rendus indéfiniment petits [prop. 21]. Donc le triangle δ avec un de ses côtés, l ou m, peut être porté autant de fois que l'on voudra sur un grand cercle de la sphere, sans que l'hémisphère se trouve complètement couvert; par suite, δ s'évanouit en

Fig. 20.

même temps que w, d'où résulte que l'on doit avoir nécessairement $X + Y + Z = \pi$.

29. *Dans un triangle rectiligne, les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés ou ne se rencontrent pas, ou se rencontrent toutes en un même point.*

Supposons que dans le triangle ABC (*fig.* 21), il y ait intersection au point D entre les deux perpendiculaires ED, DF, élevées aux milieux E, F des côtés AB, BC. Menons aux sommets du triangle les lignes DA, DB, DC.

Fig. 21.

Dans les triangles égaux ADE, BDE [prop. 10], on a AD = BD; par une raison analogue, BD = CD. Le triangle ADC est donc isoscèle, et par conséquent la perpendiculaire abaissée du point D sur la base AC tombera au milieu G de cette base.

La démonstration n'éprouve aucun changement lorsque le point d'intersection D des deux perpendiculaires ED, FD se trouve soit sur la ligne AC elle-même, soit en dehors du triangle.

Donc, dans le cas où l'on admet que deux de ces perpendiculaires ne se coupent pas, la troisième ne pourra pas non plus rencontrer les deux autres.

30. *Les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés d'un triangle rectiligne seront toutes les trois parallèles entre elles, toutes les fois que l'on en supposera deux parallèles.*

Soient les perpendiculaires DE, FG, HK (*fig.* 22) élevées sur les milieux D, F, H des côtés du triangle ABC. Supposons d'abord que les deux perpendiculaires DE, FG, qui rencontrent AB en L et en M, soient parallèles, et que la perpendiculaire HK se trouve entre les deux autres. A l'intérieur de l'angle BLE, tirons à volonté du point L la ligne LG, qui devra rencontrer FG quelque part en G, quelque petit que soit l'angle d'écart GLE [prop. 16]. Puisque, dans le triangle LGM, la perpendiculaire HK ne peut pas rencontrer MG [prop. 29], il faut donc qu'elle coupe LG quelque part en P, d'où l'on conclut que HK doit être parallèle à DE [prop. 16] et à MG [prop. 18 et 25].


Fig. 22.

Si l'on représente les côtés par

$$BC = 2a, \qquad AC = 2b, \qquad AB = 2c,$$

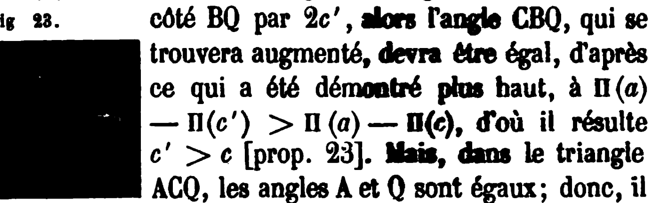
et que l'on désigne par A, B, C les angles respectivement opposé, à ces côtés, on a, dans le cas considéré,

$$A = \Pi(b) - \Pi(c),$$
$$B = \Pi(a) - \Pi(c),$$
$$C = \Pi(a) + \Pi(b),$$

comme il est aisé de s'en convaincre, à l'aide des lignes AA', BB', CC', menées par les points A, B, C, parallèlement à la perpendiculaire HK, et par suite aussi aux deux autres perpendiculaires DE, FG [prop. 23 et 25].

Supposons maintenant que les deux perpendiculaires HK, FG soient parallèles, alors la troisième perpendiculaire DE ne pourra pas les rencontrer [prop. 29]; donc ou elle leur sera parallèle, ou elle coupera AA'. La dernière hypothèse revient à dire que l'angle $C > \Pi(a) + \Pi(b)$. Si l'on diminue cet angle jusqu'à ce qu'il devienne égal à $\Pi(a) + \Pi(b)$, en donnant à la ligne AC la nouvelle position CQ (*fig.* 23), et si l'on désigne la longueur du troisième côté BQ par $2c'$, alors l'angle CBQ, qui se trouvera augmenté, devra être égal, d'après ce qui a été démontré plus haut, à $\Pi(a) - \Pi(c') > \Pi(a) - \Pi(c)$, d'où il résulte $c' > c$ [prop. 23]. Mais, dans le triangle ACQ, les angles A et Q sont égaux; donc, il faut que dans le triangle ABQ, l'angle en Q soit plus grand que l'angle en A, d'où résulte $AB > BQ$ [prop. 9], c'est à dire $c > c'$.

Fig. 23.

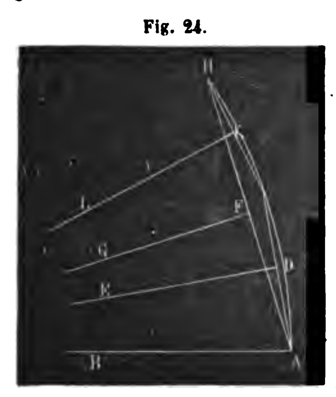


31. *Nous appellerons* COURBE-LIMITE *(horicycle) la ligne courbe, située dans un plan, et telle que toutes les perpendiculaires élevées sur les milieux de ses cordes soient parallèles entre elles.*

Conformément à cette définition, on peut concevoir que la courbe-limite soit engendrée comme il suit: étant donnée une droite AB (*fig.* 24), par un point A, pris par cette droite, on mène, sous divers angles $CAB = \Pi(a)$, des cordes $AC = 2a$. L'extrémité C de chacune de ces cordes sera située sur la courbe-limite, dont on

pourra ainsi déterminer successivement tous les points. La perpendiculaire DE, élevée sur le milieu de la corde AC, sera parallèle à la ligne AB, que nous nommerons *axe de la courbe-limite*. De même toute perpendiculaire FG, élevée sur le milieu d'une corde quelconque AH, sera parallèle à AB. Donc cette propriété devra aussi appartenir en général à toute perpendiculaire KL, élevée au milieu K d'une corde quelconque CH, quels que soient les points C, H de la courbe-limite qui forment les extrémités de cette corde [prop. 30]. De telles perpendiculaires devront donc recevoir, sans distinction, comme AB, le nom d'*axes de la courbe-limite*.

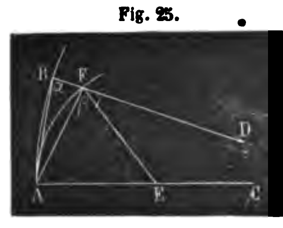
Fig. 24.



32. *Un cercle dont le rayon va en croissant se change en une courbe-limite.*

Soit AB (*fig.* 25) une corde de la courbe-limite. Par les extrémités A et B de la corde, menons deux axes, AC, BD, qui feront avec la corde des angles égaux BAC = ABD = α [prop. 31]. Sur un de ces axes AC, prenons un point quelconque E comme centre d'un cercle, et menons l'arc de cercle AF depuis l'origine A de l'arc AC, jusqu'à sa rencontre en F avec l'autre axe BD. Le rayon FE du cercle, correspondant au point F, formera d'un côté, avec la corde AF, l'angle AFE = β, et de l'autre côté, avec l'axe BD, l'angle EFD = γ. L'angle compris entre les deux cordes BAF = $\alpha - \beta < \beta + \gamma - \alpha$ [prop. 22], d'où résulte $\alpha - \beta < \frac{1}{2}\gamma$. Or, comme l'angle γ peut décroître jusqu'à zéro, soit lorsque le point E se meut dans la diirection AC, F restant fixe [prop. 21], soit encore lorsque F s'approche de B sur l'axe BF, le centre E conservant sa position [prop. 22]; il s'ensuit que, l'angle γ décroissant ainsi, l'angle $\alpha - \beta$, ou l'inclinaison mutuelle des deux cordes AB, AF, et par suite aussi la distance du point B de la courbe-limite au point F du cercle,

Fig. 25.



tendront vers zéro. Donc on peut appeler la courbe-limite *un cercle de rayon infiniment grand.*

33. Soient $AA' = BB' = x$ (*fig.* 26) deux droites parallèles entre elles dans la direction de A vers A', et supposons que les parallèles à ces droites servent d'axes aux deux arcs de courbes-limites $AB = s$, $A'B' = s'$. On aura

Fig. 26.

$$s' = se^{-x},$$

e étant indépendant des arcs s, s', et de la droite x, distance des arcs s et s'.

Pour le démontrer, admettons que le rapport des deux arcs s, s' soit égal à celui des deux nombres entiers n, m. Entre les deux axes AA', BB', menons un troisième axe CC' qui retranche de l'arc AB une partie $AC = t$, et de l'arc A'B' une partie $A'C' = t'$, située du même côté que t. Supposons que le rapport de t à s soit égal à celui des deux nombres entiers p, q, de sorte qu'on ait

$$s = \frac{n}{m} s', \qquad t = \frac{p}{q} s.$$

Partageons maintenant l'arc s par des axes en nq parties égales; il y aura mq de ces parties sur s' et np sur t. A ces parties égales de s et de t correspondent aussi des parties égales de s' et de t'; on a par conséquent

$$\frac{t'}{t} = \frac{s'}{s}.$$

D'après cela, de quelque manière que l'on prenne les deux arcs t, t' entre les deux axes AA', BB', le rapport de t à t' restera toujours le même, tant que la distance x entre ces arcs restera la même. Si donc on pose, pour $x = 1$, $s = es'$, on aura, pour une valeur quelconque de x,

$$s' = se^{-x} \text{ (1)}.$$

(1) En effet, si l'on suppose la distance des axes AA', CC' infiniment petite, d'où $t = ds$, $t' = ds'$, l'équation précédente donne

$$\frac{ds}{s} = \frac{ds'}{s'};$$

Le nombre e étant un nombre inconnu soumis à la seule condition $e > 1$, et d'un autre côté l'unité qui mesure la ligne x pouvant être prise arbitrairement, on pourra, pour simplifier le calcul, choisir cette unité de telle sorte que le nombre e devienne égal à la base des logarithmes de Neper.

On peut encore remarquer que $s' = 0$ pour $x = \infty$. Donc non seulement la distance de deux parallèles va en diminuant [prop. 24], mais encore, lorsqu'on prolonge les parallèles dans le sens du parallélisme, cette distance finit par s'évanouir. Les lignes parallèles présentent donc le caractère des asymptotes.

34. Nous appellerons *surface-limite* (horisphère) la surface engendrée par la révolution de la courbe-limite autour d'un de ses axes, lequel sera aussi, comme tous les autres axes de la courbe-limite, un axe de la surface-limite.

Une corde de longueur donnée est inclinée d'un angle constant sur les axes menés par ses extrémités, quels que soient les deux points de la surface-limite que l'on prenne pour les extrémités de cette corde.

Soient A, B, C [*fig.* 27] trois points de la surface-limite, AA′ l'axe de révolution, BB′ et CC′ deux autres axes, et par suite AB et AC des cordes sur lesquelles les axes sont inclinés d'angles égaux A′AB = B′BA, A′CA = C′CA [prop. 31]. Les deux axes BB′ et CC′, menés par les extrémités de la troisième corde BC, sont également parallèles et situés dans le même plan [prop. 25]. Une perpendiculaire DD′, élevée au milieu de la corde, dans le plan des deux parallèles AA′, BB′, sera parallèle aux trois axes AA′, BB′, CC′ [prop. 23 et 25]; une perpendiculaire EE′, menée

---

donc $\frac{ds}{s}$ est constant, quel que soit x, et l'on a, en considérant s comme fonction de x,

$$d\frac{ds}{s} = 0,$$

d'où, C et C′ étant des constantes arbitraires,

$$\frac{ds}{s} = C\,dx, \qquad s = C'e^{Cx}.$$

De plus, s décroît lorsque x croît [prop. 24]. Donc $C'e^{C}$ doit être moindre que l'unité. En représentant ce nombre par e^{-1}, e étant > 1, on a l'équation qu'il s'agissait de démontrer. (*Note du trad.*)

de la même manière sur le milieu de la corde AC, dans le plan des parallèles AA', CC', sera parallèle aux trois axes AA', BB', CC' et à la perpendiculaire DD'. Désignons maintenant par $\Pi(a)$ l'angle compris entre le plan qui contient les parallèles AA', BB', et le plan du triangle ABC, a pouvant être positif, négatif ou nul. Si a est positif, élevons, à l'intérieur du triangle ABC et dans le plan de ce triangle, la droite FD $= a$, perpendiculaire au milieu D de la corde AB. Si a était un nombre négatif, on mènerait FD $= a$ extérieurement au triangle, de l'autre côté de la corde AB. Si a était nul, le point F coïnciderait avec D. Dans tous les cas, on obtient deux triangles rectangles égaux AFD, DFB, et par conséquent FA $=$ FB. Élevons maintenant en F la ligne FF' perpendiculaire sur le plan du triangle ABC.

Fig. 27.



Puisque l'angle D'DF $= \Pi(a)$ et que DF $= a$, FF' sera parallèle à DD' et à la droite EE', qui est située dans le même plan perpendiculaire au plan du triangle ABC. Imaginons maintenant que, dans le plan des parallèles EE', FF', on abaisse sur EF la perpendiculaire EK. Cette droite EK sera aussi perpendiculaire sur le plan du triangle AEC [prop. 13] et sur la ligne AD située dans ce plan [prop. 11]; par conséquent, AE, qui est perpendiculaire sur EK et sur EE', sera aussi perpendiculaire sur FE [prop. 11]. Les triangles AEF, FEC sont donc égaux, parce qu'ils sont rectangles et ont les côtés de l'angle droit égaux; donc on a AF $=$ FC $=$ FB. Une perpendiculaire abaissée du sommet F du triangle isoscèle EFC sur la base BC passera par le milieu G de cette base. Un plan mené par cette perpendiculaire FG et par la ligne FF' devra être perpendiculaire sur le plan du triangle ABC, et coupera le plan des parallèles BB', CC' suivant la ligne GG', qui sera encore parallèle à BB et à CC' [prop. 25]. Or, CG étant perpendiculaire sur FG, et par suite aussi sur GG', il s'ensuit que l'angle C'CG $=$ B'BG [prop. 23].

De là résulte que, dans la surface-limite, chacun des axes peut être considéré comme un axe de révolution.

Nous appellerons *plan principal* tout plan mené par un axe de

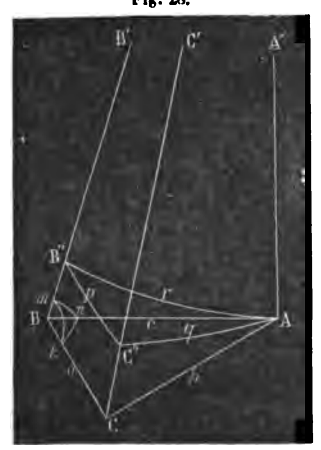
la surface-limite. D'après cela, tout *plan principal* coupe la surface-limite suivant la courbe-limite, tandis que, pour toute autre position du plan sécant, cette intersection est un cercle. Trois plans principaux qui se coupent deux à deux forment entre eux des angles dont la somme est égale à π [prop. 28]. Nous considérerons ces angles comme les angles du triangle de la surface-limite, qui a pour côtés les arcs de courbes-limites, formés par les intersections de la surface-limite avec les trois plans principaux. Les triangles de la surface-limite ont donc, entre leurs angles et leurs côtés, les mêmes relations que l'on démontre exister dans les triangles rectilignes en géométrie ordinaire.

35. Dans ce qui va suivre, nous représenterons par une lettre accentuée, telle que x', la grandeur d'une ligne, pour indiquer que cette ligne est liée à une autre ligne, désignée par la même lettre x sans accent, par la relation exprimée par l'équation

$$\Pi(x) + \Pi(x') = \frac{1}{2}\pi.$$

Soit maintenant ABC (*fig.* 28) un triangle rectiligne rectangle ayant pour hypoténuse $AB = c$, pour côtés de l'angle droit $AC = b$, $BC = a$, et pour angles opposés à ces derniers $BAC = \Pi(\alpha)$, $ABC = \Pi(\beta)$. Au point A, élevons la perpendiculaire AA′ au plan du triangle ABC, et par les points B et C menons BB′ et CC′ parallèles à AA′. Les plans qui renferment deux à deux ces trois parallèles forment entre eux l'angle $\Pi(\alpha)$ suivant AA′, un angle droit suivant CC′ [prop. 11 et 13], et par suite l'angle $\Pi(\alpha')$ suivant BB′ [prop. 28].

Fig. 28.



Les intersections des lignes BA, BC, BB′ avec une surface sphérique, décrite du point B comme centre, déterminent un triangle sphérique dont les côtés sont $mn = \Pi(c)$, $kn = \Pi(\beta)$, $mk = \Pi(a)$, et les angles respectivement opposés $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$.

D'après cela, l'existence d'un triangle rectiligne, ayant pour

côtés a, b, c, et pour angles opposés $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$, entraîne aussi celle d'un triangle sphérique (*fig.* 29) ayant pour côtés $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$, et pour angles opposés $\Pi(b)$, $\Pi(a')$, $\frac{1}{2}\pi$.

Fig. 29.

Outre ces deux triangles, l'existence du triangle sphérique entraîne aussi réciproquement celle d'un triangle rectiligne pouvant avoir pour côtés a, α', β, et pour angles respectivement opposés $\Pi(b')$, $\Pi(c)$, $\frac{1}{2}\pi$.

On peut ainsi passer de a, b, c, α, β, à b, a, c, β, α, et aussi à a, α', β, b', c.

Imaginons que par le point A (*fig.* 28), en prenant AA' comme axe, on mène une surface-limite qui coupe les deux autres axes BB', CC' en B″ et C″, et dont les intersections avec les plans des parallèles forment un triangle de surface-limite ayant pour côtés $B''C'' = p$, $C''A = q$, $B''A = r$, et pour angles respectivement opposés $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$. On aura, par conséquent [prop. 34],

$$p = r \sin \Pi(\alpha), \qquad q = r \cos \Pi(\alpha).$$

Détruisons maintenant le long de la ligne BB' (*fig.* 30) la liaison des trois plans principaux, et étalons-les de façon qu'ils viennent tous les trois, avec toutes les lignes qu'ils contiennent, s'appliquer sur un même plan, sur lequel les arcs p, q, r se réuniront en un seul arc de courbe-limite, passant par le point A, et ayant pour axe AA'; de telle sorte que, d'un côté de AA' seront situés : les arcs q et p; le côté b du triangle, lequel est perpendiculaire en A sur AA'; l'axe CC' mené par l'extrémité de b parallèlement à AA' et passant par le point C″ de réunion des arcs p et q; le côté a, perpendiculaire sur CC' au point C; et l'axe BB', mené par l'extrémité de a parallèlement à AA', et passant par

Fig. 30.



l'extrémité B″ de l'arc p; — de l'autre côté de AA′ seront situés : le côté c, perpendiculaire à AA′ au point A, et l'axe BB′, parallèle à AA′, et joignant l'extrémité de b à l'extrémité de B″ de l'arc r. La grandeur de la ligne CC″ dépend de b, et nous exprimons cette dépendance par l'équation CC″ $= f(b)$. On aura de même BB″ $= f(c)$. Si, en prenant CC′ pour axe, on décrit une nouvelle courbe-limite, à partir du point C, jusqu'à l'intersection D de cette courbe avec l'axe BB′, et que l'on désigne l'arc CD par t, on aura

$$BD = f(a), \qquad BB' = BD + DB' = BD + CC',$$

et par suite,

$$f(c) = f(a) + f(b).$$

Remarquons, de plus, que l'on a [prop. 32]

$$t = pe^{f(b)} = r \sin \Pi(\alpha).\, e^{f(b)}$$

Si la perpendiculaire au plan du triangle ABC (*fig.* 28), au lieu d'être élevée au point A, l'avait été au point B, les lignes c et r seraient restées les mêmes; les arcs q et t se seraient changés en t et q; les droites a et b, en b et a, et l'angle $\Pi(\alpha)$ en $\Pi(\beta)$. On aurait, par conséquent,

$$q = r \sin \Pi(\beta).\, e^{f(a)},$$

d'où résulte, en substituant pour q sa valeur,

$$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta).\, e^{f(a)},$$

et, en changeant α en b', β en c,

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(c).\, e^{f(a)},$$

d'où, en multipliant par $e^{f(b)}$,

$$\sin \Pi(b).\, e^{f(b)} = \sin \Pi(c).\, e^{f(c)}.$$

Il en résulte aussi

$$\sin \Pi(a).\, e^{f(a)} = \sin \Pi(b).\, e^{f(b)}.$$

Or, les droites a et b sont indépendantes l'une de l'autre, et de plus, pour $b = 0$, on a

$$f(b) = 0\,, \quad \Pi(b) = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Donc, pour toute droite a, on a

$$e^{-f(a)} = \sin \Pi(a),$$

ce qui donne

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b),$$
$$\sin \Pi(\beta) = \cos \Pi(\alpha) \sin \Pi(a).$$

On tire encore de là, par des échanges de lettres,

$$\sin \Pi(\alpha) = \cos \Pi(\beta) \sin \Pi(b),$$
$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\alpha),$$
$$\cos \Pi(a) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta).$$

Si, dans le triangle sphérique rectangle (*fig.* 29), on désigne les côtés $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$, avec les angles opposés $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha)$, par les lettres a, b, c, A, B, les équations précédentes prendront la forme des équations connues que l'on établit, en trigonométrie sphérique, pour les triangles rectangles, savoir :

$$\sin a = \sin c \sin A,$$
$$\sin b = \sin c \sin B,$$
$$\cos A = \cos a \sin B,$$
$$\cos B = \cos b \sin A,$$
$$\cos c = \cos a \cos b,$$

équations au moyen desquelles on peut passer à celles qui sont relatives aux triangles sphériques quelconques. Donc la trigonométrie sphérique est indépendante de ce que, dans un triangle rectiligne, la somme des trois angles est ou n'est pas égale à deux angles droits.

36. Considérons maintenant de nouveau le triangle rectiligne ABC (*fig.* 31), ayant pour côté a, b, c et pour angles respectivement opposés $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$. Prolongeons l'hypoténuse c au delà du point B, et prenons BD $= \beta$; au point D, élevons sur BD la perpendiculaire DD', qui sera parallèle au prolongement BB' du côté a au delà du point B. Par le point A, menons encore à DD' la parallèle AA', qui sera en même temps parallèle à CB' [prop. 25]. Par conséquent l'angle A'AD $=$ $\Pi(c+\beta)$, A'AC $= \Pi(b)$, d'où

Fig. 31.



$$\Pi(b) = \Pi(\alpha) + \Pi(c+\beta).$$

Fig. 32.



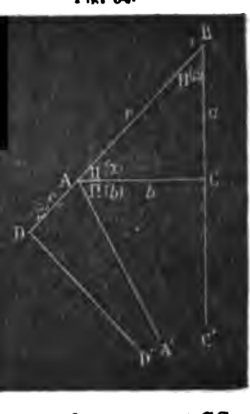
Portons β à partir du point B sur l'hypoténuse c; à l'extrémité D (*fig.* 32), élevons sur AB, à l'intérieur du triangle, la perpendiculaire DD', et par le point A menons à DD' la parallèle AA'; la ligne BC, avec son prolongement CC' sera la troisième parallèle. Alors l'angle CAA' $= \Pi(b)$, DAA' $= \Pi(c-\beta)$, d'où

$$\Pi(c-\beta) = \Pi(\alpha) + \Pi(b).$$

Cette dernière équation subsiste encore lorsqu'on a $c = \beta$ ou $c < \beta$. Si l'on a $c = \beta$ (*fig.* 33), la perpendiculaire AA', élevée sur AB au point A, sera parallèle au côté BC $= a$, avec son prolongement CC'; par conséquent $\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \frac{1}{2}\pi$, tandis que l'on a aussi $\Pi(c-\beta) = \frac{1}{2}\pi$ [prop. 23]. Si l'on a $c < \beta$, l'extrémité de β tombera au delà du point A, en D (*fig.* 34), sur le prolongement de l'hypoténuse AB. La perpendiculaire DD' élevée sur AD, et la parallèle AA', menée par le point A à cette perpendiculaire seront toutes deux parallèles au côté BC $= a$ et à son prolongement CC'. Ici, l'angle DAA' $= \Pi(\beta - c)$; donc [prop. 23]

Fig. 33.

Fig. 34.



$$\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \pi - \Pi(\beta - c) = \Pi(c-\beta).$$

La combinaison des deux équations trouvées donne

$$2\,\Pi(b) = \Pi(c-\beta) + \Pi(c+\beta),$$
$$2\,\Pi(\alpha) = \Pi(c-\beta) - \Pi(c+\beta),$$

d'où résulte

$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(\alpha)} = \frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) + \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) - \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}.$$

En substituant ici la valeur [prop. 35]

$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(\alpha)} = \cos \Pi(c),$$

il vient

$$\tang^2 \frac{1}{2} \Pi(c) = \tang \frac{1}{2} \Pi(c-\beta) \tang \frac{1}{2} \Pi(c+\beta).$$

β étant ici un nombre arbitraire, puisque l'on peut choisir à volonté l'angle $\Pi(\beta)$ du côté a avec le côté c, entre les limites 0 et $\frac{1}{2}\pi$, et par suite β entre les limites 0 et ∞, on en conclura, en faisant successivement $\beta = c, 2c, 3c, \ldots$, que l'on a, pour toute valeur positive du nombre n,

$$\tang^n \frac{1}{2}\Pi(c) = \tang\frac{1}{2}\Pi(nc).$$

Considérons maintenant n comme le rapport de deux lignes x et c, et admettons que l'on ait

$$\cot\frac{1}{2}\Pi(c) = e^c :$$

on trouvera que, pour toute ligne x en général, positive ou négative, on a

$$\tang\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x},$$

e pouvant être un nombre quelconque plus grand que l'unité, puisque l'on a $\Pi(x) = 0$ pour $x = \infty$.

Comme l'unité qui sert à mesurer les lignes est arbitraire, on peut faire en sorte que e représente la base des logarithmes de Neper.

37. Parmi les équations trouvées plus haut [prop. 36], il suffit de connaître les deux suivantes :

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b),$$
$$\sin \Pi(\alpha) = \sin \Pi(b) \cos \Pi(\beta),$$

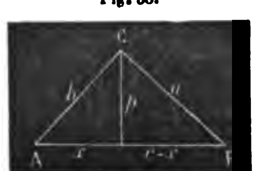
en appliquant la dernière aux deux côtés de l'angle droit a et b, pour déduire de leur combinaison les deux autres équations du n° 35, sans qu'il y ait ambiguïté dans les signes algébriques, tous

les angles étant ici aigus. On parvient d'une manière semblable aux deux équations

$$(1)\qquad \operatorname{tang}\Pi(c) = \sin\Pi(\alpha)\operatorname{tang}\Pi(a),$$
$$(2)\qquad \cos\Pi(a) = \cos\Pi(c)\cos\Pi(\beta).$$

Considérons maintenant un triangle rectiligne ayant pour côtés a, b, c (*fig.* 35), et pour angles respectivement opposés A, B, C. Si A et B sont des angles aigus, la perpendiculaire p, abaissée du sommet C sur le côté opposé c, tombera dans l'intérieur du triangle, et partagera le côté c en deux parties : soit x celle de ces parties qui est adjacente à l'angle A, $c - x$ celle qui est adjacente à l'angle B. On formera ainsi deux triangles rectangles qui donneront, en appliquant l'équation (1), les relations

Fig. 35.



$$\operatorname{tang}\Pi(a) = \sin B \operatorname{tang}\Pi(p),$$
$$\operatorname{tang}\Pi(b) = \sin A \operatorname{tang}\Pi(p);$$

et ces relations continueraient de subsister lors même qu'un des angles, B, par exemple, serait droit (*fig.* 36), ou obtus (*fig.* 37). On a donc généralement, pour un triangle quelconque,

$$(3)\qquad \sin A \operatorname{tang}\Pi(a) = \sin B \operatorname{tang}\Pi(b).$$

Dans un triangle dont les angles A et B sont aigus (*fig.* 35), on a encore [équation (2)]

$$\cos\Pi(x) = \cos A \cos\Pi(b),$$
$$\cos\Pi(c - x) = \cos B \cos\Pi(a),$$

équations qui subsistent encore pour un triangle dans lequel un des angles A, B serait droit ou obtus. Ainsi, pour $B = \frac{1}{2}\pi$ (*fig.* 36), on devra prendre $x = c$; la première équation se change alors dans celle que nous avons trouvée plus haut [équation (2)]; l'autre se vérifie d'elle-même.

Fig. 36.

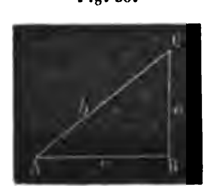


Fig. 37.



Pour $B > \frac{1}{2}\pi$ (*fig.* 37), la première équation n'est pas altérée, tandis que la seconde devient

$$\cos \Pi(x-c) = \cos(\pi - B) \cos \Pi(a).$$

Or, on a $\cos\Pi(x-c) = -\cos\Pi(c-x)$ [prop. 23], et d'ailleurs $\cos(\pi-B) = -\cos B$. Si l'angle A est droit ou obtus, on remplacera x par $c-x$ et $c-x$ par x, pour ramener ce cas au précédent.

Pour éliminer x entre les deux équations, remarquons que l'on a [prop. 37]

$$\begin{aligned}\cos\Pi(c-x) &= \frac{1 - \tang^2\frac{1}{2}\Pi(c-x)}{1 + \tang^2\frac{1}{2}\Pi(c-x)} \\ &= \frac{1 - e^{2x-2c}}{1 + e^{2x-2c}} \\ &= \frac{1 - \tang^2\frac{1}{2}\Pi(c)\cot^2\frac{1}{2}\Pi(x)}{1 + \tang^2\frac{1}{2}\Pi(c)\cot^2\frac{1}{2}\Pi(x)} \\ &= \frac{\cos\Pi(c) - \cos\Pi(x)}{1 - \cos\Pi(c)\cos\Pi(x)}.\end{aligned}$$

En mettant pour $\cos \Pi(x)$, $\cos \Pi(c-x)$ leurs valeurs, il vient

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\Pi(a)\cos B + \cos\Pi(b)\cos A}{1 + \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos A\cos B},$$

d'où résulte

$$\cos\Pi(a)\cos B = \frac{\cos\Pi(c) - \cos A\cos\Pi(b)}{1 - \cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)},$$

et enfin

$$\sin^2\Pi(c) = \left[1 - \cos B\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)\right]\left[1 - \cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\right],$$

On trouvera de même

$$(4)\quad \begin{aligned}\sin^2\Pi(a) &= \left[1 - \cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\right]\left[1 - \cos B\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)\right], \\ \sin^2\Pi(b) &= \left[1 - \cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\right]\left[1 - \cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\right].\end{aligned}$$

De ces trois équations on tire encore

$$\frac{\sin^2\Pi(b)\,\sin^2\Pi(c)}{\sin^2\Pi(a)} = \left[1 - \cos A\,\cos\Pi(b)\,\cos\Pi(c)\right]^2.$$

On conclut de là, sans ambiguïté de signe,

$$(5)\qquad \cos A\,\cos\Pi(b)\,\cos\Pi(c) + \frac{\sin\Pi(b)\,\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)} = 1.$$

En substituant ici pour $\Pi(c)$ sa valeur, conformément à l'équation (3),

$$\sin\Pi(c) = \frac{\sin A}{\sin C}\tang\Pi(a)\,\cos\Pi(c),$$

il vient

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\Pi(a)\,\sin C}{\sin A\,\sin\Pi(b) + \cos A\,\sin C\,\cos\Pi(a)\,\cos\Pi(b)}.$$

Si l'on remplace maintenant $\cos\Pi(c)$ par cette expression dans l'équation (4), on a

$$(6)\qquad \cot A\,\sin C\,\sin\Pi(b) + \cos C = \frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(a)}.$$

L'élimination de $\sin\Pi(b)$ au moyen de l'équation (3) donne

$$\frac{\cos\Pi(a)}{\cos\Pi(b)}\cos C = 1 - \frac{\cos A}{\sin B}\sin C\,\sin\Pi(a).$$

D'ailleurs, l'équation (6) donne, par des échanges de lettres,

$$\frac{\cos\Pi(a)}{\cos\Pi(b)} = \cot B\,\sin C\,\sin\Pi(a) + \cos C.$$

On conclut des deux dernières équations

$$(7)\qquad \cos A + \cos B\,\cos C = \frac{\sin B\,\sin C}{\sin\Pi(a)}.$$

Les quatre équations qui exprimeront les relations entre les côtés a, b, c, et les angles opposés A, B, C, dans un triangle rectiligne seront d'après cela [équations (3), (5), (6), (7)]

$$
(8)\left\{
\begin{aligned}
&\sin A \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(b),\\
&\cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1,\\
&\cot A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)},\\
&\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si les côtés du triangle sont très petits, on pourra se contenter des déterminations approchées [prop. 36]

$$
\begin{aligned}
&\cot \Pi(a) = a,\\
&\sin \Pi(a) = 1 - \tfrac{1}{2}a^2,\\
&\cos \Pi(a) = a,
\end{aligned}
$$

et de même pour les autres côtés b, c. Pour un tel triangle, les équations (8) deviennent donc

$$
\begin{aligned}
&b \sin A = a \sin B,\\
&a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,\\
&a \sin(A + C) = b \sin A,\\
&\cos A + \cos(B + C) = 0.
\end{aligned}
$$

Les deux premières de ces 4 équations sont celles que fournit la géométrie ordinaire. Les deux dernières, combinées avec les premières, conduisent à la relation

$$A + B + C = \pi.$$

Donc la géométrie imaginaire se change dans la géométrie ordinaire lorsque l'on suppose les côtés d'un triangle rectiligne très petits.

J'ai publié, dans les *Mémoires de l'Université de Kasan,* quelques recherches sur la mesure des lignes courbes, des figures planes, des aires et des volumes des corps, ainsi que sur l'application de la géométrie imaginaire à l'analyse (1).

---

(1) Voyez aussi un Mémoire de l'auteur publié en français dans le *Journal de Crelle* (tome XVII, p. 295-320, 1837), sous le titre de *Géométrie imaginaire. (Note du trad.)*

Les équations (8) constituent par elles-mêmes une raison suffisante pour considérer comme possible l'hypothèse de la géométrie imaginaire. Il n'existe donc pas d'autre moyen que les observations astronomiques pour s'assurer de l'exactitude des calculs auxquels conduit la géométrie ordinaire. Cette exactitude s'étend très loin, comme je l'ai fait voir dans un de mes Mémoires. Ainsi, dans les triangles qui sont accessibles à nos moyens de mesure, on n'a pas encore trouvé que la somme des trois angles différât d'un centième de seconde de deux angles droits.

Il est encore à remarquer que les quatre équations (8) de la géométrie plane se changent dans les équations de la géométrie sphérique, lorsqu'on remplace les côtés a, b, c, par $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$, et que l'on pose en même temps

$$\sin \Pi(a) = \frac{1}{\cos a}\cdot$$
$$\cos \Pi(a) = \sqrt{-1} \operatorname{tang} a,$$
$$\operatorname{tang} \Pi(a) = \frac{1}{\sqrt{-1}\sin a},$$

et de même pour les deux autres côtés b et c. De cette manière, les équations (8) se changent dans les suivantes :

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a,$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cot A \sin C + \cos C \cos b = \sin b \cot a,$$
$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C.$$

EXTRAIT

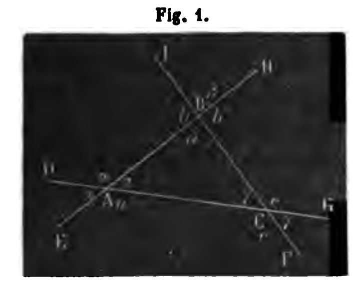
DE LA CORRESPONDANCE DE GAUSS ET DE SCHUMACHER.

SCHUMACHER A GAUSS.

Je prends la liberté de vous soumettre une tentative que j'ai faite pour démontrer, sans le secours des parallèles ni d'aucune théorie, la proposition que la somme des trois angles d'un triangle est égale à 180°, d'où suivrait alors la démonstration de l'axiome d'Euclide. Les seuls principes que je suppose établis sont que la somme de tous les angles formés autour d'un point est égale à 360° ou à 4 angles droits, et que les angles opposés par le sommet sont égaux.

Prolongeons indéfiniment les côtés d'un triangle rectiligne ABC (*fig.* 1), ou, en d'autres termes, considérons un système de trois droites dans un plan, formant, par leurs intersections, le triangle ABC. On a, pour les trois sommets, les équations

Fig. 1.



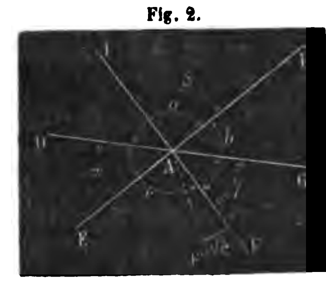
$$2a+2\alpha = 4\,\text{dr.},$$
$$2b+2\beta = 4\,\text{dr.},$$
$$2c+2\gamma = 4\,\text{dr.},$$

d'où

$$\alpha+\beta+\gamma = 6\,\text{dr.} - (a+b+c).$$

Ces relations subsistant, de quelque manière que soient situés les points A,B,C, ou, ce qui revient au même, de quelque manière que les trois droites soient menées dans le plan, laissons immobiles les lignes DG, EH, et faisons passer IF par le point A (*fig.* 2), de manière qu'elle fasse avec EH le même angle que dans sa position primitive, ou, plus généralement, puisque cet angle est arbitraire, de manière qu'elle tombe toujours dans l'intérieur de l'angle a. Nous aurons alors

Fig. 2.



$$a+b+c = 4\,\text{dr.}$$

Donc

$$\alpha+\beta+\gamma = 2\,\mathrm{dr}.$$

Pourrait-on objecter à cela que l'on a bien, par hypothèse,

$$b\ (fig.\ 1) = b\ (fig.\ 2),$$

mais que l'égalité

$$c\ (fig.\ 1) = c\ (fig.\ 2)$$

doit être démontrée?

Il me semble qu'à cause de la valeur arbitraire laissée aux angles, cette démonstration n'est pas indispensable.

Tels sont les principes de la démonstration sur laquelle j'attends votre jugement. J'ajouterai seulement, pour justifier mon raisonnement, qu'il est bien vrai que la seconde opération fait disparaître le triangle ABC; mais elle ne fait pas disparaître les angles du triangle. De quelque manière que les lignes soient situées, on a toujours

$$\mathrm{IBH} = \beta, \qquad \mathrm{GCF} = \gamma, \qquad \mathrm{DAE} = \alpha,$$

aussi bien dans le triangle fini que dans le triangle évanouissant; la somme

$$\mathrm{IAH} + \mathrm{GAF} + \mathrm{DAE}$$

est donc toujours égale à la somme des angles d'un triangle rectiligne.

Ainsi, on démontrera la proposition pour un triangle quelconque (dont les angles sont A,B,C), en tirant les lignes DG, EH, de façon que l'on ait

$$\alpha = \mathrm{A},$$

et faisant, de plus,

$$\mathrm{IAH} = \mathrm{B}, \qquad \mathrm{GAF} = \mathrm{C}.$$

Si alors IAF n'était pas une ligne droite, mais une ligne brisée IAF', l'angle c se trouverait, il est vrai, plus petit de dc; mais l'angle b serait plus grand d'autant, et, par suite, la somme de ces angles n'aurait pas changé, et nous aurions ce qui nous est nécessaire pour la démonstration, l'égalité

$$b+c\ (fig.\ 1) = b+c\ (fig.\ 2).$$

Copenhague, 3 mai 1831.

GAUSS A SCHUMACHER.

A bien examiner ce que vous m'écrivez au sujet des parallèles, vous avez employé, dans vos syllogismes, sans l'énoncer explicitement, une proposition qui peut se formuler ainsi :

Si deux droites qui se coupent, (1) et (2), font respectivement, avec une troisième droite (3) qui les rencontre, les angles A', A", et qu'une quatrième droite (4), située dans le même plan, soit coupée pareillement par (1) sous l'angle A', alors (4) sera coupée par (2) sous l'angle A".

Or, non seulement cette proposition a besoin de démonstration, mais on peut dire qu'au fond elle constitue le théorème lui-même qu'il s'agit de démontrer.

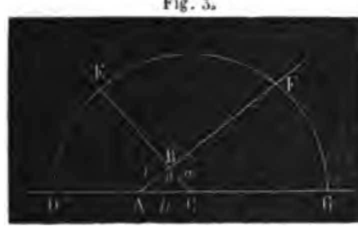
Depuis quelques semaines, j'ai commencé à mettre par écrit quelques résultats de mes propres méditations sur ce sujet, qui remontent en partie à quarante années, et dont je n'avais jamais rien rédigé, ce qui m'a forcé trois ou quatre fois à recommencer tout le travail dans ma tête. Je ne voudrais pourtant pas que tout cela périt avec moi [1].

Gœttingue, 17 mai 1831.

SCHUMACHER A GAUSS.

Je vais vous importuner encore une fois avec la théorie des parallèles.

Fig. 3.



Prolongeons indéfiniment les côtés du triangle rectiligne, et prenons un rayon R assez grand pour que les rapports $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$ deviennent moindres qu'une quantité donnée quelconque. Avec ce rayon, décrivons du centre C le demi-cercle DEFG. Les côtés a, b, c pouvant être considérés comme

---

[1] En parcourant la table des matières que doit contenir le quatrième volume de l'édition des *Œuvres* de Gauss, publiée en ce moment par l'Académie de Gœttingue, nous n'avons vu annoncer aucun article qui parût se rapporter au projet annoncé ici par le grand géomètre. Il serait bien regrettable que ces recherches si profondes et si originales *eussent péri avec lui!* (N. d. Tr.)

s'évanouissant par rapport à ce demi-cercle, et, par suite, les points A, B comme coïncidant avec C, ce demi-cercle sera la mesure des trois angles du triangle, dont la somme différera alors de 180° aussi peu que l'on voudra.

Il me semble que, si l'on ne rejette pas la notion de la grandeur indéfiniment croissante, cette démonstration prouve très simplement que, dans tout triangle rectiligne *fini*, la somme des angles est égale à 180°, ou plutôt que la constante qui, si la géométrie d'Euclide n'était pas vraie, devrait être ajoutée à la somme des angles pour compléter 180°, est moindre que toute grandeur donnée; et comme on peut répéter la même démonstration pour un triangle quelconque, cette constante ne peut pas non plus dépendre de la grandeur du triangle.

Lübeck, 25 mai 1831.

SCHUMACHER A GAUSS.

...... J'aurais désiré trouver dans votre lettre votre jugement sur la manière dont je démontre que la somme des angles d'un triangle rectiligne ne diffère de 180° que d'une quantité moindre que toute quantité donnée. Vous croirez sans peine que votre appréciation est de la plus haute importance pour moi, qui sais avec quelle facilité vous découvrez le point faible d'une démonstration. Je n'en ai encore rien communiqué à personne, si ce n'est à vous, à mes aides et au professeur Hansen, de Seeberg. Aucun de nous n'y a découvert de paralogisme.

Si quelqu'un trouvait indispensable (ce que je ne pense pas) de démontrer cette proposition, que l'on peut, dans un cercle de rayon infini (j'emploie ce mot d'*infini* pour abréger le discours), considérer les sommets d'un triangle comme des centres de ce cercle coïncidant entre eux, il serait facile de faire rigoureusement cette démonstration.

Il me semble que, quand deux points sont à une distance finie l'un de l'autre, cette distance doit être considérée comme nulle vis-à-vis d'une ligne infinie. Ces points coïncident donc l'un avec l'autre, relativement à cette ligne infinie.

Altona, 29 juin 1831.

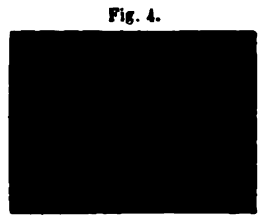
GAUSS A SCHUMACHER.

Au sujet des parallèles, je vous aurais déjà communiqué avec grand plaisir mon opinion en réponse à votre première lettre, si je n'avais pas supposé que, sans des développements suffisants, elle ne pouvait guère vous être d'une grande utilité. Pour que de tels développements fussent véritablement convaincants, il faudrait peut-être de longues pages d'explications sur ce que vous n'avez eu besoin que d'indiquer en quelques lignes, et ces explications exigeraient un calme d'esprit qui me fait défaut en ce moment. Je vous en dirai cependant quelques mots, pour vous prouver ma bonne volonté.

Vous attaquez directement le cas d'un triangle quelconque. Mais vous auriez pu appliquer le même raisonnement, en réduisant d'abord la question au cas le plus simple, et énonçant ainsi le théorème :

(1) *Dans tout triangle dont un côté est fini, le second côté, et, par suite aussi, le troisième, étant infinis, la somme des deux angles adjacents au côté fini est égale à* 180°.

Fig. 4.



Démonstration d'après votre manière. — L'arc de cercle CD est aussi bien la mesure de l'angle CAD que celle de l'angle CBD, parce que, dans un cercle de rayon infini, un déplacement fini du centre doit être considéré comme nul. Donc

$$\mathrm{CAD} = \mathrm{CBD}, \qquad \mathrm{CAD} + \mathrm{CBA} = \mathrm{CBD} + \mathrm{CBA} = 180^\circ.$$

Le reste s'achève sans difficulté. On a, en effet, d'après ce théorème,

Fig. 5.



$$\alpha + \beta + \delta = 180,$$
$$180 = \varepsilon + \delta,$$
$$\gamma + \varepsilon = 180,$$

d'où, en faisant la somme de ces égalités,

$$\alpha + \beta + \gamma = 180.$$

Pour ce qui est maintenant de votre démonstration du théorème (1), je commencerai par protester contre l'usage que vous faites d'une grandeur infinie, en la traitant comme une quantité *déterminée (vollendeten)*, ce qui n'est jamais permis en mathématiques. L'infini n'est qu'une *façon de parler*, parce qu'il s'agit en réalité de *limites*, dont certains rapports

peuvent approcher autant que l'on voudra, tandis que d'autres sont susceptibles de croître indéfiniment. Dans ce sens, la géométrie ***non-euclidienne*** ne renferme en elle rien de contradictoire, quoique, à première vue, beaucoup de ses résultats aient l'air de paradoxes. Ces contradictions apparentes doivent être regardées comme l'effet d'une illusion, due à l'habitude que nous avons prise de bonne heure de considérer la géométrie euclidienne comme ***rigoureuse***.

Dans la géométrie non-euclidienne, il n'y a jamais, dans les figures, de similitude sans égalité. Par exemple, les angles d'un triangle équilatéral ne sont pas seulement différents de $\frac{2}{3}$ d'angle droit, mais encore ils peuvent varier suivant la grandeur des côtés; et, si les côtés croissent au delà de toute limite, ils peuvent devenir aussi petits que l'on voudra. Il y a donc déjà contradiction à vouloir ***dessiner*** la ressemblance d'un tel triangle au moyen d'un triangle plus petit. On peut seulement ***indiquer*** sa disposition générale. De cette manière, l'***indication*** d'un triangle infini serait, à la limite, celle-ci (*fig.* 7) :

Fig. 6.

Fig. 7.

Dans la géométrie euclidienne, rien n'est grand d'une manière absolue; mais il n'en est pas de même dans la géométrie non-euclidienne, et c'est précisément là son caractère essentiel. Ceux qui n'accordent pas ce fait, établissent déjà par cela même toute la géométrie euclidienne; mais, comme je l'ai dit, d'après ma conviction, ce n'est de leur part qu'une pure illusion. Dans le cas en question, il n'y a rien absolument de contradictoire à dire que, si l'on donne les points A, B et la direction AC, C pouvant s'éloigner indéfiniment, alors, bien que l'angle DBC s'approche de plus en plus de l'angle DAC, il n'en est pas moins impossible d'abaisser la différence de ces angles au-dessous d'une certaine grandeur finie.

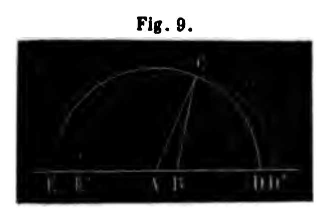
Fig. 8.



Votre introduction de l'arc CD rend, sans nul doute, votre conclusion plus spécieuse. Mais si l'on veut développer clairement ce que vous n'avez fait qu'indiquer, il faudra s'exprimer ainsi :

On a

Fig. 9.



$$\text{CAB} : \text{CBD} = \frac{\text{CD}}{\text{ECD}} : \frac{\text{CD}'}{\text{E}'\text{CD}'},$$

et tandis que AC croît indéfiniment, CD et CD′ d'une part, et, d'autre part, ECD et E′CD′ s'approchent continuellement de l'égalité.

Ces deux choses n'ont pas lieu dans la géométrie non-euclidienne, si l'on entend par là que les rapports géométriques de ces quantités s'approchent autant que l'on voudra de l'égalité. En effet, dans la géométrie non-euclidienne, la demi-circonférence d'un cercle de rayon r a pour valeur

$$\frac{1}{2}\pi k\left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right)$$

k étant une constante que l'expérience nous indique comme extrêmement grande par rapport à tout ce qui est mesurable pour nous. Dans la géométrie euclidienne, elle devient infinie.

Dans le *langage figuré* de la théorie de l'infini, on devrait donc dire que les circonférences de deux cercles infinis, dont la différence des rayons a une grandeur finie, diffèrent elles-mêmes d'une grandeur qui est à chacune d'elles dans un rapport fini.

Il n'y a rien ici de contradictoire, si l'homme, être fini, ne s'aventure pas à vouloir traiter quelque chose d'infini comme un objet donné et susceptible d'être embrassé par ses forces de compréhension habituelles.

Vous voyez qu'ici le débat vient toucher immédiatement au terrain de la métaphysique.

Gœttingue, 12 juillet 1831.

GAUSS A SCHUMACHER.

J'ai eu dernièrement occasion de relire l'opuscule de Lobatschewsky, intitulé : *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelenlinien*. Cet opuscule contient les éléments de la géométrie qui devrait exister, et dont le développement formerait un enchaînement rigoureux, si la géométrie *euclidienne* n'était pas vraie. Un certain Schweikardt (¹) a donné à cette géométrie le nom de *géomé-*

(¹) Autrefois à Marbourg, maintenant professeur de jurisprudence à Kœnigsberg.

trie astrale, Lobatschewsky celui de *géométrie imaginaire.* Vous savez que depuis cinquante-quatre ans (depuis 1792) je partage les mêmes convictions, sans parler ici de certains développements qu'ont reçues, depuis, mes idées sur ce sujet. Je n'ai donc trouvé dans l'ouvrage de Lobatschewsky aucun fait nouveau pour moi; mais l'exposition est toute différente de celle que j'avais projetée, et l'auteur a traité la matière de main de maître et avec le véritable esprit géométrique. Je crois devoir appeler votre attention sur ce livre, dont la lecture ne peut manquer de vous causer le plus vif plaisir.

Gœttingue, 28 novembre 1846.

EXTRAITS

DES

PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES DE LA SOCIÉTÉ

ANNÉE 1865-1866

Présidence de M. Royer.

Séance du 21 décembre 1865. — ***Expertise relative à du café avarié,*** **par A. Baudrimont.**

J'entretiendrai la Société d'une expertise relative à du café avarié; ce n'est point de la science pure; mais elle démontre comment la science peut être appliquée à la solution de questions qui demeureraient insolubles sans elle. Cette communication aura encore pour but d'abréger les recherches de ceux qui auront à s'occuper de la même question.

Nommé tiers-expert pour décider si du café avarié l'avait été par de l'eau de mer, j'ai entrepris les expériences suivantes :

L'avarie du café était évidente; son aspect marbré, la perte de l'odeur et même de la saveur du café, ainsi que souvent une odeur de moisi très prononcée, ne laissait aucun doute à cet égard; mais les sacs étaient presque tous intacts, et à peine observait-on sur quelques-uns des macules, telles que celles que l'eau de mer produit ordinairement.

Dans cet état, je pensai qu'il serait convenable : 1° De déterminer la quantité d'humidité contenue dans le café et de voir comment elle se trouvait répartie dans les sacs, et 2° d'y rechercher les éléments de l'eau de mer, et notamment le chlore et le magnésium, qui, réunis en quantité notable, me paraissaient devoir la caractériser suffisamment.

Détermination de l'eau contenue dans les cafés.

La première chose a été de me procurer du café non avarié, et de chercher, par la dessication, la quantité d'eau qui s'y trouvait.

J'ai obtenu les résultats suivants :

Café du Brésil (1)	0,0925
— Moka	0,0785
— Martinique	0,0825
— de la Réunion	0,0865
Quantité moyenne d'humidité	0,0850

(1) Le café objet de l'expertise était originaire du Brésil.

Dix échantillons de café avarié ont été pris : cinq à la surface des sacs et cinq dans leur centre ; ils ont donné les résultats suivants :

			Différences.
Sac A	Extérieur	0,1300	+ 0,0117
	Intérieur	0,1183	
Sac B	Extérieur	0,1220	— 0,0008
	Intérieur	0,1228	
Sac C	Extérieur	0,1555	+ 0,0039
	Intérieur	0,1516	
Sac D	Extérieur	0,1542	+ 0,0097
	Intérieur	0,1445	
Sac E	Extérieur	0,1470	+ 0,0260
	Intérieur	0,1210	

Dans les dix échantillons examinés, la quantité d'humidité dépasse de beaucoup celle du café ordinaire.

La quantité moyenne de cette humidité est de 0,13669, soit 0,1367 : Cette quantité dépasse celle du café non avarié de 0,0517, c'est à dire de plus de cinq centièmes.

Excepté ce qui est relatif au sac B, l'humidité du café pris à l'extérieur des sacs a toujours dépassé celle contenue dans leur intérieur.

Le sac B était l'un de ceux dont le café était le plus avarié.

Il résulte de cette première série d'expériences que le café avarié est plus humide que celui qui ne l'est pas, et que l'humidité a pénétré dans le café après sa mise en sac, puisque l'humidité est plus grande à la périphérie qu'au centre, et que le contraire aurait eu lieu si le café humide eût été introduit dans les sacs, parce qu'il se serait desséché en allant de l'extérieur à l'intérieur.

Recherche du chlore et du magnésium.

Pour cette recherche, une partie des échantillons recueillis a été lavée avec de l'eau distillée. La prise d'essai a varié de 100 à 500 grammes, et le poids de l'eau a toujours été égal à celui du café. Après vingt minutes de macération et d'agitation, le liquide était filtré. Ainsi obtenu, il était coloré en brun-verdâtre, et la teinte était d'autant plus foncée, que l'avarie était plus profonde. Divisé en plusieurs parties, il a été soumis aux essais suivants :

L'oxalate d'ammoniaque y a démontré la présence de la chaux, mais en très faible quantité.

Le phosphate de soude n'y faisait naître qu'un précipité à peine apparent, même après vingt-quatre heures.

L'ammoniaque ajoutée après le phosphate de soude donnait à la

liqueur une teinte plus foncée, et a constamment fait naître un précipité blanc, en quantité très notable et facile à recueillir sur un filtre.

Ce précipité, après lavage et dessiccation, était bien du phosphate ammoniaco-magnésien, abandonnant l'ammoniaque par la chaleur et fondant à une température élevée.

Au premier abord, on aurait pensé qu'il serait très facile de démontrer la présence du chlore par l'emploi de l'azotate d'argent; mais il n'en a point été ainsi. Ce sel, ajouté aux liqueurs, y faisait naître un précipité blanc-jaunâtre très abondant; ce précipité était entièrement soluble dans l'ammoniaque, mais l'acide azotique ne le dissolvait qu'en partie.

La liqueur additionnée d'azotate d'argent seul, abandonnée à la lumière, prenait une teinte d'un brun-noir très foncé, et se couvrait à sa surface d'une pellicule très remarquable, d'apparence métallique.

Le précipité provenant de l'addition de l'azotate d'argent et de l'acide azotique, que l'on aurait pu prendre au premier abord pour du chlorure d'argent, prenait une couleur rouge de brique après avoir été exposé à la lumière solaire, au lieu de noircir, comme cela aurait dû être, s'il eût été réellement du chlorure d'argent.

Pensant que ce précipité retenait une matière organique insoluble dans l'acide azotique, j'ai effectivement vérifié que cet acide employé seul faisait naître un précipité jaune dans l'infusion de café.

La liqueur, filtrée après l'addition de l'acide azotique, n'ayant pas donné de réactions franches par l'azotate d'argent, j'ai compris qu'il fallait complètement détruire la matière organique pour avoir des réactions ne pouvant laisser le moindre doute sur la présence du chlore.

Pour atteindre ce but, la liqueur provenant de la macération du café a été évaporée jusqu'à siccité. Le résidu sec a été réuni à un mélange formé de quatre parties de carbonate sodique et d'une partie d'azotate potassique, et le tout a été chauffé au rouge dans un creuset de platine. Il est résulté de cette opération une masse saline blanche.

Ce produit, dissous dans l'eau et additionné d'acide azotique pour détruire le carbonate et l'azotite qui s'était formé, a donné une liqueur incolore dans laquelle l'azotate argentique faisait naître un précipité présentant tous les caractères de l'azotate d'argent et noircissant à la lumière solaire.

Un sac étant fortement maculé dans un endroit, le morceau a été enlevé, et ce lambeau de toile, soumis à des lavages à l'eau distillée, a donné une liqueur présentant toutes les réactions qui ont été indiquées comme appartenant au produit de la macération du café.

Lorsque l'eau de la mer pénètre dans les sacs de café, il est évident qu'elle enlève à cette graine une forte partie des produits solubles qu'elle contient; que ce produit séjourne à la surface de la graine, et

que si la quantité d'eau est assez considérable pour qu'elle puisse s'écouler par un retour en sens inverse, elle pénètre les sacs et les macule, comme on le voit habituellement dans les cas d'avarie produite par l'eau de mer.

La présence du chlore et du magnésium en quantités très notables dans le liquide qui imprègne le café, ne peut laisser aucun doute sur la cause de l'avarie dont il est atteint.

La détermination de la quantité d'argent ou de magnésium eût pu même conduire, si cela eût été utile, jusqu'à faire connaître combien d'eau de mer était restée dans chaque sac. La dessiccation donnait, d'ailleurs, un indice de cette nature.

En résumé, j'ai cru pouvoir conclure des expériences que je viens de rapporter que le café soumis à mon expertise a été avarié par la présence de l'eau de la mer, et que cette eau a pénétré dans le café après la mise en sac.

Bordeaux. — Imp. G. GOUNOUILHOU, rue Guiraude, 11.

NOTE

SUR UNE

NOUVELLE DISPOSITION DE LA PILE

PAR M. MORISOT

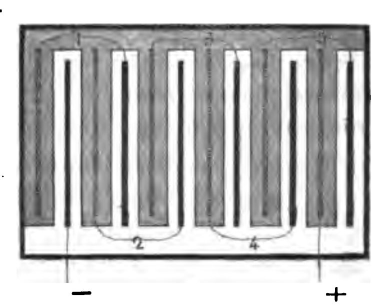
Professeur de Physique au Lycée de Bordeaux.

Les piles à deux liquides, si avantageuses par la constance de leurs effets, présentent l'inconvénient d'être longues à monter et d'exiger beaucoup de liquide, quand on veut associer un assez grand nombre d'éléments. J'ai essayé de supprimer le premier défaut et d'atténuer le second par la disposition suivante :

Une cuve non poreuse rectangulaire est divisée en deux compartiments par une cloison poreuse de forme sinueuse. Cette cloison détermine des auges qui communiquent de deux en deux, ensemble celles de rang pair, ensemble celles de rang impair. L'un des compartiments, celui des auges impaires par exemple, reçoit l'eau acidulée et les zincs. L'autre reçoit l'acide azotique et les charbons taillés en plaques. Les communications destinées à relier chaque zinc à un charbon s'établissent comme dans la pile de Munck, entre les zincs et les cuivres. Seulement, au lieu de soudures latérales, il y a ici des lames soudées à chaque zinc, serrées sur le charbon, distant des trois auges, et passant par dessus la cloison sinueuse tantôt d'un côté, tantôt d'un autre. De cette façon, chaque face d'un zinc regarde un charbon, et en est séparée par une cloison poreuse.

Dans la figure ci-jointe (plan de la cuve), la partie ombrée représente l'acide azotique où plongent les charbons; la partie

blanche représente l'eau acidulée avec les zincs. Il y a six éléments; le charbon libre étant pôle positif, et le zinc libre pôle négatif.



Cette disposition a été réalisée dans un modèle construit par M. Bouneau, préparateur au lycée, sur mes indications.

La surface plongée de charbon est, pour un seul côté, de 70 c. q., soit 7 c. sur 10.

Celle de chaque zinc sensiblement égale.

Les communications une fois établies, peuvent être maintenues. Pour mettre la pile en activité, il suffit de verser les deux liquides, ce qui se fait en un instant, et n'exigerait pas plus de temps si la cuve contenait un plus grand nombre d'éléments.

Quant au volume de liquide à mettre dans chaque compartiment, il est environ d'un demi-litre au plus.

Voici maintenant les effets constatés par moi dans plusieurs expériences :

1° Les électrodes étant terminées chacune par un crayon de charbon conducteur, on obtient une lumière plus intense qu'avec six éléments de Bunsen, grandeur ordinaire.

2° L'eau est décomposée avec la même rapidité que par quatre éléments Bunsen.

3° Seulement les effets m'ont semblé décroître d'intensité plus rapidement. Cela tient sans doute à l'excès de porosité des cloisons, excès facile à corriger dans un autre modèle, en faisant cuire la porcelaine à une plus haute température.

4° Enfin, la pile s'épuise au bout de quelques heures si on ne renouvelle pas les liquides. Il est évident qu'avec une dépense de liquides trois ou quatre fois plus faible, il faut bien que l'effet produit soit finalement plus faible que dans les piles ordinaires. Mais

pour quelqu'un qui ne veut employer la pile que peu de temps, par exemple obtenir la lumière électrique ou manifester l'action des courants sur les aimants et les courants, cette disposition offre l'avantage d'un montage rapide et facile, et une économie considérable dans la dépense d'acides.

Il est d'ailleurs aisé de maintenir sensiblement constante l'intensité de la pile en retirant partiellement l'acide azotique au moyen d'un siphon et en versant à la place de nouvel acide.

J'ai supposé les deux compartiments remplis l'un d'eau acidulée et l'autre d'acide azotique, comme dans les éléments de Bunsen. Je n'ai pas besoin de dire qu'au lieu de ces deux liquides on pourrait en mettre d'autres, par exemple du sulfate de cuivre, du sulfate de mercure, du bichromate de potasse, etc., au lieu d'acide azotique.

Je me propose d'essayer ces divers liquides; la comparaison sera facile, les dispositions et les quantités restant constantes.

FAITS RELATIFS

A LA

DÉCOMPOSITION DES CORPS PAR LA PILE

ET A L'OZONE

PAR MM. SERRÉ ET MORISOT
Professeurs au Lycée de Bordeaux.

D'après M. Schœnbein, qui a le premier étudié et nommé l'ozone, ce « corps ne se produit, dans la décomposition de l'eau » par la pile, que si l'eau est rendue conductrice par l'un des » acides sulfurique, azotique et phosphorique, ou par quelque sel » oxygéné. Les dissolutions de chlorures, bromures et iodures ne » donnent pas d'ozone. »

C'est ce dernier fait que nous avons voulu vérifier. Dans ce but, nous avons fait les expériences suivantes :

1° Nous avons décomposé, dans un voltamètre ordinaire à fils de platine, une dissolution étendue de chlorure de sodium. Le pôle négatif a dégagé en abondance de l'hydrogène, tandis que le liquide devenait graisseux et alcalin autour de ce pôle ; il s'y formait donc de la soude. — En même temps, le pôle positif dégageait, lentement d'abord et par petites bulles, un gaz qui se dissolvait dans l'eau et lui donnait la propriété de décolorer le papier de tournesol. Il y avait donc du chlore. — Après quelque temps, les bulles devenant plus abondantes, on a pu remplir une petite éprouvette de gaz. Ce gaz rallumait assez bien une allumette, à la manière de l'oxygène, bleuissait immédiatement le papier ozonométrique, enfin présentait l'odeur et la couleur du chlore. C'était donc un mélange de chlore et d'oxygène. Mais comme le chlore, aussi bien que l'ozone, bleuit le papier ozonométrique, et

plus encore que l'ozone, est odorant, il n'était permis de conclure ni à l'absence ni à la présence de l'ozone dans le mélange de gaz recueilli au pôle positif.

2° L'électrolyse de l'eau acidulée par un peu d'acide chlorhydrique nous a donné au pôle négatif de l'hydrogène, et au pôle positif un gaz soluble, jaune, offrant toutes les propriétés du chlore et éteignant une allumette en pleine ignition. Il n'y avait donc, cette fois, que très peu ou pas du tout d'oxygène.

Ainsi, dans les deux cas, ce que le courant avait décomposé de préférence ce n'était pas l'eau, mais la très petite quantité de sel ou d'acide ajoutée à beaucoup d'eau. Fait remarquable quand on considère que dans les mélanges d'acide sulfurique et d'eau, c'est au contraire l'eau seule ou presque seule qui est décomposée, même si l'acide est le plus abondant. Nous reviendrons d'ailleurs sur ces faits.

Nous avions observé, dans les deux expériences précédentes, que le mastic isolant qui forme le fond du voltamètre avait été décoloré et même attaqué. Pour éviter cette cause d'actions secondaires, nous avons répété les mêmes expériences en remplaçant le voltamètre ordinaire par l'appareil suivant, plus facile à construire et à conserver sans réparations.

Un tube en verre recourbé et fondu à son extrémité A, entoure exactement le fil de platine qui doit servir au passage du courant dans le liquide.

Ce tube, rempli de mercure, reçoit en B l'électrode de la pile.

Deux de ces tubes, plongés dans un vase quelconque, livre passage à l'électricité, et des éprouvettes, placées au-dessus du fil, reçoivent le gaz dégagé à chaque pôle. C'est cet appareil qui nous a servi dans toutes nos expériences d'électrolyse.

1° (A) — Une dissolution de chlorure de sodium marquant 1° à l'aréomètre de Beaumé, soumise à l'action du courant, dégage au pôle positif, après dissolution du chlore jusqu'à saturation du liquide, un gaz jaune dont la moitié est absorbée par la dissolution de potasse. Le reste, non absorbable, rallume énergiquement une allumette à la manière de l'oxygène.

(B) — Une dissolution marquant 12° Beaumé donne au pôle

positif un gaz dont le vingtième seulement n'est pas absorbé par la potassè.

(C) — Une dissolution marquant 24° Beaumé donne du chlore pur sans résidu d'oxygène.

2° (A) — De l'eau acidulée par de l'acide chlorhydrique marquant 1° Beaumé donne au pôle positif un mélange contenant seulement un cinquième d'oxygène.

(B) — De l'eau acidulée par le même acide et marquant 6° donne un mélange contenant à peine un quarantième d'oxygène.

(C) — De l'eau acidulée d'acide chlorhydrique marquant 12° donne un chlore pur.

Nous nous sommes servis, pour opérer ces décompositions, d'un courant fourni par dix éléments Bunsen. La même série d'expériences, répétée au moyen de trois éléments seulement, a donné les mêmes résultats, mais plus lentement.

3° — Les dissolutions de chlorure de potassium ont donné des résultats semblables à ceux fournis par le chlorure de sodium.

Des faits précédents, on peut conclure que dans l'électrolyse des dissolutions de chlorures alcalins ou d'acide chlorydrique dans l'eau, la décomposition de l'eau n'est que secondaire et n'a lieu d'une manière sensible que si la dissolution est très étendue. C'est là un phénomène qui nous a semblé plus intéressant que celui que nous voulions d'abord vérifier. Nous nous proposons d'étudier à ce point de vue d'autres liquides.

Si l'on soumet l'iodure de potassium à l'électrolyse, on obtient très peu d'oxygène au pôle positif, comme dans les cas précédents, et cet oxygène ne présente pas les caractères de l'ozone, comme on devait naturellement s'y attendre.

On lit dans les traités que l'ozone décompose l'iodure de potassium en mettant l'iode en liberté, mais que si on le fait agir sur une dissolution de ce sel, l'ozone est absorbé et transforme l'iodure en iodate. — Nous avons recueilli sur de l'eau distillée de l'oxygène ozoné lavé au sortir du valtamètre au moyen d'un tube abducteur, nous avons placé l'éprouvette sur une dissolution d'iodure de potassium bien neutre et incolore; *le liquide a jauni* au contact du gaz; donc de l'iode était mis en liberté; le liquide est devenu *alcalin,* il est resté jaune et alcalin pendant très longtemps. Nous nous proposons de revenir sur ce fait.

Nous avons essayé la même expérience avec le bromure de potassium. La dissolution incolore devient jaune au contact du gaz, le gaz perd tous les caractères de l'ozone. Le brome mis en liberté est réuni d'une manière évidente par l'éther. — Le bromure de potassium est donc, comme l'iodure de potassium, un absorbant de l'ozone.

Les chlorures alcalins traités de la même manière n'ont donné lieu à rien de semblable.

L'activité chimique de l'ozone, supérieure à celle de l'iode et même du brome, semble donc inférieure à celle du chlore.

L'extrême importance qu'on doit, selon nous, attacher à l'action que les corps les plus ordinairement employés peuvent exercèr sur l'ozone, nous a décidés à mettre l'ozone provenant de l'électrolyse de l'eau en contact avec plusieurs substances. La durée du contact a été prolongée quand l'action n'était pas immédiatement très sensible. Voici les principaux résultats obtenus dans cet ordre d'idée. Plusieurs étaient connus déjà.

1° L'ozone disparaît par le contact ou l'agitation, 30" au plus.	2° L'ozone disparaît par un contact d'au moins une minute avec	3° Ozone non altéré par un contact de plusieurs heures.
Poudre de charbon.	Mercure.	Lumière solaire.
Id. d'arsenic métallique.	Argent en poudre.	Eau (même après plusieurs jours).
Id. d'antimoine.	Oxyde d'argent précipité.	Le papier d'étain.
Étain pulvérisé.	Chaux en poudre.	L'aluminium
Fer porphyrisé.	Fleur de soufre. (Destruction imparfaite.)	Le platine en feuilles.
Bioxyde de manganèse.		L'alumine.
Oxyde brun de manganèse Mn^3O^4.		Massicot.
Acide arsénieux.		Oxyde rouge de cuivre.
Ammoniaq. en dissolution.		Azotate d'argent.
Potasse en dissolution.		
Eau de chaux.		
Bioxyde de barium.		
Colcothar.		
Rouille.		
Craie en poudre.		
Pierre ponce.		
Protosulfate de fer pulv.		
Hyposulfite de soude.		
Éther.		

THÉORIE

DE

LA SURSATURATION

PAR M. JEANNEL.

Quelques physiciens prétendent que la cause de la cristallisation des solutions salines sursaturées n'est autre que le contact accidentel de cristaux infiniment petits du même sel que le sel dissous, ou d'un sel isomorphe, qui voltigent avec les poussières atmosphériques.

Cette *pancristallie,* parallèle à la *panspermie* de M. Pasteur, et qui prétend même l'appuyer, ne me paraît guère soutenable. Il faudrait un progéniteur à un cristal comme à un être vivant! Mais les sels artificiels, qui n'existaient certainement pas dans l'atmosphère avant que les chimistes les eussent inventés, comment concevoir qu'ils aient pu cristalliser une première fois? L'alun, par exemple, l'acétate de soude, l'acétate de plomb, l'acétate de cuivre? Et les sels déliquescents qu'on fait aisément cristalliser en les desséchant par la chaux dans l'étuve, comme l'azotate de chaux, d'où pourrait venir, pour eux, le cristal progéniteur? Et les sels que les gaz atmosphériques décomposeraient?

Cette théorie, que j'ai appelée la *pancristallie,* repose sur un fait observé par M. Gernez, à savoir qu'il existe du sulfate de soude dans les poussières atmosphériques, et que toutes les conditions qui paraissent protéger, contre la cristallisation, les solutions sursaturées de sulfate de soude sont précisément celles qui empêchent la chute des poussières atmosphériques, ou qui sont incom-

patibles avec l'existence des cristaux de ce sel, savoir : les abris, le lavage et une température supérieure à + 33°.

Mais, en vérité, c'est abuser d'un seul fait, que d'appuyer sur lui une hypothèse aussi générale et aussi étrange que celle de la présence dans les poussières atmosphériques de tous les sels hydratés cristallisables.

D'ailleurs, tous les sels hydratés susceptibles d'offrir le phénomène de la sursaturation cristallisent par un abaissement de température suffisant, quoique restant abrités des poussières atmosphériques.

Voici un ballon contenant de l'acétate neutre de plomb. Ce sel a été fondu dans son eau de cristallisation; sa fusion a eu lieu à la température de + 56°,25 C. Je le laisse refroidir à l'abri de l'air, le goulot du ballon étant couvert d'une capsule. A l'air libre, le sel cristalliserait à son point de fusion, à + 56°,25, en dégageant du calorique; mais à couvert, il reste fondu en solution sursaturée jusqu'à + 30°. A cette température, il cristallise subitement et se prend en masse; en même temps il se réchauffe jusqu'à + 56°,25. Si j'accélère le refroidissement dans un point par le contact d'un corps froid, c'est dans ce point que la cristallisation prend naissance. Voilà donc une solution sursaturée qui ne peut persister qu'entre + 56°,25 et + 30°; à + 30°, elle engendre spontanément des cristaux.

Le phosphate de soude, fusible dans son eau de cristallisation à + 46°, reste en solution sursaturée, s'il refroidit à couvert, jusqu'à + 31°; à cette température, il cristallise spontanément, quoique restant couvert.

Il est facile de constater qu'un très grand nombre de solutions chaudes saturées cristallisent aussi bien à l'abri qu'au libre contact de l'air. Il me paraît donc démontré par l'expérience que la loi générale c'est la génération spontanée des cristaux. Dans les solutions chaudes qui refroidissent, le phénomène de la sursaturation est une exception à cette loi.

Ce n'est donc pas une nouvelle théorie de la cristallisation qu'il faut chercher, c'est seulement la théorie d'une exception à la cristallisation spontanée, dans de certaines limites peu étendues de température; et si l'on voulait absolument découvrir une analogie entre la génération des cristaux et celle des organismes, il

faudrait considérer l'hétérogénie comme le fait général et la génération comme l'exception.

Il est à remarquer que les sels dont les cristaux gardent une grande quantité d'eau de cristallisation sont les seuls qui offrent le phénomène de la sursaturation. Or, tout le monde sait que des influences très faibles peuvent modifier leur hydratation, et en même temps leur forme et leur solubilité. Parmi ces influences, il faut certainement compter l'attraction exercée par les parois des vases, ainsi que je l'ai démontré dans une Note adressée à l'Académie des Sciences, et qui a été insérée dans les *Annales de Chimie et de Physique* (octobre 1865).

RECHERCHES

SUR LES

MOUVEMENTS DE LA SENSITIVE

(*Mimosa pudica*, Linn.)

PAR M. PAUL BERT

Professeur de Zoologie à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Les expériences dont les résultats sont exposés dans le présent Mémoire, ont été exécutées pendant l'automne dernier (1866) sur des Sensitives dont je dois la communication à l'obligeance du savant directeur du Jardin botanique de Bordeaux, M. Durieu de Maisonneuve; c'est un devoir et une grande satisfaction pour moi de lui exprimer ici, tout d'abord, ma vive gratitude.

Dans mes recherches, je me suis proposé, en premier lieu, d'examiner jusqu'à quel point peut être soutenue la comparaison si souvent établie, et si souvent à la légère, entre les phénomènes de sensibilité et de mouvement communs à tous les animaux, et ceux que présente la Sensitive; puis, si faire se pouvait, de déterminer les propriétés élémentaires auxquelles il convient de rapporter l'explication de faits qui intéressent au plus haut degré la physiologie générale. Si, dans la poursuite de ces délicats problèmes, poursuite que je me propose de continuer, je ne suis pas encore parvenu aux limites extrêmes que nous assignent actuellement nos moyens d'investigation, j'ai cependant constaté des faits qui m'ont paru mériter d'être, dès aujourd'hui, publiés; d'autant plus qu'à ces faits d'ordre explicatif j'ai pu en ajouter d'autres d'ordre purement descriptif, qui ne manquent point d'intérêt.

On voudra bien considérer, en lisant les pages qui suivent, que mon but, en les écrivant, n'a été nullement de faire une mono-

examine la même plante deux ou trois heures après le coucher du soleil, elle a complètement changé d'aspect : ses folioles sont rapprochées et se touchent par leur face supérieure ; ses pétioles secondaires sont resserrés en un faisceau, tandis que ses pétioles primaires se sont inclinés vers la terre, et s'abaissent plus ou moins au-dessous de l'horizon.

Il est facile de voir que, pendant ces modifications, les pétioles primaires se sont mus dans un plan vertical suivant un mouvement simple ; que les pétioles de second ordre, au contraire, et les folioles, ont exécuté un mouvement complexe.

En effet, les pétioles secondaires se sont tout à la fois rapprochés l'un de l'autre et redressés par rapport à la direction du pétiole primaire dans le prolongement duquel ils arrivent à se placer ; ils deviennent ainsi les générateurs d'une portion de surface cônique.

Quant aux folioles, nous supposerons, pour décrire plus aisément leur mouvement, que leur plan est, au moment de l'expansion diurne, confondu avec le plan horizontal. Pendant la nuit, ce plan sera devenu vertical. Si l'angle de la nervure principale de la foliole avec le pétiole secondaire (je parle de l'angle ouvert en avant) était, avant comme après ce changement, un angle droit, le mouvement serait des plus simples ; mais il n'en est pas ainsi. Cet angle est, en effet, toujours plus grand pendant l'état diurne que pendant l'état nocturne. Il en résulte que le plan de la foliole exécute un mouvement de rotation dont la nervure principale est l'axe, tandis que cette nervure se tord sur elle-même, tout en décrivant un triangle, ou peut-être même une portion de surface cônique.

Le centre de tous ces mouvements des folioles et des pétioles de premier ou de second ordre se trouve dans ces renflements dont nous avons signalé l'existence à la base des pétioles et des nervures principales. Le renflement tout entier prend part au mouvement ; cela est manifeste, surtout pour les mouvements complexes des pétioles secondaires et des folioles.

Mais ces changements d'apparence, connus et décrits depuis longtemps, bien qu'avec moins de détails, par tous les auteurs, ne sont pas les seuls que présente une Sensitive pendant la période de vingt-quatre heures.

Entrant une nuit à deux heures du matin dans mon cabinet, où

se trouvaient quatre vigoureuses Sensitives dont j'avais, au début de la nuit, constaté l'état nocturne habituel, je fus très surpris de voir leurs pétioles primaires extraordinairement dressés, les pétioles secondaires ne présentant rien de particulier. Une explication toute naturelle se présentait, et je l'acceptai un instant : c'est que les pétioles de premier ordre avaient repris bien avant le jour leur position diurne. Cependant, leur redressement exagéré m'ayant mis en défiance, je me convainquis, lorsqu'au matin les folioles s'étalèrent, qu'ils s'étaient notablement abaissés. J'ai, depuis, vérifié maintes fois ce fait, et je me suis même assuré que, souvent, surtout lorsque la Sensitive est un peu fatiguée, ce redressement des pétioles primaires pendant l'état nocturne a lieu d'emblée, sans être précédé de l'abaissement habituel.

Mais ne nous bornons pas à ces indications vagues; précisons, par des chiffres empruntés à quelques exemples, la valeur des changements de position que nous venons de décrire, comme constituant le passage de l'état diurne à l'état nocturne.

Commençons par les pétioles secondaires :

7 septembre. — 9h du matin : temp., 24°; lumière diffuse.

Les pétioles secondaires, au nombre de quatre, sont ainsi espacés, qu'en comptant à partir du pétiole primaire on a les angles suivants : 100°, 55°, 60°, 55°, 90°. De plus, leur direction moyenne fait, avec celle du pétiole primaire, un angle d'inclinaison égal à 130°.

Le soir, vers 8 heures, ces pétioles sont redressés suivant la direction du pétiole primaire, et étroitement rapprochés l'un de l'autre.

Mais les pétioles de premier ordre sont beaucoup plus intéressants et m'ont beaucoup plus occupé. L'angle dont je vais donner les valeurs est l'angle inférieur fait par le pétiole avec la tige. Dans la suite de cette Note, je le désignerai quelquefois par l'expression : angle α.

6 septembre. — Temp., 22°.
8h 30m du matin. Lumière diffuse.

Feuille n° 1 [1] (n'a pas encore ouvert ses folioles)	Angle	155°
— 2	—	115°
— 3	—	145°

[1] En partant du sommet de la tige.

examine la même plante deux ou trois heures après le coucher du soleil, elle a complètement changé d'aspect : ses folioles sont rapprochées et se touchent par leur face supérieure; ses pétioles secondaires sont resserrés en un faisceau, tandis que ses pétioles primaires se sont inclinés vers la terre, et s'abaissent plus ou moins au-dessous de l'horizon.

Il est facile de voir que, pendant ces modifications, les pétioles primaires se sont mus dans un plan vertical suivant un mouvement simple; que les pétioles de second ordre, au contraire, et les folioles, ont exécuté un mouvement complexe.

En effet, les pétioles secondaires se sont tout à la fois rapprochés l'un de l'autre et redressés par rapport à la direction du pétiole primaire dans le prolongement duquel ils arrivent à se placer; ils deviennent ainsi les générateurs d'une portion de surface cônique.

Quant aux folioles, nous supposerons, pour décrire plus aisément leur mouvement, que leur plan est, au moment de l'expansion diurne, confondu avec le plan horizontal. Pendant la nuit, ce plan sera devenu vertical. Si l'angle de la nervure principale de la foliole avec le pétiole secondaire (je parle de l'angle ouvert en avant) était, avant comme après ce changement, un angle droit, le mouvement serait des plus simples; mais il n'en est pas ainsi. Cet angle est, en effet, toujours plus grand pendant l'état diurne que pendant l'état nocturne. Il en résulte que le plan de la foliole exécute un mouvement de rotation dont la nervure principale est l'axe, tandis que cette nervure se tord sur elle-même, tout en décrivant un triangle, ou peut-être même une portion de surface cônique.

Le centre de tous ces mouvements des folioles et des pétioles de premier ou de second ordre se trouve dans ces renflements dont nous avons signalé l'existence à la base des pétioles et des nervures principales. Le renflement tout entier prend part au mouvement; cela est manifeste, surtout pour les mouvements complexes des pétioles secondaires et des folioles.

Mais ces changements d'apparence, connus et décrits depuis longtemps, bien qu'avec moins de détails, par tous les auteurs, ne sont pas les seuls que présente une Sensitive pendant la période de vingt-quatre heures.

Entrant une nuit à deux heures du matin dans mon cabinet, où

se trouvaient quatre vigoureuses Sensitives dont j'avais, au début de la nuit, constaté l'état nocturne habituel, je fus très surpris de voir leurs pétioles primaires extraordinairement dressés, les pétioles secondaires ne présentant rien de particulier. Une explication toute naturelle se présentait, et je l'acceptai un instant : c'est que les pétioles de premier ordre avaient repris bien avant le jour leur position diurne. Cependant, leur redressement exagéré m'ayant mis en défiance, je me convainquis, lorsqu'au matin les folioles s'étalèrent, qu'ils s'étaient notablement abaissés. J'ai, depuis, vérifié maintes fois ce fait, et je me suis même assuré que, souvent, surtout lorsque la Sensitive est un peu fatiguée, ce redressement des pétioles primaires pendant l'état nocturne a lieu d'emblée, sans être précédé de l'abaissement habituel.

Mais ne nous bornons pas à ces indications vagues; précisons, par des chiffres empruntés à quelques exemples, la valeur des changements de position que nous venons de décrire, comme constituant le passage de l'état diurne à l'état nocturne.

Commençons par les pétioles secondaires :

7 septembre. — 9^h du matin : temp., 24°; lumière diffuse.

Les pétioles secondaires, au nombre de quatre, sont ainsi espacés, qu'en comptant à partir du pétiole primaire on a les angles suivants : 100°, 55°, 60°, 55°, 90°. De plus, leur direction moyenne fait, avec celle du pétiole primaire, un angle d'inclinaison égal à 130°.

Le soir, vers 8 heures, ces pétioles sont redressés suivant la direction du pétiole primaire, et étroitement rapprochés l'un de l'autre.

Mais les pétioles de premier ordre sont beaucoup plus intéressants et m'ont beaucoup plus occupé. L'angle dont je vais donner les valeurs est l'angle inférieur fait par le pétiole avec la tige. Dans la suite de cette Note, je le désignerai quelquefois par l'expression : angle α.

6 septembre. — Temp., 22°.

8^h 30^m du matin. Lumière diffuse.

Feuille n° 1 [1] (n'a pas encore ouvert ses folioles)	Angle	155°
— 2	—	115°
— 3	—	143°

[1] En partant du sommet de la tige.

7h 55m du soir. Temp., 24°.

Feuille 1 (a ouvert ses folioles dans la journée).....	Angle 112°; diff. : 43°
— 2...	100°; diff. : 15°
— 3...	88°; diff. : 57°

Voici un autre exemple où les différences vont beaucoup plus loin :

11 sept. — Temp., 19°.
8h 30m du matin. Lumière diffuse.

Feuille 1....................................	130°
— 2....................................	147°
— 3....................................	130°

10h 30m du soir. Obscurité complète.

Feuille 1....................................	30°; diff. : 100°
— 2....................................	90°; diff. : 57°
— 3....................................	95°; diff. : 35°

J'ai dit plus haut que l'état d'abaissement des pétioles était suivi d'un état de relèvement au-dessus de leur position pendant la veille. Voici l'observation fortuite qui m'a mis sur la voie de ce fait curieux :

Nuit du 14 au 15 sept. — Temp., 22°.
2h du matin.

1re Sensitive : Feuille 1..................................	160°
— — 2..................................	165°
2e Sensitive : Feuille 2..................................	145°
— — 4..................................	125°

les pétioles secondaires et les folioles étant dans l'état de sommeil complet.

Le 15 sept., à 9h du matin. — Lumière diffuse; temp., 21°.

1re Sensitive : Feuille 1........................	135°; diff. : 25°
— — 2........................	145°; diff. : 20°
2e Sensitive : Feuille 2........................	110°; diff. : 35°
— — 4........................	125°; diff. : 0°

Depuis, j'ai beaucoup multiplié ces observations, et je puis donner comme exemples les faits suivants :

22-23 Septembre : Température oscillant entre 16° et 17°.

	6h du soir. — Folioles ouvertes.	8h — Folioles fermées.	9h 30' — Pétioles secondaires rapprochés.	Minuit. —	5h du m. —	8h du m. — Folioles ouvertes.	1h après midi. —
Feuille 1..........	135	125	110	150	158	135	125
— 2..........	100	90	90	130	136	117	115
— 4..........	115	90	75	95	155	134	118

Fig. I.



2-3 Octobre :. Température oscillant entre 19° et 18°.

	6h 30m du s. — Fol. fermées. Pét. secondaires redressés, non rapprochés.	8h 10m — Pét. secondaires rapprochés.	10h —	4h du matin. — Pét. secondaires commençant à s'écarter, et les fol. à s'ouvrir.	8h 45m du mat. — Folioles bien ouvertes. Pét. secondaires très écartés.	1h 30m après midi. —
1re Sensitive.						
Feuille 1........	95	80	75	130	120	120
— 2........	85	65	60	150	110	120
— 3........	75	75	50	160	115	125
— 4........	105	90	80	160	135	145
2e Sensitive.						
Feuille 1........	110	45	60	140	145	
- 2........	95	65	45	140	105	
— 3........	70	50	30	140	120	
— 4........	85	80	70	140	120	

Les feuilles 1 des deux dernières Sensitives commencent à ouvrir leurs folioles:

Pour rendre plus manifestes ces oscillations, je les ai représen-

tées par des tracés graphiques dans lesquels les temps sont mesurés sur l'axe des abcisses, et les grandeurs d'angles sur celui des ordonnées. Une ligne noire horizontale indique la période nocturne; la fig. I représente l'observation du 22-23 septembre; les fig. II et III, celles du 2-3 octobre (fig. II, 1re Sensitive; fig. III, 2e Sensitive). On voit que la période d'exhaussement commence généralement vers 10 heures du soir, et a son maximum, le matin, vers 4 ou 5 heures. L'abaissement du pétiole commence avec le jour.

Fig. II.

Fig. III.

Dans l'exemple qui va suivre, et qui a été étudié pendant beaucoup plus longtemps, l'exhaussement nocturne n'est presque jamais précédé d'un abaissement.

18 Septembre : Temp. 18° à 17° | *19 Septembre : Temp. 17° à 16°*

	5h 45m du soir. — Folioles ouvertes.	7h — Folioles fermées, pétioles secondaires écartés.	8h 15m — Pétioles écartés.	10h — Pétioles secondres accolés.	1h 30m du m. —	5h 15m — Folioles encore fermées	9h 45m — Folioles ouvertes	3h 45m du s. —	5h 15m —	7h 10m — Foliol. fermées	10h —
Feuille 1.	140	150	140	140	155	160	145	130	id.	140	150
— 2.	125	125	120	115	125	165	145	105	id.	120	120
— 3.	105	»	115	110	120	160	120	90	id.	105	105

20 Septembre : Température 17° à 16°. — *22 Septembre : Temp.* id.

	4h du m. — Folioles fermées.	7h 15m —	12h 45m —	7h du s. — Folioles fermées.	6h du s. — Folioles fermées.	8h —	9h 30m —	Minuit. —
Feuille 1.......	165	150	125	135	125	135	140	170
— 2.......	155	160	105	110	100	100	90	100
— 3.......	145	140	95	95	95	90	75	75

23 Septembre : Temp. id. — *24 Septembre : T.* id.

	5h du m. — Folioles demi-ouvertes	8h —	Midi. —	4h —	6h —	8h 45m —	1h du m. —	7h —	11h —
Feuille 1........	150	130	125	125	id.	125	125	155	145
— 2........	150	115	110	110	id.	120	110	145	125
— 3........	145	110	90						

25 Septembre : Temp. id. — *26 Septembre : Temp. 19° à 17°.*

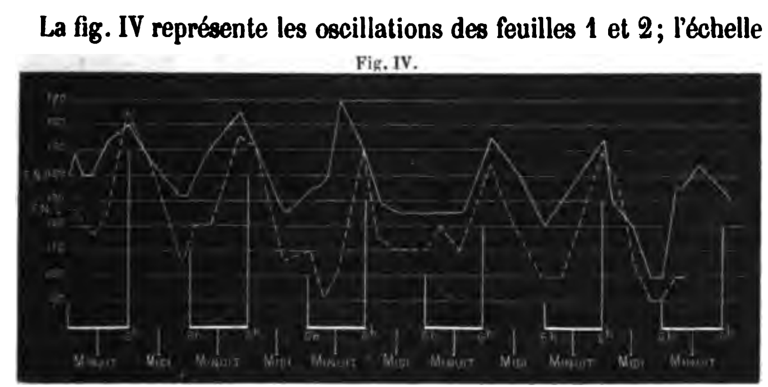
	6h 15m du soir.	10h	5h 30m du mat.	8h	12h	3h	5h 45m	8h 30m	10h
Feuille 1........	120	130	155	130	120	100	id.	135	id.
— 2........	100	100	150	135	105	90	id.	100	id.

27 Septembre : Temp. 17°.

	1h 30m du matin.	8h
Feuille 1..	145	130
— 2......	90	125

La fig. IV représente les oscillations des feuilles 1 et 2; l'échelle

Fig. IV.



des angles est la même que pour les fig. I, II, III; celle des temps est moitié moindre.

Autre exemple :

18 Septembre. — *19 Septembre.*

	6h du soir	8h	10h	1h 20m du m.	5h 20m	9h 45m	3h 45m	5h 15m	7h 15m	9h
Feuille 1..........	130	145	130	145	155	155	105	id.	135	135
— 2..........	127	145	125	85	180	155	110	id.	115	125
— 4..........	112	135	140	130	180	150	115	id.	115	125

20 Septembre.

	4h du matin.	7h 15m	Midi 45m	7h
Feuille 1........	150	145	100	100
— 2........	160	145	115	110
— 4........	145	145	125	120

En laissant de côté les apparentes irrégularités dont la raison est difficile à saisir, on voit que, d'une manière générale, les pétioles primaires, très abaissés à l'entrée de la nuit, se relèvent plus ou moins pendant la nuit, pour s'incliner ensuite de plus en plus à partir du matin jusqu'à la nuit suivante, le minimum et le maximum de l'angle α étant fournis généralement par l'état nocturne. Celui-ci reste donc exclusivement caractérisé par la fermeture des folioles et le rapprochement des pétioles secondaires.

On ne saurait invoquer, pour expliquer ces phénomènes, ni l'action de la lumière, ni celle de la température. C'est là un fait dont l'importance dépasse l'histoire particulière de la Sensitive, et qui devra être pris en considération toutes les fois qu'on tentera d'expliquer le sommeil des plantes.

A ce propos, je dirai que j'ai vu le réveil d'une jeune Sensitive, ou du moins le redressement rapide de ses pétioles principaux, s'opérer sous l'influence d'une simple bougie. Le tronçon d'un pétiole, auquel j'avais enlevé dès le matin ses pétioles secondaires et ses folioles, se releva comme les autres. L'influence de la lumière se fait donc directement sentir sur le renflement pétiolaire. Il est

très probable, comme le croyait Dutrochet, qu'il en est de même pour les renflements foliolaires.

IV. — Occupons-nous maintenant des mouvements consécutifs à une excitation.

Ils sont, avons-nous dit, semblables à ceux qui caractérisent le début de l'état nocturne : abaissement du pétiole primaire, rapprochement des pétioles secondaires, imbrication des folioles.

Les folioles, une fois mises en mouvement, accomplissent tout entière leur évolution; si les deux qui sont en face l'une de l'autre sont excitées, elles s'appliquent par leurs faces supérieures. Si l'une d'elles reste en place ou a été antérieurement enlevée, sa vis-à-vis ne dépasse pas la situation qu'elle aurait prise si elles eussent marché à la rencontre l'une de l'autre (Brücke).

Pour les pétioles secondaires et primaires, il en va différemment. L'amplitude de leurs mouvements varie un peu avec le degré de l'excitation, beaucoup avec les conditions de température extérieure, etc... Voici quelques chiffres propres à fixer les idées :

Pétioles secondaires : 7 sept.; temp., 24°. Si nous appelons *b, c, d, e,* les 4 pétioles; β, γ, δ, ϵ, les angles qu'ils faisaient avant l'irritation avec le prolongement du pétiole primaire; β', γ', δ', ϵ', les angles qu'ils font ensuite, nous trouvons : $\beta = 80°$, $\beta' = 60°$, $(\beta - \beta' = 20°)$; $\gamma = 30°$, $\gamma' = 18°$, $(\gamma - \gamma' = 12°)$; $\delta = 30°$, $\delta' = 18°$, $(\delta - \delta' = 12°)$; $\epsilon = 90°$, $\epsilon' = 50°$, $(\epsilon - \epsilon' = 40°)$.

Pétioles primaires : 6 sept. ; 8h 30m matin; lumière diff. ; temp., 22° :

Feuille 2, avant l'irritation... 115°, après... 60°; diff. : 55°
— 3.................. 145°.......... 80°; diff. : 65°

9h 50m matin; plein soleil; temp., 47° :

Feuille 2, avant l'irritation... 110°, après... 47°; diff. : 63°
— 3.................. 155°......... 85°; diff. : 70°

Cette amplitude de 70° est la plus considérable que j'aie rencontrée, à l'état diurne, dans plus de cent expériences mesurées, sauf dans un cas où la plante était exposée au soleil, à une température de 51°.

Lorsque la plante est dans l'état de sommeil, que ses pétioles primaires soient très redressés ou très abaissés, ils s'infléchissent toujours par l'excitation.

graphie des mouvements de la Sensitive. Je ne prétends pas non plus appliquer aux autres végétaux excitables (*Dionœa muscipula, Drosera, Oxalis sensitiva,* etc.) ce que je dis de la plante qui fait le sujet de mes expériences : une pareille généralisation serait tout à fait prématurée. Je me contente, pour le moment, d'exposer les faits que j'ai observés, et d'en tirer les conséquences prochaines.

Ceci posé, j'entre en matière.

I. *Anatomie.* — La configuration générale de la Sensitive (*Mimosa pudica,* Linn.) est connue de tout le monde. La structure histologique de ses différentes parties a été précisée par des travaux nombreux, au premier rang desquels il faut placer ceux de Meyen (1) et de Brücke (2). Nous nous bornerons donc à rappeler très succinctement des faits anatomiques et descriptifs auxquels nos recherches personnelles ne nous ont rien permis d'ajouter d'important.

La Sensitive est une légumineuse à feuilles stipulées, alternes, composées-pinnées. Les pétioles de second ordre sont au nombre de deux dans les trois ou quatre premières feuilles; de quatre, opposés deux à deux, dans les feuilles postérieures. Les folioles sont opposées; il n'en existe point de terminale impaire.

A la base de chaque foliole et de chaque pétiole secondaire ou primaire, se trouve un renflement; ce renflement ne contient pas de moelle : l'étui fibro-vasculaire des pétioles y forme une colonne pleine. Autour de cet axe ligneux, le liber et l'écorce s'épaississent et constituent le renflement. L'épiderme qui les revêt ne contient pas de stomates. Le liber est formé de cellules laissant entre elles des méats remplis de gaz. Les cellules de l'écorce forment, au contraire, une masse continue; la plupart, mais non toutes, comme on le dit d'ordinaire, contiennent un gros globule qui les remplit presque complètement, et paraît de nature graisseuse. Je me suis assuré que ces globules manquent, ainsi que la couche aérifère, dans le renflement pétiolaire de l'acacia (*Robinia pseudo-acacia*). Selon Brücke, la paroi des cellules est plus épaisse dans la partie supérieure que dans la partie inférieure du renflement. Les parties latérales sont semblables à la partie supérieure.

(1) *Pflanzenphysiologie.* Bd. III.

(2) *Ueber die Bewegungen der Mimosa pudica. Archiv. für Anatomie, Physiologie, und Wissenschaftliche Medicin.* 1848.

Dans la très jeune feuille, en préfoliation, et non encore excitable, on ne voit pas de renflement; mais le microscope montre déjà un épaississement du tissu cellulaire cortical. Il n'y a alors ni globules, ni couche aérifère. Dans une feuille dont le pétiole a 15^{mm}, et qui n'a pas encore ouvert ses folioles, je trouve les corps globuleux et la couche aérifère; le pétiole primaire est un peu sensible.

II. *Mouvements.* — Le *Mimosa pudica* présente, comme chacun sait, deux ordres de mouvements : 1° des mouvements *lents,* constituant ce qu'on appelle d'ordinaire l'*état de sommeil* et l'*état de veille* de la plante; 2° des mouvements *brusques,* consécutifs à une excitation plus ou moins vive : ceux-ci ont mérité à la Sensitive son nom et sa célébrité.

Ces deux ordres de mouvements ont pour résultat des apparences semblables : dans les deux cas, les pétioles primaires s'abaissent, les folioles se rapprochent par leur face supérieure. Il est tout naturel qu'on les ait comparés l'un à l'autre, et même par suite identifiés. On ne doit donc pas être surpris de voir que, à l'exception de Brücke, dont je ne connaissais point le travail au moment où j'ai fait mes recherches, tous les auteurs aient considéré les mouvements excités de la Sensitive comme un état de sommeil provoqué. C'était encore l'opinion soutenue par Fée ([1]) dans son important Mémoire, un peu postérieur à celui de Brücke. Nous verrons plus loin que ce sont deux ordres de phénomènes tout à fait différents quant à leur cause intime. Il n'en est pas moins vrai qu'ils se ressemblent si bien (au moins à une certaine période du mouvement nocturne), qu'une seule description peut servir pour tous deux.

Prenons comme exemple les mouvements lents de l'oscillation quotidienne.

III. — Si l'on examine vers le milieu d'une journée d'été une Sensitive placée à la lumière diffuse et à l'abri du vent, on voit qu'à chaque feuille les folioles des deux rangées sont étalées dans un même plan; que les pétioles secondaires sont écartés les uns des autres comme les branches d'un éventail, et que les pétioles de premier ordre sont redressés au-dessus de l'horizon. Que si l'on

([1]) Mémoire physiologique et organographique sur la Sensitive et les plantes dites sommeillantes (*Mémoires de la Société d'Histoire naturelle de Strasbourg,* t. IV. Strasbourg, 1849). Fée a depuis ajouté quelques faits intéressants à ses anciennes découvertes (*Bulletin de la Société de Botanique de France,* 1858).

examine la même plante deux ou trois heures après le coucher du soleil, elle a complètement changé d'aspect : ses folioles sont rapprochées et se touchent par leur face supérieure; ses pétioles secondaires sont resserrés en un faisceau, tandis que ses pétioles primaires se sont inclinés vers la terre, et s'abaissent plus ou moins au-dessous de l'horizon.

Il est facile de voir que, pendant ces modifications, les pétioles primaires se sont mus dans un plan vertical suivant un mouvement simple; que les pétioles de second ordre, au contraire, et les folioles, ont exécuté un mouvement complexe.

En effet, les pétioles secondaires se sont tout à la fois rapprochés l'un de l'autre et redressés par rapport à la direction du pétiole primaire dans le prolongement duquel ils arrivent à se placer; ils deviennent ainsi les générateurs d'une portion de surface cônique.

Quant aux folioles, nous supposerons, pour décrire plus aisément leur mouvement, que leur plan est, au moment de l'expansion diurne, confondu avec le plan horizontal. Pendant la nuit, ce plan sera devenu vertical. Si l'angle de la nervure principale de la foliole avec le pétiole secondaire (je parle de l'angle ouvert en avant) était, avant comme après ce changement, un angle droit, le mouvement serait des plus simples; mais il n'en est pas ainsi. Cet angle est, en effet, toujours plus grand pendant l'état diurne que pendant l'état nocturne. Il en résulte que le plan de la foliole exécute un mouvement de rotation dont la nervure principale est l'axe, tandis que cette nervure se tord sur elle-même, tout en décrivant un triangle, ou peut-être même une portion de surface cônique.

Le centre de tous ces mouvements des folioles et des pétioles de premier ou de second ordre se trouve dans ces renflements dont nous avons signalé l'existence à la base des pétioles et des nervures principales. Le renflement tout entier prend part au mouvement; cela est manifeste, surtout pour les mouvements complexes des pétioles secondaires et des folioles.

Mais ces changements d'apparence, connus et décrits depuis longtemps, bien qu'avec moins de détails, par tous les auteurs, ne sont pas les seuls que présente une Sensitive pendant la période de vingt-quatre heures.

Entrant une nuit à deux heures du matin dans mon cabinet, où

se trouvaient quatre vigoureuses Sensitives dont j'avais, au début de la nuit, constaté l'état nocturne habituel, je fus très surpris de voir leurs pétioles primaires extraordinairement dressés, les pétioles secondaires ne présentant rien de particulier. Une explication toute naturelle se présentait, et je l'acceptai un instant : c'est que les pétioles de premier ordre avaient repris bien avant le jour leur position diurne. Cependant, leur redressement exagéré m'ayant mis en défiance, je me convainquis, lorsqu'au matin les folioles s'étalèrent, qu'ils s'étaient notablement abaissés. J'ai, depuis, vérifié maintes fois ce fait, et je me suis même assuré que, souvent, surtout lorsque la Sensitive est un peu fatiguée, ce redressement des pétioles primaires pendant l'état nocturne a lieu d'emblée, sans être précédé de l'abaissement habituel.

Mais ne nous bornons pas à ces indications vagues; précisons, par des chiffres empruntés à quelques exemples, la valeur des changements de position que nous venons de décrire, comme constituant le passage de l'état diurne à l'état nocturne.

Commençons par les pétioles secondaires :

7 septembre. — 9h du matin : temp., 24°; lumière diffuse.

Les pétioles secondaires, au nombre de quatre, sont ainsi espacés, qu'en comptant à partir du pétiole primaire on a les angles suivants : 100°, 55°, 60°, 55°, 90°. De plus, leur direction moyenne fait, avec celle du pétiole primaire, un angle d'inclinaison égal à 130°.

Le soir, vers 8 heures, ces pétioles sont redressés suivant la direction du pétiole primaire, et étroitement rapprochés l'un de l'autre.

Mais les pétioles de premier ordre sont beaucoup plus intéressants et m'ont beaucoup plus occupé. L'angle dont je vais donner les valeurs est l'angle inférieur fait par le pétiole avec la tige. Dans la suite de cette Note, je le désignerai quelquefois par l'expression : angle α.

6 septembre. — Temp., 22°.
8h 30m du matin. Lumière diffuse.

Feuille n° 1 [1] (n'a pas encore ouvert ses folioles)	Angle	155°
— 2	—	115°
— 3	—	145°

[1] En partant du sommet de la tige.

et qu'on n'obtient rien en piquant avec une aiguille fine dans l'intervalle des nervures; mais si celles-ci sont intéressées, le mouvement aussitôt a lieu. De même, on peut enlever délicatement un lambeau d'écorce des pétioles sans que le renflement en soit averti; mais si l'on entame les faisceaux, il s'incline aussitôt. Ainsi, le tissu cellulaire des renflements et le tissu fibro-vasculaire des pétioles et des nervures seraient les deux seuls tissus excitables.

Les parties excitables peuvent être isolées sans perdre leur propriété. J'ai pu, par exemple, à l'imitation (alors involontaire) de Fée, conserver des folioles sensibles pendant plus de huit jours, après la section du pétiole principal, en son milieu. Le tronçon de celui-ci restait excitable et exécutait les mouvements quotidiens pendant deux jours environ.

VI. *Transmissibilité.* — Les expériences de Dutrochet [1] ont prouvé que cette propriété appartient exclusivement aux faisceaux ligneux : ceux-ci enlevés, toute transmission est arrêtée; conservés, au contraire, après l'ablation de la moelle et de l'écorce, ils laissent passer l'impression.

La transmission se fait dans les deux sens; la section d'un pétiole primaire a pour double résultat l'abaissement du moignon et la fermeture des folioles. De même, la section d'une tige fait abaisser tout à la fois le pétiole supérieur et le pétiole inférieur à la blessure.

Dutrochet a mesuré la rapidité de la transmission. Il a vu qu'elle est plus grande dans les pétioles (8 à 15^{mm} par seconde) que dans la tige (2 à 3^{mm} par seconde). Elle serait, selon lui, indépendante de la température ambiante, ce qui m'étonne beaucoup.

Dans un cas que nous rapportons à titre d'exemple, une foliole terminale étant entamée avec des ciseaux, la foliole correspondante se ferme en même temps qu'elle. Après 2^s environ, la paire suivante se relève d'une saccade brusque; après 10^s, de même la 3e paire; à 15^s la 4e; à 25^s la dernière paire (il y en avait vingt) de ce pétiole secondaire. A 35^s, les deux folioles basilaires du pétiole secondaire voisin (il n'y en a que deux à cette feuille) se relèvent; puis succes-

[1] *Recherches anatomiques et physiologiques sur la structure intime des animaux et des végétaux et sur leur motilité.* Paris, 1824. — *Mémoires pour servir à l'histoire anatomique et physiologique des animaux et des végétaux*, Paris, 1837, t. I.

sivement, de bas en haut, toutes les autres paires; à 1m 15s, tout est fermé. La réouverture se fait dans un ordre exactement inverse, mais avec assez de lenteur pour que les folioles du second pétiole n'aient pas encore terminé leur mouvement quand ceux du premier le commencent.

La rapidité de la transmission est plus grande dans le sens centripète que dans le sens centrifuge, contrairement à ce qu'avait dit Dutrochet. Si on tranche par la moitié une foliole située vers le milieu du pétiole secondaire, on voit le tronçon se relever, et presque simultanément la foliole symétrique; puis, par paires, les folioles inférieures, c'est à dire plus voisines de la tige, jusqu'à l'origine du pétiole secondaire. Ici, le mouvement des folioles continue sur le pétiole symétrique; mais il se propage en sens inverse, et toujours par paires. Pendant ce temps, les folioles supérieures à la foliole lésée se relèvent également par paires. Mais il est facile de voir que la propagation de l'impression est beaucoup plus lente dans ceux-ci que dans les folioles inférieures. Elle éprouve évidemment des résistances qui se manifestent encore par ceci, qu'elle s'arrête bien plus tôt dans sa marche centrifuge que dans sa marche centripète.

De même, la rapidité et l'énergie de la transmission à travers la tige sont plus considérables de haut en bas que de bas en haut. Sur une Sensitive qui possède six feuilles, numérotées de haut en bas, je coupe le pétiole primaire de la feuille n° 3; entre 3 et 5 secondes après, les feuilles inférieures, dans l'ordre 4, 5, 6, abaissent leur pétiole : les feuilles supérieures 2 et 1 restent immobiles.

VII. *Excitants.* — Les excitants susceptibles de déterminer les mouvements de la Sensitive peuvent être d'ordre mécanique (piqûre, section, pincement, pression tendant à abaisser ou à élever les pétioles, etc.); ou d'ordre physique (chaleur, électricité, changement brusque de température, suppression brusque de l'insolation, exposition soudaine aux rayons solaires, etc...); ou d'ordre chimique (acides, bases caustiques). Je ne ferai ici qu'une observation : lorsque, à l'aide d'un courant induit traversant le pétiole, j'ai obtenu quelque mouvement soit de ce pétiole, soit des folioles, l'effet du courant avait probablement été porté jusqu'à action caustique, car je trouvais, dès le lendemain, très malade

ou même desséchée, la partie qu'il avait traversée. Si l'on fait passer le courant à travers un certain nombre de paires de folioles, on peut exciter les folioles, les pétioles secondaires et le pétiole primaire; les premières folioles qui se relèvent sont celles qui sont comprises entre les rhéophores.

VIII. *Conditions de l'excitabilité.* — Une température supérieure à 10°, l'exposition régulière à la clarté du jour, un état normal de santé, sont, comme on le sait depuis longtemps, des conditions nécessaires pour qu'une Sensitive puisse être excitée. J'ai fait quelques expériences pour déterminer le degré le plus élevé de température qu'une Sensitive pourrait supporter sans perdre son excitabilité, ou ayant perdu son excitabilité, sans mourir. Je dirai d'abord que toutes les fois que l'excitabilité a été complètement et définitivement détruite, j'ai toujours vu la plante elle-même succomber. Mais l'excitabilité peut momentanément disparaître pour reparaître ensuite. (Julius Sachs) (1). Les températures supportées par mes Sensitives ont été beaucoup plus élevées que la température indiquée comme limite supérieure par Julius Sachs (52° c.).

En effet, le 6 sept., une Sensitive a été placée au soleil, sous une cloche, à 9h 5m; à 9h 50m, la température de l'air est 47° : les feuilles 2 et 3 me donnent 63° et 70° de chute par l'irritation. A 10h 10m, la plante, reposée à la lumière diffuse, est remise au soleil. A 10h 45m, la température est 51°; l'excitation donne des chutes de 83° et de 57°. A cette haute température, les folioles sont à moitié fermées.

J'ai même vu une Sensitive rester sensible dans une étuve humide, où la température, prise au-dessus de la terre du pot, a monté, en 17m, de 28° à 56°, et dans les 8m suivantes, de 56° à 62°.

L'action des excitations successives et la nécessité du repos ont été signalées depuis longtemps, et l'observation classique de Desfontaines sur une Sensitive en voiture est connue de tout le monde. Mais je ne connais pas d'expérience faite avec soin sur cette *accoutumance* aux excitations que présente la Sensitive. J'ai cru bien faire de combler cette petite lacune, au moins pour ce qui a rapport aux pétioles primaires.

(1) *Handbuch der experimental-physiologie des Pflanzen.* Leipzig, 1865, p. 55.

6 sept. ; tempér. 31°.

$2^h\ 36^m$: angle avant l'irritation, 120° ; après, 50°.

De $2^h\ 36^m$ à $2^h\ 45^m$, la feuille est irritée de 5^s en 5^s; de $2^h\ 45^m$ à $2^h\ 50^m$, de 10^s en 10^s; de $2^h\ 50^m$ à 3^h, de 30^s en 30^s. Malgré ces excitations répétées, le pétiole se relève aussi vite que si on l'eût laissé en repos : $2^h\ 41^m$, 70°; 2^h 46, 80°; $2^h\ 52^m$, 102°; 3^h, 120°. Il n'a mis à remonter que 24^m, ce qui est à peu près le temps ordinaire.

Lorsque les impressions ne sont pas aussi rapidement répétées; lorsqu'on attend pour exciter de nouveau une feuille qu'elle ait repris sa position première, on la trouve indéfiniment sensible. De plus, il se présente ce fait intéressant, que, le plus souvent, elle remonte à la suite de l'excitation au dessus de son premier point d'équilibre.

Exemple :

6 sept. ; temp., 31°.

A $1^h\ 7^m$: angle avant l'excitation, 118°; après, 62°.

A $1^h\ 30^m$: l'angle est 118°; à $1^h\ 36^m$, il est 128° (29^m d'ascension) et s'y fixe. A $1^h\ 43^m$, nouvelle excitation : l'angle devient 84°; à $2^h\ 10^m$, il est redevenu 128° (27^m). A $2^h\ 30^m$, troisième excitation : l'angle devient 86°; à $2^h\ 54^m$, il est redevenu 128° (24^m). A $2^h\ 54^m$, quatrième excitation : l'angle devient 85°; à $3^h\ 20^m$, il est 128° (26^m).

Autre exemple :

7 sept. :

Feuille n° 1, avant l'excitation.. 145°	à $3^h\ 10^m$, est devenu..	150°
— après.............. 80°		
3, avant.............. 125°	....	135°
— après.............. 70°		
4, avant.............. 133°	....	145°
— après.............. 68°		

J'arrive à des faits plus importants en eux-mêmes et par les conséquences qu'on a voulu tirer de leur observation incomplète. Nous nous occuperons plus tard de celles-ci : parlons d'abord des faits.

Lorsqu'on soumet une Sensitive à l'action des vapeurs de chloroforme ou d'éther, on constate qu'elle devient insensible aux irritations : la motilité a disparu, si bien que la plante reste ce qu'elle était au moment de l'application du poison. Si celle-ci a eu lieu tandis que la Sensitive était au repos, elle demeure avec ses folioles étalées, ses pétioles dressés; si, au contraire, on venait de

l'exciter, ses folioles restent imbriquées, ses pétioles abattus. (Le Clerc, de Tours) (1).

Tel est le mode d'action de ces substances mises en contact avec la plante tout entière. Mais il est tout autre si on les fait agir sur une partie seulement de la plante. Cette partie seule est immobilisée. Je m'en suis assuré par l'expérience suivante :

Une feuille, en place, est introduite (folioles et moitié du pétiole primaire) dans le col d'une petite cornue tubulée; ce col est soigneusement luté. Quand les folioles se sont rouvertes, je fais tomber par la tubulure un petit morceau de coton imbibé d'éther, et je referme rapidement. Rien ne se produit tout d'abord; les folioles restent étalées; le reste de la plante conserve complètement et son apparence et son excitabilité. Mais, après dix ou quinze minutes, les folioles incluses dans la cornue commencent à se crisper : l'action de l'éther les a tuées; vers le même temps, on voit, sur le reste de la Sensitive, qui était demeuré parfaitement excitable, les folioles se fermer, les pétioles s'abattre, et cela par chutes soudaines; les folioles se ferment par paires de bas en haut, presque toujours avant l'abaissement de leur pétiole.

Ainsi, l'éther n'a d'action immobilisante que sur la feuille avec laquelle il est mis en contact. Mais, par l'irritation violente qu'il détermine en la tuant, il excite des mouvements généraux dans la plante tout entière. Or, il en est de cette excitation comme de celle que produit un agent chimique énergique (une goutte d'acide sulfurique, par exemple); elle a presque toujours pour conséquence la suppression de la sensibilité pendant un temps plus ou moins considérable, et souvent même la mort de la Sensitive en expérience.

Réciproquement, en plaçant un rameau de Sensitive dans la tubulure d'une petite cornue, les feuilles restant au dehors, puis, lutant l'ouverture et introduisant par le col de la cornue un morceau d'ouate imbibé d'éther, j'ai vu que la sensibilité des pétioles et des folioles était parfaitement conservée; mais celles-ci se ferment par irritation de l'éther sur le rameau.

Le chloroforme agit identiquement de même. Le Clerc (de

(1) *Sur les mouvements de la Sensitive.* (*Comptes-rendus*, Académie des Sciences, t. XXXVII, XXXVIII, XL.)

Tours), dans son étude sur l'action des anesthésiques, avait déjà vu une partie des faits que je viens de signaler.

IX. — Dans l'état diurne normal, le pétiole principal s'élève d'un certain angle au dessus de l'horizon. Après l'irritation, il s'abaisse généralement au dessous de la ligne horizontale. Il était intéressant de connaître la valeur de la force déployée par le renflement pour élever ainsi, au bout d'un long bras de levier, le poids des folioles.

Voici les résultats d'expériences tentées dans ce but :

8 sept. Angle $\alpha = 115°$. Pour ramener le pétiole à l'horizontale, il faut ajouter à son extrémité la plus éloignée une petite nacelle pesant 0g650, et, dans la nacelle, un poids de 0g20. Or, si nous assimilons le pétiole à un levier du 2e genre, et si nous supposons que le point d'application de la force que nous cherchons à évaluer est au milieu du renflement basilaire, nous trouvons que le bras de levier de cette force a pour longueur 3mm; la longueur totale du pétiole est de 50mm. En outre, les folioles et les pétioles secondaires pèsent 0g3, et leur centre de gravité est situé à 15mm dans le prolongement du pétiole primaire. Il résulte de ceci que la force du renflement fait équilibre, avec un bras de levier de 3mm, à un poids de 0g85 au bout d'un levier de 50mm, plus un poids de 0g3 au bout d'un levier de 65mm. Un calcul simple montre que cette force est équivalente à 20gr65.

X. — Étudions maintenant d'un peu plus près le mode d'action de ces renflements tout à la fois excitables et moteurs.

Des expériences qui remontent à Lindsay (1790), et qu'avait imaginées, de son côté, Dutrochet (1824), lequel ne pouvait connaître le travail alors inédit du botaniste anglais [1], ont montré que si l'on enlève jusqu'au bois la partie supérieure du renflement pétiolaire principal, celui-ci se relève au dessus de sa position primitive. Si, de même, on enlève la partie inférieure, le pétiole s'abaisse plus bas qu'à la suite d'une excitation, et ne se relève plus. On peut enfin obtenir une torsion latérale en enlevant un lambeau d'un côté du renflement Des résultats analogues sont la suite d'opérations pratiquées sur les renflements des pétioles secondaires ou sur ceux des folioles.

[1] Les résultats n'en furent publiés qu'en 1827 par Burnett et Mayo.

Il est bon d'indiquer que ces phénomènes ne sont en rien modifiés par l'intervention préalable des anesthésiques qui ont immobilisé la plante.

Ainsi, toujours le pétiole se dirige du côté où a été faite l'amputation. On peut se représenter l'axe fibro-vasculaire comme enveloppé d'un ensemble de ressorts qui agissent simultanément, chacun d'eux le poussant du côté opposé à sa propre situation : l'inférieur poussant en haut, etc. La position d'équilibre du pétiole dépend de l'énergie de tous ces petits ressorts bandés qui se combattent deux à deux; si, maintenant, nous enlevons l'un de ces ressorts, l'antagoniste pousse victorieusement le pétiole dans le sens où rien ne lui résiste plus.

Si l'on pratique dans le renflement une section parallèle à l'axe, mais incomplète, on voit que le lambeau demeuré adhérent s'allonge et dépasse la surface de section sur laquelle il ne peut plus être exactement appliqué. C'est là une autre preuve de l'existence de ces ressorts, ou, pour mieux dire, de ce tissu qui tend à occuper le plus de place possible, et presse par suite sur l'axe ligneux.

Pendant la position de repos diurne, le ressort inférieur fait équilibre à la fois au poids des folioles et à la force du ressort supérieur; en outre, il presse sur celui-ci par un excédant de puissance qui se traduit par l'élévation du pétiole au-dessus de l'horizon, et dont les poids indiqués plus haut peuvent donner une idée.

Il était intéressant de comparer la puissance d'action réciproque des deux moitiés supérieure et inférieure du renflement pétiolaire. Pour y parvenir, j'ai mesuré le poids nécessaire pour ramener à l'horizontale le pétiole intact; puis j'ai enlevé le ressort supérieur: le pétiole s'étant alors relevé plus haut qu'auparavant, j'ai cherché combien il fallait de poids pour le ramener de nouveau à l'horizontale. Ce dernier poids peut donner la valeur de la puissance du ressort inférieur, et la différence entre les deux poids, la valeur de la puissance du ressort supérieur.

Reportons-nous à l'exemple cité à la page précédente.

L'angle était 115°. Pour ramener le pétiole à l'horizontale, il a fallu ajouter un poids tel, que le ressort inférieur faisait alors équilibre à une force de 20gr65, et, en outre, à la tension du ressort supé-

rieur. Les poids ôtés, la plante reposée, l'angle revenu à sa valeur primitive, j'enlève le ressort supérieur : le pétiole s'élève jusqu'à 135°. L'équilibre établi (à 2 heures après midi), je vois que, pour ramener l'angle à 90°, il faut ajouter dans ma nacelle non plus seulement 0^g20, mais 0^g80. Eu égard aux bras de levier, les 0^g60 de supplément représentent pour le ressort supérieur une valeur de 10^g. Quant au ressort inférieur, il équivaut à $20^g65 + 10^g = 30^g65$. Le lendemain, à 9 heures du matin, l'énergie du ressort inférieur paraît augmentée, peut-être parce que la partie épargnée par la section dans le ressort supérieur a été détruite par dessiccation. Pour réduire l'angle à 90°, il faut ajouter un poids qui représente, pour le ressort supérieur absent, une valeur de 13^g30; celle du ressort inférieur devient ainsi 33^g95.

En résumé, la puissance des deux parties du renflement est environ dans le rapport de 1 à 3, durant l'état diurne.

Autre exemple :

14 sept. Intact, le pétiole portait à l'horizontale 1^g8, qui représentait une force de 32^g5. Après l'ablation du renflement supérieur, il faut, pour le ramener au même point, 2^g55, représentant une force de 45^g9. Ainsi, le ressort inférieur vaut 45^g9; le supérieur, $45^g9 - 32^g4 = 13^g5$: le rapport $\frac{459}{135} = 3,4$.

XI. — Ces faits établis, on voit que le mouvement dans le renflement pétiolaire peut être rapporté hypothétiquement à trois [illegible]ses : 1° Diminution d'énergie du ressort inférieur, ayant pour [illegible]e plus grande liberté d'action du ressort supérieur; 2° augme[illegible]d'énergie de celui-ci; 3° existence, dans la partie inférieure [illegible]flement, d'une substance contractile, analogue à la substance [illegible]laire, susceptible, en se raccourcissant, de tirer [illegible] en bas le pé[illegible]e.

[illegible]dions ces tr[illegible]hypothèses, en rapport avec les mouvements so[illegible], provoqués [illegible]r une excitation.

Di[illegible]'abord qu[illegible]ontrairement à l'assertion de Dutrochet [1], un pétio[illegible]partie supérieure de son renflement ne continue pas moins à se mouvoir sous l'influence des excitations; mais l'amplitude du mouvement est alors considérablement diminuée.

[1] *Recherches*....., p. 57.

Exemple :

9 sept. ; temp., 23°. A 3h du soir, l'angle $\alpha = 130°$; après l'irritation, il devient 75°; diff. : 55°. J'enlève la moitié supérieure du renflement. A 8h 15m, l'angle est 127°; après l'irritation, il devient 85°; diff. : 42°.

Mais cette diminution s'explique aisément par l'absence du ressort supérieur, qui n'ajoute plus son action à celle du poids des folioles pour forcer le ressort inférieur à céder davantage.

Cette expérience nous montre que la modification apportée par l'excitation de la partie inférieure du renflement suffit pour obtenir un mouvement.

Mais nous pouvons prouver, en outre, que l'énergie du ressort supérieur n'est pas changée par l'excitation. Pour cela, enlevons le ressort inférieur : le pétiole tombera, et prendra une certaine position d'équilibre. Celle-ci bien établie, après un repos d'une journée, nous ne pourrons par aucun moyen obtenir de modifications dans la valeur de l'angle α, qui devrait évidemment diminuer si le ressort supérieur augmentait de puissance lorsqu'il est irrité.

Il est donc démontré que le ressort supérieur n'est pour rien dans la détermination du mouvement. Nous restons conséquemment en présence des deux dernières hypothèses : le mouvement est-il dû à un affaissement du ressort inférieur qui se laisse vaincre par la pesanteur, ou à une contractilité propre à ce ressort?

Tout d'abord, il est facile de voir qu'on ne saurait considérer la moitié inférieure du renflement comme une sorte de muscle capable de rapprocher par sa contraction ses deux points d'attache. En effet, des sections perpendiculaires à l'axe du renflement, sections allant jusqu'au bois, n'empêchent nullement les mouvements provoqués. Il est même remarquable, pour le dire en passant, qu'elles n'empêchent pas davantage les mouvements nocturnes.

Exemple :

2h du matin, $\alpha = 160°$; 8h, 130°; 10h du soir, 90°; 1h 30 du matin, 110°; 5h 45, 155°; 2h 15 du soir, 130°.

Mais attaquons plus directement la question. Si l'inflexion du pétiole a lieu par suite du poids des folioles qu'il ne peut plus supporter, le changement d'angle consécutif à l'excitation devra diminuer lorsqu'on enlève ces folioles; il devra, au contraire,

augmenter, si elle est due à une contraction s'opérant dans la moitié inférieure du renflement. Or, il diminue manifestement. Nous pouvons aller plus loin encore; et puisque l'action de la pesanteur complique notre étude, nous pouvons la supprimer. Sur un pétiole dont la moitié supérieure du renflement a été enlevée, coupons d'abord les pétioles secondaires et leurs lourdes folioles. La motilité du renflement persiste; mais l'angle qu'il décrit diminue. Couchons alors la plante, en telle sorte que le plan de mouvement du pétiole en expérience soit horizontal. Lorsque la Sensitive est reposée, mesurons avec soin l'angle α; puis irritons la partie inférieure, la seule conservée, du renflement : la valeur d'α ne change en rien.

Il n'existe donc pas, dans cette partie inférieure, de tissu contractile, car il eût agi pour diminuer l'angle α, entraînant facilement le faible poids du tronçon de pétiole. Et, cependant, le renflement inférieur est entré en action, puisque si nous relevons avec grande précaution la plante, nous voyons le pétiole s'incliner peu à peu, en signe de diminution de résistance du renflement inférieur.

J'ai à peine besoin de dire que ce sont là des expériences très délicates, et dans lesquelles les plus minutieuses précautions sont nécessaires.

Ainsi, le ressort inférieur a cette propriété de perdre par l'excitation directe ou propagée une partie de son énergie.

Le ressort supérieur, dont la texture histologique est la même que celle du ressort inférieur, jouirait-il, mais à moindre degré, bien entendu, de la même propriété? J'étais fort désireux de le démontrer, mais je n'ai pu le faire d'une manière nette. Les expériences que j'ai tentées pour y parvenir étaient identiques à celle qui vient d'être décrite; seulement, la plante avait dû être renversée, le pot en l'air. J'ai obtenu ainsi de très faibles changements d'angle, d'environ 5°, qui semblent indiquer une petite diminution dans l'énergie du ressort supérieur, à la suite de l'excitation. Mais je ne fais nulle difficulté d'avouer que ces expériences ne permettent pas une conclusion définitive. Ce qui reste seulement bien démontré, c'est que le ressort supérieur n'augmente pas de puissance par l'excitation, et que le changement d'angle tient exclusivement à la modification du ressort inférieur.

XII. — Étudions maintenant la manière dont les choses se passent pendant la modification lente désignée sous le nom d'*état nocturne* ou de *sommeil*.

Enlevons la partie supérieure d'un renflement pétiolaire. Nous verrons alors, comme l'ont vu d'autres auteurs, que le pétiole s'abaisse lors de l'établissement de l'état nocturne; mais ce qu'ils n'ont pas vu, c'est que, plus tard, il se relève plus haut que pendant le jour. Si même la plante en expérience était de celles qui, par suite de fatigue, n'abaissent pas leurs pétioles à l'entrée de la nuit, l'exhaussement a lieu d'emblée dans le pétiole blessé comme dans les autres.

Exemple :

22 sept.; partie supérieure du renflement enlevée. A 6ʰ du soir, l'angle est 105°; à 8ʰ, 138°; à 9ʰ 30, 148°; à minuit, 150°; à 5ʰ du matin (folioles ouvertes), 145°; à 8ʰ, 140°; à midi, 95°; à 4ʰ du soir, 125°. Aux mêmes heures, la feuille n° 1 donnait les chiffres suivants : 125°, 135°, 140°, 170°, 153°, 130°, 123°, 125°.

Ainsi, le ressort inférieur peut diminuer, puis augmenter de force pendant l'état nocturne. Mais, pour le ressort supérieur, je l'ai toujours vu, dans cette circonstance, acquérir plus d'énergie. Cela peut être mis en évidence par des expériences analogues à celles que nous venons de rapporter. Enlevons la moitié inférieure du renflement : le pétiole tombe à un certain degré; or, à l'entrée de la nuit, nous le voyons s'incliner davantage encore.

Exemples :

8 sept.; 11ʰ 30 du matin. Angle avant irritation, 130; après, 90. J'enlève la moitié inférieure du renflement : l'angle tombe à 30°; à 11ʰ 15ᵐ du soir, il est 20°; à 10ʰ, 8°.

18 sept. Moitié inférieure du renflement enlevée depuis quatre jours. Pétioles secondaires enlevés. A 6ʰ du soir, angle 40°; 8ʰ, 31°; 10ʰ, 30°; 1ʰ 20ᵐ du matin, 22°; 5ʰ, 18°; 9ʰ 45ᵐ, 18°; 3ʰ 45ᵐ du soir, 50°; 9ʰ, 40°; 4ʰ du matin, 20°; 7ʰ 15ᵐ, 20°; midi 45ᵐ, 48°; 7ʰ du soir, 50°. Aux mêmes heures, une feuille intacte de la même plante donne les angles 127°, 147°, 125°, 85°, 180°, 154°, 110°, 127°, 160°, 143°, 115°, 110°.

Ce dernier exemple est très intéressant, en ce qu'il nous montre le rôle de l'axe ligneux, qui fait effort pour ramener une position

moyenne; c'est à lui seul, en effet, qu'on peut attribuer le relèvement diurne de notre pétiole lorsque se relâche le ressort supérieur.

Fig. V.



La fig. V traduit en graphique les chiffres que nous venons d'indiquer. Le tracé A représente le mouvement d'un pétiole dont le ressort supérieur venait d'être enlevé (Exp. du 22 sept.). Le tracé B, celui d'un pétiole dont le ressort inférieur a été enlevé, et le tracé B', celui d'une feuille intacte de la même plante (Exp. du 18 sept.).

XIII. — Ainsi, tandis que les mouvements consécutifs à une excitation ont pour raison unique une diminution brusque d'énergie dans la moitié inférieure du renflement, les mouvements nocturnes sont toujours déterminés par une augmentation lente de la force de la moitié supérieure, accompagnée d'une diminution d'abord, puis d'une augmentation de puissance de la moitié inférieure.

Voici donc une différence originelle établie entre ces deux ordres de mouvements, que leur ressemblance dans l'apparence extérieure avait fait identifier par tous les auteurs. Brücke, le premier et le seul, dans un travail dont je n'ai eu connaissance qu'après avoir obtenu la plupart des résultats ci-dessus énoncés, a tenté de montrer que ces deux états ne sont point identiques. Son procédé de démonstration n'était pas des plus simples.

En premier lieu, il établissait qu'un pétiole est susceptible, par le retournement de la plante, racine en haut, de décrire, sous l'influence du poids des folioles, un plus grand angle après qu'avant l'irritation, ce qui prouve que son articulation a, par suite de cette irritation, perdu de sa raideur. Cherchant ensuite si, après l'établissement de l'état nocturne (où il ne voyait qu'un abaissement du pétiole), l'articulation de celui-ci présenterait la même laxité, il a trouvé qu'il n'en était rien, et que, dans l'état nocturne, le renflement n'est jamais moins, mais souvent plus tendu que pendant le jour. Son état est donc justement opposé de celui qu'il présente après l'irritation. Mais si je suis d'accord avec le physiologiste allemand sur ces faits, je diffère beaucoup de lui, comme on le verra plus loin, sur l'explication qu'il convient d'en donner.

Malgré les expériences de Brücke, malgré celles qui viennent d'être rapportées, des doutes pouvaient encore s'élever, ou du moins la question n'avait pas reçu une de ces solutions qui s'imposent clairement à l'esprit. Je me suis demandé s'il ne serait pas possible de séparer l'une de l'autre ces deux propriétés de la Sensitive, et d'en supprimer une par quelque procédé expérimental, en laissant l'autre complètement intacte. Après avoir essayé sans succès bien manifeste la chaleur, le froid, la fatigue, etc., j'eus recours à divers poisons, et l'éther me donna, plus complet que je ne l'eusse espéré, le résultat désiré. J'ai vu, en effet, des plantes insensibilisées par son influence exécuter tous les mouvements concomitants à l'état diurne et nocturne, sans nulle modification.

Exemple :

4 octobre. Journée chaude, Sensitive très excitable.

A 4 heures 45 minutes du soir (temp. 21°), je la place sous une cloche, à côté d'un petit vase où se trouve du coton imbibé d'éther. Les angles sont :

Feuille 1, 115°; 2, 103°; 3, 110°; 4, 110°.

A 8 heures, nul mouvement provocable dans les pétioles, même en coupant le pétiole 4.

A 10 heures, angles : F. 1, 120°; 2, 90°; 3, 55°; 4 (tronçon), 80°; 5, 65°.

A 4 heures du matin, folioles largement ouvertes; insensibilité partout (je lève la cloche pour mieux m'en assurer). Angles : F. 1

et 2 : gênées par la cloche dans leur érection; F. 3 et 4 : à la verticale; F. 5, 140°.

A 8 heures du matin, folioles largement ouvertes; toujours insensibilité, aux folioles comme aux pétioles. Angles : F. 2, 150°; 3, 120°; 4, 135°; 5, 140°. J'enlève la cloche.

A 10 heures 45 minutes, la sensibilité est parfaitement revenue aux pétioles et aux folioles. La fig. VI représente les oscillations de la feuille n° 3.

Fig. VI.



Ainsi, l'éther a supprimé les mouvements provocables, mais n'a en rien influé sur les mouvements quotidiens.

Ces expériences ne permettent aucune espèce de doute sur la légitimité de la distinction que nous avons établie entre les mouvements de l'état nocturne et ceux qui sont consécutifs à une excitation.

XIV. — Essayons maintenant de remonter aux phénomènes plus intimes dont ceux que nous venons de décrire sont la manifestation.

Dutrochet avait vu que des fragments d'un renflement pétiolaire, placés dans l'eau, se courbent en cercle sur leur côté intérieur. Brücke a repris et précisé ce fait. Répondant à une demande de J. Müller, il a montré que la torsion en dedans de la moitié d'un renflement, torsion qui s'exagère par l'immersion dans l'eau, a pour raison l'allongement des couches extérieures, et non le raccourcissement de la partie axile, qui ne paraît pas changer de longueur.

Je me suis fréquemment assuré de l'exactitude de ces observations. J'ai constaté que si l'on enlève des couches superficielles, elles se recourbent en dedans à l'air, mais en dehors dans l'eau; les couches profondes se recourbent en dehors à l'air, en dedans à l'eau, et cela quel que soit le côté du renflement auquel on a enlevé ces fragments, qu'il soit en état de repos ou en état d'abaissement après irritation. Une moitié tout entière de renflement se contourne comme les couches profondes. Au reste, le renflement moteur d'un acacia ordinaire *(Robinia pseudo-acacia)* se comporte de même. Bien plus, les mêmes effets se constatent sur les pétioles d'une plante morte.

Ces mouvements, dus aux phénomènes osmotiques des cellules du renflement, sont tout à fait comparables à ceux que présentent les différentes parties mobiles de la Sensitive lorsque survient l'état nocturne. On peut, sur la plante vivante ou même sur la plante morte, obtenir sur place des mouvements du même ordre par l'intervention de liquides endosmotiques ou exosmotiques.

Enlevons toute la moitié supérieure d'un renflement pétiolaire; l'équilibre rétabli, plaçons sur la plaie une gouttelette d'eau : aussitôt un mouvement énergique d'ascension se manifeste, et la gouttelette d'eau est entièrement absorbée par le tissu cellulaire de la partie inférieure du renflement. Si, au lieu d'eau pure, nous eussions placé de la glycérine, l'effet aurait été inverse, et le pétiole se serait abaissé. On peut même forcer un pétiole relevé par l'eau à revenir à son point primitif, en employant la glycérine. Il va sans dire que des faits analogues sont présentés par toutes les parties du renflement.

Les exemples suivants fixeront les idées à ce sujet :

9 sept. Ressort supérieur enlevé : équilibre établi à 110°. A 10^h 35^m, je place une goutte d'eau sur la surface de section : le pétiole s'élève, et à 11^h 15^m l'angle est 165°.

La puissance ascensionnelle acquise par le renflement inférieur par l'addition d'eau a pu être aisément mesurée :

10 sept. Ressort supérieur enlevé de l'avant-veille; pétiole un peu malade, insensible; angle 117. J'ajoute à l'extrémité du pétiole des poids susceptibles de le ramener à l'horizontale; ces poids sont 0^g90, au bout d'un bras de levier de 37^{mm}. De plus, les folioles et

pétioles secondaires pèsent 0g47, qui agissent au bout d'un bras de levier de 62mm. Cela représente, pour le ressort inférieur, qui n'a qu'un bras de levier de 2mm5, une force de 24g70. J'ajoute alors une goutte d'eau à l'aisselle de la feuille; le pétiole monte et atteint la verticale. Pour le ramener à l'horizontale, il faut ajouter aux poids précédemment employés 0g21, qui représentent une augmentation de force de 3g11, c'est-à-dire un huitième de la force primitive.

Un pétiole fait, après l'ablation de la partie supérieure du renflement, l'angle 100°. J'ajoute une goutte de glycérine sur la surface de section (10h du matin). En 10m, l'angle tombe à 50°. Le soir, à 6h, il est à 180°. A 10h du soir, 110°; à 5h 1/2 du matin, 150°.

Un pétiole presque insensible fait, après l'ablation de la partie supérieure du renflement, l'angle 85°. J'ajoute une goutte d'eau (10h du matin), le pétiole s'élève et se fixe à 120°. J'essuie l'eau, et mets une goutte de glycérine : l'angle tombe à 60°. Le soir, à 6h, il est remonté à 180°, et la feuille fait effort pour aller au-delà (elle déploie une force de 48g). A 10h, l'angle n'est plus que de 90°; mais à 5h 30m du matin il est remonté à 155°.

La surélévation du pétiole, consécutive à la présence d'une goutte d'eau, n'empêche pas l'excitabilité du renflement. Il m'est maintes fois arrivé de voir un pétiole en voie d'élévation endosmotique, très rapide, tout à coup s'affaisser sous l'excitation de son propre mouvement, pour reprendre ensuite sa marche ascentionnelle.

Ainsi, pour moi, comme pour Brücke, les changements de formes caractéristiques du sommeil, qui sont de leur nature progressifs et lents, doivent être rapportés à l'augmentation de tension de toute la substance du renflement.

Dans les pétioles primaires, cette augmentation, au début de l'état nocturne, se fait surtout sentir dans la partie supérieure du renflement, et a pour conséquence l'abaissement du pétiole; les positions différentes de celui-ci sont en rapport avec la prédominance plus ou moins marquée de telle ou telle partie du renflement. Dans les folioles, c'est toujours la partie inférieure du renflement qui l'emporte.

Maintenant, si l'on me demande d'où vient l'eau qui gonfle ainsi pendant la nuit les ressorts des renflements, j'avouerai très volontiers que je n'en sais rien. Cette imbibition est-elle en rapport avec la moindre évaporation constatée dans les feuilles à

l'abri de la lumière? Je n'oserais l'affirmer. Il y a là toute une série d'expériences que je compte entreprendre dans la campagne prochaine. J'indiquerai seulement ce fait intéressant, que pour des feuilles coupées avec leur rameau dont l'extrémité plonge dans l'eau, la fermeture nocturne des folioles a lieu près d'une heure avant celle des feuilles en place.

XV. — Arrivons aux mouvements provoqués. Bien différents de ceux dont nous venons de nous occuper, ils sont brusques, rapides. Cela seul aurait dû suffire à faire rejeter l'explication que nous avons acceptée pour les phénomènes du sommeil. Ce ne peut être la perte d'eau qui laisse s'affaisser le ressort inférieur, car une semblable perte doit évidemment demander un temps notable pour s'exécuter. « La rapide expansion du tissu cellulaire, dit très juste-
» ment J. Müller, n'est ni prouvée ni même probable; les cellules ne
» peuvent point attirer avec assez de promptitude, à travers leurs
» parois, les liquides nécessaires à leur expansion. » Le relèvement du pétiole, il est vrai, s'effectue assez lentement pour ne pas prêter à cette objection; mais celle-ci nous paraît victorieuse pour ce qui a rapport à la chute des pétioles ou au relèvement des folioles.

D'ailleurs, nous savons que l'éther peut isoler les mouvements nocturnes d'avec les mouvements provoqués; abolissant ceux-ci, laissant ceux-là intacts. Il y a là quelque chose de comparable à l'action du curare, qui dissocie la contractilité musculaire d'avec l'excitatricité nerveuse. Cette différence dans l'influence d'un poison dénote une différence fondamentale dans les propriétés qui donnent naissance aux deux ordres de phénomènes. De même, l'influence des anesthésiques, qui empêchent le relèvement des pétioles abaissés, comme leur abaissement lorsqu'ils sont relevés, indique l'identité de nature dans la raison première de ces deux mouvements inverses : il s'agit là d'une seule et même propriété de la variation d'énergie du ressort inférieur qui est paralysée par l'éther.

Nous n'admettrons donc pas, comme l'a fait Brücke, que la raison intime des mouvements provocables ou quotidiens est la même : la modification osmotique des différentes parties du renflement. Nous les séparerons, au contraire, en nous bornant à déclarer que le ressort inférieur perd de sa force par l'excitation, sans savoir en quoi consiste cette déperdition d'énergie, en affir-

mant seulement qu'elle n'a pas sa source dans des modifications hygrométriques. Quel rôle y joue la couche à méats inter-cellulaires remplis d'air? Quel rôle les gros globules inclus dans chaque cellule? Nous ne saurions actuellement le dire.

Il m'a été impossible, malgré mes efforts, de suivre au microscope les changements d'apparence du tissu cellulaire du renflement pendant le mouvement. Dans une tranche assez mince pour permettre une observation histologique, je ne suis jamais parvenu à exciter un mouvement. D'autres observateurs, et entr'autres Cohn, ont été plus habiles, je le sais. Je ne désespère donc point de voir par mes propres yeux. Mais je ferai remarquer que les plissements qu'ils ont signalés pendant le mouvement ne prouvent pas, comme on l'a cru, une contraction du tissu : tout raccourcissement, actif ou passif, pourra produire un semblable effet.

XVI. — Le point qui m'intéressait le plus dans l'étude des mouvements provoqués de la Sensitive était la comparaison tant de fois établie entre les phénomènes présentés par cette plante, et ceux que nous montrent les animaux. La Sensitive possède, en certaines de ses parties, l'*excitabilité;* d'autres parties *transmettent* l'excitation à des organes *moteurs,* lesquels sont eux-mêmes directement *irritables;* enfin, ces organes semblent être le siége d'*actes réflexes* qui ont pour résultat des mouvements en un point éloigné de celui qui a été impressionné (¹).

Les prétendues actions réflexes sur lesquelles divers auteurs ont beaucoup insisté pour rapprocher la Sensitive des êtres animés, ne méritent nullement ce nom. Tout d'abord, elles sont exactement proportionnelles à l'intensité de l'excitation, et s'étendent plus ou moins loin, selon que celle-ci est plus ou moins énergique. En second lieu, elles sont dans un rapport de continuité avec la partie impressionnée : l'excitation d'une foliole, par exemple, est l'occasion de mouvements dans les autres folioles, à partir de celle que l'on a excitée. De plus, jamais elles ne concourent, comme les actes réflexes des animaux, en divers lieux de l'être, à une action d'ensemble; enfin, elles n'ont rien de véritablement réflexe, c'est à dire que jamais l'impression sensible n'est transmise à un centre d'où elle *se réfléchit* sur un organe moteur. Ce sont là des faits de

(¹) Voyez, à ce sujet, parmi les travaux récents, les *Recherches physiologiques et anatomiques sur le mouvement des végétaux,* de Le Clerc. Tours, 1861.

propagation dans l'excitation, propagation suivant une direction unique ou suivant une direction multiple, bifurquée, pour ainsi dire, selon la partie impressionnée et l'énergie de l'excitation.

La propriété de l'organe moteur, dirons-nous en continuant le parallèle, est fort différente de la contractilité musculaire, puisqu'elle se manifeste, non par un raccourcissement actif, mais par une diminution d'énergie dans un ressort bandé. Il nous reste donc l'impressionnabilité et la transmissibilité. La première de ces propriétés paraît n'appartenir qu'aux éléments cellulaires doués de motricité et aux éléments vasculaires doués de transmissibilité. Ceci constitue un rapprochement remarquable au point de vue des propriétés élémentaires entre la plante et l'animal, car, chez celui-ci, on n'obtient de mouvement qu'en excitant directement le muscle ou en irritant soit un nerf, soit une terminaison nerveuse. Mais, pour établir les éléments d'une comparaison au point de vue fonctionnel, comme on l'a si souvent tenté, il faudrait supposer un nerf recueillant les excitations, et les portant directement à un muscle sans passer par un centre nerveux; puis communiquant son ébranlement à d'autres nerfs semblables, et simplement juxtaposés, qui iraient commander des mouvements plus éloignés. C'est là un mode de relations élémentaires inconnu dans le Règne animal.

L'action des anesthésiques, à laquelle quelques physiologistes ont attaché beaucoup d'importance au point de vue qui nous occupe, éloigne la Sensitive des animaux au lieu de la rapprocher d'eux. Comment, en effet, agit l'éther sur les animaux? En modifiant, à la suite de l'absorption, les centres nerveux, dont il supprime l'impressionnabilité sensitive, ou en modifiant, par contact direct, les extrémités périphériques des nerfs sensibles, auxquels il enlève leur impressionnabilité. Mais la contractilité musculaire reste parfaitement intacte, et aussi la conductibilité nerveuse; la conséquence de ces influences est le sommeil, l'état de repos complet de l'animal. Au contraire, l'éther, mis en rapport avec une Sensitive entière, la frappe d'immobilité dans la situation où il l'a trouvée. Si elle est en repos, il détruit momentanément et l'excitabilité et la motricité de ses renflements; il attaque de même la propriété de transmission des faisceaux fibro-vasculaires, qu'on peut impunément couper, dans les pétioles secondaires d'une feuille

éthérisée après isolement, sans obtenir de mouvements dans les feuilles voisines. Ce sont autant de différences avec ce qui se passe chez les animaux. Il faut noter, cependant, que les cils vibratiles des animaux sont immobilisés par l'éther de la même manière que les renflements moteurs de la Sensitive.

Nous voyons, en définitive, que la seule analogie importante que présente la Sensitive avec les animaux, quant aux actes qui nous occupent, consiste dans les propriétés des nerfs d'une part, des faisceaux fibro-vasculaires (et probablement des vaisseaux seuls) d'autre part, d'être impressionnables, de transmettre l'impression reçue et d'exciter le mouvement.

XVII. — Nous résumons les résultats qui nous paraissent les plus intéressants dans ce travail par les propositions suivantes :

1°. — Les pétioles primaires de la Sensitive, après s'être abaissés dans les premières heures de la nuit, se relèvent avant le jour bien au dessus du niveau qu'ils conserveront pendant la période diurne : celle-ci étant, contrairement à ce qu'on enseigne d'ordinaire, caractérisée plutôt par l'abaissement que par l'élévation des pétioles primaires.

2°. — Les renflements moteurs situés à la base des pétioles et des folioles peuvent être considérés comme composés de ressorts faisant effort pour pousser la partie qu'ils meuvent du côté opposé à celui qu'ils occupent (Lindsay, Dutrochet.....). Dans les pétioles primaires, la valeur du ressort supérieur est à celle du ressort inférieur, dans l'état diurne, environ comme 1 est à 3.

3°. — Le mouvement provoqué a lieu par suite d'une perte d'énergie de l'un des ressorts, celle du ressort antagoniste n'étant nullement augmentée, et peut-être même un peu diminuée.

4°. — Il n'existe aucun tissu contractile déterminant le mouvement provoqué.

5°. — Les mouvements nocturnes ont lieu par suite d'une augmentation de tension des renflements moteurs. Dans les pétioles primaires, le ressort supérieur augmente d'énergie pendant la nuit; le ressort inférieur, après avoir un peu diminué, augmente aussi consécutivement : de la puissance réciproque de ces ressorts dépend la position du pétiole aux divers instants de la nuit.

6°. — Les mouvements rapides provoqués par une excitation et les mouvements lents spontanés, qui constituent l'oscillation quo-

tidienne, sont donc des phénomènes d'ordre tout à fait différent. L'éther les sépare les uns des autres, abolissant les mouvements provocables, respectant les mouvements spontanés.

7°. — Ceux-ci reconnaissent pour phénomène antérieur une modification dans l'afflux du liquide que contient le parenchyme des renflements. Les autres n'ont pu être encore rapportés à une cause prochaine.

8°. — La Sensitive se rapproche des êtres animés par la présence d'éléments qui transmettent les excitations et déterminent les mouvements (transmissibilité, excitatricité motrice), et par ce fait que l'excitabilité n'appartient chez elle qu'aux éléments doués de motricité ou de transmissibilité.

9°. — Elle s'en éloigne par l'absence d'éléments contractiles, et par les rapports anatomiques et fonctionnels directs qu'affectent ses éléments excitables, transmetteurs et excitateurs, avec ses éléments moteurs.

Bordeaux, avril 1867.

NOTE

SUR LA

MORT DES POISSONS DE MER DANS L'EAU DOUCE

PAR LE Dr PAUL BERT

Professeur de Zoologie à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

La plupart des poissons de mer, surtout de ceux qui habitent au large, meurent rapidement quand on les plonge dans l'eau douce, et, réciproquement, la plupart des poissons d'eau douce périssent très vite dans l'eau salée. Ceci arrive non-seulement pour les poissons, mais pour les mollusques, les crustacés. Il est vrai que lorsque la transition est lentement et progressivement opérée, on observe de remarquables résultats de tolérance. C'est ce que nous présentent, par exemple, dans l'état de nature, les saumons, anguilles, lamproies, etc., et divers expérimentateurs, entre autres Beudant, ont obtenu de cette tolérance des exemples encore plus curieux.

Mais dans les cas de changement subit suivi de mort rapide, à quoi est due cette mort? A l'action directe du sel sur les branchies ou à la suppression de cette action? A la différence de composition des eaux entraînant des différences dans leur pouvoir osmotique, et, par suite, dans l'exécution des phénomènes respiratoires?

Le magnifique aquarium d'Arcachon, où se conservent dans le plus parfait état de santé les poissons, même de haute mer, m'a permis de faire, pour m'éclairer sur cette difficulté, les expériences suivantes :

1re série. — Dans divers vases cylindriques sont placés en quantité égale (un litre et demi) : 1° de l'eau douce; 2° de l'eau douce

ramenée au même degré aréométrique que l'eau de mer des bassins au moyen de sucre ordinaire.

J'introduis, dans chacun de ces vases, un griset *(Sparus mendola)* et un rouget *(Mullus)*. La moyenne des expériences me donne :

Pour les grisets : dans l'eau douce,	mort après	43	minutes.
— sucrée,	—	62	—
Pour les rougets : dans l'eau douce,	mort après	14	—
— sucrée,	—	55	—

Mais les animaux sont assez mal à l'aise dans ces vases étroits; ainsi, un des grisets placés comme témoins dans de semblables quantités d'eau de mer, est mort en 50 minutes. Je me procure donc des vases plus vastes et à surface plus étendue.

2e série. — Petits aquaria parallélipipédiques :

Quantité de liquide........... 4 lit. 80.

Résultats moyens :

Grisets : eau douce,	mort après	86	minutes.
— sucrée,	—	153	—
Rougets : eau douce,	mort après	44	—
— sucrée,	—	68	—

Le résultat fourni par les grisets est surtout intéressant, parce que des poissons de même espèce se sont fort bien comportés dans les aquaria semblables et remplis d'eau de mer où je les avais conservés comme témoins, tandis que les rougets, redoutant davantage le confinement, un de leurs *témoins* est mort après 104 minutes, un autre après 200 minutes.

On voit, d'après ces quelques expériences, que les poissons de mer (au moins les spares et les rougets) vivent notablement moins longtemps dans l'eau douce que dans l'eau sucrée, de même densité que l'eau de mer. Il est donc très vraisemblable que la différence des densités est pour beaucoup dans la mort des animaux à respiration branchiale, transportés de l'eau salée dans l'eau douce ou réciproquement.

Très probablement encore, la différence des densités agit surtout en raison de la différence des pouvoirs osmotiques avec laquelle

elle est en rapport. Si mes poissons ont succombé assez rapidement dans l'eau sucrée, cela tient sans doute principalement à ce que, à densité égale, l'eau de mer et l'eau douce sucrée n'ont pas le même pouvoir osmotique; il faut aussi faire intervenir d'autres facteurs, tels que la solubilité, probablement différente, de l'oxygène dans l'un et l'autre liquide.

Mais comment la différence de pouvoir osmotique a-t-elle pour conséquence la mort du poisson? Faut-il, dans le cas du poisson de mer transporté dans l'eau douce, attribuer sa mort à l'asphyxie consécutive à l'épaississement de la membrane branchiale, ou au gonflement par l'eau des franges branchiales, gonflement qui arrêterait la circulation? Les recherches que j'ai pu faire à ce sujet ne m'ont rien appris jusqu'ici; mais j'espère beaucoup de celles que me permettra d'entreprendre, dans la campagne prochaine, l'installation due à la généreuse initiative de la Société scientifique d'Arcachon. Ce n'est là qu'une des mille questions que pourront soulever et résoudre ceux qui sauront profiter du laboratoire et des bassins qu'elle mettra si libéralement, à partir de l'été prochain, à la disposition des travailleurs.

Je n'ai pas seulement expérimenté sur l'eau douce, ramenée, à l'aide du sucre, à la densité de l'eau de mer; j'ai aussi essayé, sur les mêmes espèces de poissons, l'action de l'eau glycérinée, de l'eau gommée, de l'eau chargée de carbonate de soude, dans les mêmes conditions aérométriques. Dans ces deux derniers liquides, les poissons meurent beaucoup plus rapidement que dans l'eau douce; l'eau glycérinée, moins dangereuse, est très inférieure à l'eau sucrée.

NOTE

SUR

L'ACTION ÉLÉMENTAIRE DES ANESTHÉSIQUES

(ÉTHER ET CHLOROFORME)

et sur

LA PÉRIODE D'EXCITATION QUI ACCOMPAGNE LEUR ADMINISTRATION

PAR LE D[r] PAUL BERT

Professeur de Zoologie à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Les recherches remarquables de Longet (1) avaient montré depuis longtemps que chez les animaux tués par l'inhalation de l'éther, la contractilité musculaire et la propriété dès fibres nerveuses motrices persistent; aussi, ce physiologiste rapporte l'anesthésie dont la prolongation a amené la mort à une perte des propriétés, ou du moins à une cessation des fonctions des centres nerveux : l'encéphale, la moelle épinière, le bulbe rachidien enfin, étant successivement atteints par le poison.

Mais ces conclusions dépassent un peu les conséquences des expériences sur lesquelles Longet s'appuie. On pouvait objecter que peut-être ce n'est point sur les centres nerveux, mais sur les nerfs sensitifs qu'influe l'anesthésique. Une expérience fort simple montre que l'action sur les centres suffit pour expliquer tous les phénomènes de l'insensibilité par l'éther (le chloroforme semble agir exactement de même).

Faisons, à la racine du membre postérieur d'une grenouille, une ligature qui l'embrasse tout entier, sauf son tronc nerveux, et

(1) *Expériences relatives aux effets de l'inhalation de l'éther sulfurique sur le système nerveux.* (Mémoire lu à l'Académie de Médecine de Paris. — Masson, 1847.)

qui empêche ainsi toute circulation dans ses tissus. Si nous plaçons cette grenouille à côté d'une grenouille à laquelle on a fait quelques heures avant la même opération, mais dont on a de suite relâché la ligature, afin de mettre ces deux animaux dans des conditions identiques, sauf l'interruption de la circulation dans le membre; si, dis-je, nous plaçons ces deux grenouilles sous une même cloche, en présence d'éther, nous verrons que toutes deux deviennent insensibles dans le même temps, et que le membre lié perd tout aussi vite sa sensibilité que les membres intacts. Il résulte évidemment de cette expérience que l'action directe sur les nerfs sensitifs n'a aucune importance dans l'empoisonnement par l'éther.

Ce n'est pas à dire, bien entendu, que les anesthésiques n'agissent pas directement sur les nerfs sensitifs. Déjà, Longet avait dit qu'en exposant un tronc nerveux à des vapeurs d'éther, il devient insensible dans les points impressionnés et dans les points plus éloignés des centres. Mais l'action chimique directe et le refroidissement qui accompagne l'évaporation de l'éther compliquent la question. On peut s'assurer de l'effet de l'éther, au moins sur les terminaisons nerveuses intactes, par l'expérience suivante : Une patte postérieure de grenouille, isolée de la circulation générale par une ligature qui n'a respecté que le nerf (précaution nécessaire, car sans cela le poison eût agi à la suite d'absorption sur l'animal entier), est introduite dans le goulot d'une fiole contenant un peu d'éther, goulot que l'on obture avec soin. Après quelques minutes, cette patte est devenue complètement insensible.

Mais dans le système nerveux central, sur quelle partie, sur quelle propriété agit l'éther? Le nerf sensitif est resté apte à recevoir et à transmettre l'impression; le nerf moteur est resté apte à recevoir l'ordre de mouvement, à le transmettre et à le faire exécuter par le muscle. Cependant, aucun mouvement ne répond à l'excitation. Est-ce que la sensation n'aurait pas été perçue par la moelle? Est-ce que la sensation perçue n'aurait pas pu se transformer en excitation motrice, ou que celle-ci n'aurait pas pu se manifester par action sur l'origine du nerf moteur? Est-ce, en un mot, la sensibilité réceptive du centre nerveux ou son excito-motricité qui est atteinte?

Pour jeter quelque jour sur cette difficile distinction, éthérisons

un animal supérieur, un mammifère, jusqu'à insensibilité complète; puis, immergeons-le dans l'eau : bientôt il s'agite, et présente, très amoindries, il faut le dire, les convulsions caractéristiques de l'asphyxie. Que s'est-il donc passé? Le sang, dans lequel diminue jusqu'à disparaître bientôt l'oxygène uni aux globules, le sang, dans lequel augmente l'acide carbonique dissous et combiné, a impressionné, a excité, sans doute en vertu de ces deux modifications, les cellules médullaires douées d'excito-motricité, et de là mouvement. Donc, l'excito-motricité persiste, et comme le nerf sensitif a conservé sa propriété, nous nous croyons autorisé à conclure que ce qui disparaît, dans la moelle du moins, c'est la réceptivité sensitive.

Arrivons maintenant aux remarques qui constituent l'objet principal de la présente Note.

Lorsqu'on soumet un animal à des inhalations d'éther ou de chloroforme, on reconnaît aisément que l'action du poison se manifeste d'abord par une excitation plus ou moins vive : l'animal s'agite, respire bruyamment, remue convulsivement la tête et les membres. Si l'on opère sur un animal très intelligent, sur un chien par exemple, et à plus forte raison si l'on opère sur un homme, on voit à ces troubles de la motilité s'en joindre d'autres du côté de l'intelligence; on se trouve en présence de rêves dans lesquels l'animal lutte presque toujours contre quelque violence physique imaginaire, et souvent, s'il s'agit de l'homme, contre quelque contrainte ou souffrance morale. Mais bientôt tous ces phénomènes s'apaisent, et l'éthérisé tombe dans un état complet d'insensibilité. Aussi, tous les auteurs sont d'accord pour décrire, avant cette période de relâchement, une *période d'excitation* du système nerveux.

Si l'on veut simplement exprimer par ces mots l'agitation de corps et d'esprit que manifeste l'animal, on est dans le vrai, tout en n'expliquant rien; mais si l'on entend, comme le font presque toutes les personnes qui se servent de ces expressions, si l'on entend ainsi que le système nerveux cérébro-spinal est primitivement excité avant d'être relâché, que son action augmente d'abord d'intensité, pour diminuer ensuite au point d'être annulée pour ce qui a rapport à la réceptivité et à la réflectivité, on avance une hypothèse qui vaut la peine d'être examinée; or, l'examen démon-

tre, comme nous allons le voir, que l'hypothèse est fausse.

Sectionnons, sur un mammifère nouveau-né, chat ou lapin, la moelle épinière au commencement de la région dorsale; immédiatement le train postérieur est paralysé, mais pendant longtemps nous pouvons en obtenir des mouvements réflexes. En plaçant alors l'animal dans une atmosphère chargée d'éther ou de chloroforme, on voit qu'après une agitation très vive de la face et des pattes antérieures, l'insensibilité survient peu à peu en même temps pour les deux paires de membres. Mais nulle agitation ne s'est manifestée dans les membres postérieurs; de plus, en les pinçant à différents moments de l'inhalation anesthésique, on voit la sensibilité diminuer graduellement à partir de l'état normal. Il n'y a donc eu aucune suractivité des propriétés de la moelle épinière précédant leur disparition.

La prétendue période d'excitation n'existe donc pas pour le centre nerveux rachidien.

Mais à quoi tient l'agitation excessive des membres antérieurs et de la tête chez l'animal en expérience? Incontestablement, à l'action irritante directe du chloroforme ou de l'éther sur les muqueuses oculaire, nasale, buccale, et surtout glottique.

En effet, ouvrons la trachée d'un lapin, fixons-y un tube de verre muni d'une petite ampoule, et, laissant l'animal en pleine liberté, introduisons dans l'ampoule de petits morceaux d'ouate imbibés de liquide anesthésique. Si l'acte respiratoire n'est en rien gêné, on voit l'animal s'arrêter d'abord dans sa marche, s'accroupir, puis s'endormir, en devenant complètement insensible. Il ne présente, dans cette circonstance, aucune excitation.

Il n'existe donc point, dans l'intoxication anesthésique, de véritable période d'excitation, et l'irritation due au contact du chloroforme avec les muqueuses est la cause principale de l'agitation manifestée par les animaux soumis à son inhalation. Chez les lapins, cette cause est certainement la seule; mais en est-il de même chez des animaux plus intelligents, et notamment chez l'homme? Il est permis d'en douter.

On peut, je crois, considérer comme certain que, chez eux comme chez les lapins, ni la moelle épinière, ni les organes encéphaliques, ne sont jamais surexcités dans leurs propriétés; mais il me semble très vraisemblable que, pendant un certain temps, les

impressions transmises par une moelle dont les fonctions sont partiellement abolies, à un cerveau lui-même inégalement attaqué dans ses différentes parties, peuvent avoir pour résultat des conceptions délirantes plus ou moins nettes, des rêves engendrant des mouvements désordonnés. Il n'y aurait pas là une excitation des cellules cérébrales, mais un trouble dans leurs relations entre elles et avec les cellules médullaires, une sorte d'anarchie cérébrale.

Il faudrait, pour s'assurer de la vérité de cette explication, pouvoir soumettre à l'anesthésie quelque personne portant une fistule trachéenne qui permettrait d'introduire directement le gaz tonique dans les poumons, en éliminant la cause d'erreur due aux muqueuses sus-glottiques. On verrait alors s'il se manifeste quelques-uns de ces phénomènes rapportés jusqu'ici à l'excitation du cerveau, et qui ne seraient, au contraire, que la conséquence d'une cessation incomplète et irrégulière de ses fonctions.

S'il en était ainsi, il serait permis de se demander si, dans beaucoup de maladies délirantes, l'agitation parfois redoutable des malades est due à une véritable excitation des organes intellectuels, ou s'il ne faut pas plutôt l'attribuer à un trouble apporté dans les relations entre les différentes parties des centres nerveux, trouble en rapport avec une diminution dans l'énergie de quelques-unes d'entre elles : d'où se tireraient des conséquences graves au point de vue de la thérapeutique des maladies mentales. Mais ceci nous écarte de notre sujet.

Il reste, je pense, démontré par les expériences ci-dessus rapportées :

1° Que les centres nerveux sont seuls attaqués par les anesthésiques (chloroforme et éther) employés en inhalation; les nerfs sensitifs ou moteurs, les muscles, le cœur, restant indemnes;

2° Que l'action de ces poisons, dans la moelle épinière, se porte principalement, sinon exclusivement, sur la réceptivité sensitive, l'excito-motricité étant conservée;

3° Qu'aucune excitation des centres nerveux ne précède cette atteinte à leurs propriétés, et que la période d'agitation peut être expliquée par l'action directe de l'éther ou du choroforme sur les muqueuses sensibles, et aux désordres introduits dans la perception des impressions extérieures et leur saine appréciation.

NOTE

SUR LA PRÉSENCE DE

L'AMPHIOXUS LANCEOLATUS

DANS LE BASSIN D'ARCACHON

et sur ses spermatozoïdes;

PAR LE D[r] PAUL BERT

Professeur de Zoologie à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Au commencement du mois de mars, M. Fillioux, pharmacien à Arcachon, me montra, conservé dans l'alcool, un petit animal capturé sur un des bancs du bassin (le banc *blanc*) (¹), dans une promenade zoologique faite avec M. Lafont, d'Arcachon, naturaliste distingué. Ma joie fut grande en reconnaissant le fameux et paradoxal *Amphioxus lanceolatus* (Yarell), *Branchiostoma lubricum* (Costa), cet étrange vertébré sans vertèbres, ce poisson sans encéphale distinct, sans cœur, et dont l'organisation tout entière fait une exception des plus remarquables dans nos systèmes zoologiques. J'engageai vivement ces Messieurs à poursuivre leurs recherches; elles furent bientôt couronnées d'un plein succès, car M. Lafont rapporta jusqu'à vingt *Amphioxus* d'une seule excursion.

J'ai pu moi-même, il y a quelques jours (19 avril), en prendre une trentaine dans l'intervalle de deux marées. Les plus grands que j'ai pêchés mesuraient environ 6 centimètres; les plus petits 2 centimètres; peut-être ce résultat est-il dû au tamis trop grossier que j'employais pour les séparer du sable.

C'est, en effet, dans le sable qu'on trouve ces petits animaux; le banc où nous les avons rencontrés porte de nombreuses moules, et le sable est très vaseux. L'*Amphioxus* est d'une agilité extraor-

(¹) Depuis l'impression de cette Note, l'*Amphioxus* a été retrouvé sur l'île aux Oiseaux, par M. Lafont, et par moi-même au débarcadère d'Arcachon. Il existe donc probablement dans la plus grande partie du bassin.

dinaire, et, bien que prévenu par mes lectures, je fus vraiment surpris de la rapidité avec laquelle il disparaît en s'enfonçant dans le sable humide. On le trouve surtout en bêchant au fond des flaques d'eau que laissent les basses-mers dans les grandes marées; mais j'en ai pris en plein sable découvert, au moment, il est vrai, où la marée remontait. Le filet de toile, promené dans l'eau des flaques, ne m'en a jamais ramené un seul; dans mes aquaria, je ne les ai que très rarement vus quitter le sable et nager en pleine eau. Lorsqu'ils le font, c'est avec une rapidité extraordinaire, en contournant leur corps latéralement, à la manière d'un serpent.

L'*Amphioxus* avait été rencontré dans la Baltique, la mer du Nord et les côtes sableuses de la Grande-Bretagne; la Méditerranée, en Italie, en Sicile et en France au moins, le possède. M. de Quatrefages, à La Rochelle (si mes souvenirs ne me trompent pas), M. Jourdain, dans le Calvados, moi-même à l'embouchure de la Somme, et sans doute bien d'autres naturalistes à d'autres points, l'avons en vain cherché. La station d'Arcachon est donc non-seulement nouvelle, mais elle fournit presque les premiers *Amphioxus* trouvés sur les côtes Océaniques de la France; en outre, elle semble d'une richesse exceptionnelle.

Peut-être, cependant, l'abondance de nos trouvailles tient-elle à l'époque à laquelle nous avons pêché. Peut-être, dans quelques semaines, les *Amphioxus* vont-ils rentrer dans des fonds qui n'émergent jamais. Il serait possible que ces animaux, comme tant d'autres poissons du bassin, ne s'approchassent des hauts-fonds que pour se livrer à la reproduction. Or, la plupart des *Amphioxus* que nous avons pêchés sont prêts pour le grand œuvre. De chaque côté du corps on voit un chapelet blanc et opaque, occupant presque toute la longueur de la région branchiale, et ce chapelet n'est autre qu'un testicule ou un ovaire.

J'ai même eu la bonne fortune de faire, à ce propos, une observation importante. Allant une nuit (20 avril) examiner les *Amphioxus* pêchés de la veille, que je conservais dans mon aquarium, j'en vis un, de la plus grande taille, qui, couché sur le sable, était environné d'un nuage blanchâtre. Ce nuage provenait d'un jet continu, renforcé par des espèces de pulsations fréquentes, lequel s'échappait du pore abdominal. Pêché avec une pipette, ce nuage se montra composé de spermatozoïdes très agiles et bien

indépendants, bien mûrs, en un mot; ils étaient encore mobiles dans l'eau de mer vingt-une heures après; revus quinze heures plus tard, ils étaient morts (temp. de 14 à 15°). Examinés pendant qu'ils se mouvaient, leur tête donnait à de forts grossissements (obj. n° 7 de Nachet) l'apparence la plus étrange; vue de face, elle semblait bilobée; à plat, trilobée. Mais l'observation faite sur le sec n'a pas fourni les mêmes résultats; les spermatozoïdes paraissent alors de la même taille, environ, que ceux de l'homme, la tête représentant à peu près un vingtième de la queue. Les *Amphioxus* lâchent ainsi graduellement leur liqueur fécondante; ceux que je conserve depuis trois semaines ont presque complètement épuisé leurs réservoirs.

Cette éjaculation de spermatozoïdes mûrs est un argument très important à opposer aux naturalistes qui considèrent comme un animal en voie de développement cet étrange poisson. Jusqu'ici, en effet, on ne connaît, dans la série animale, que les *Axolotls* qui soient susceptibles de se reproduire par voie de génération spermatique avant d'avoir subi leur dernière métamorphose.

J'ai le vif désir d'étudier le développement des *Amphioxus;* les conditions exceptionnellement favorables où je me trouve placé me donnent le plus grand espoir d'atteindre mon but. D'une part, la pêche sur les bancs me fournira sans doute, dans quelques semaines, des embryons ou du moins des jeunes; d'autre part, les bassins que la Société scientifique d'Arcachon met si généreusement à la disposition des naturalistes, me permettront probablement d'étudier les œufs fécondés depuis peu, de suivre l'évolution des jeunes, et d'observer pendant longtemps les animaux adultes.

Ceux-ci, en effet, se conservent très aisément en captivité. J'en garde depuis trois semaines dans un tout petit aquarium, et même dans un simple verre de table, qui se portent parfaitement bien. J'ai pu, le 21 avril, en emporter, dans du sable de mer humide, qui, le 22 à Bordeaux, et le 23 au matin à Paris, étaient en pleine activité. Je les ai déposés, bien vivants, dans l'aquarium de mon excellent ami, M. Alphonse-Milne-Edwards.

La résistance vitale de ces animaux transparents, et en apparence si frêles, est des plus étonnantes. J'en citerai un exemple frappant. Le 10 avril, un *Amphioxus* fut coupé en deux d'un coup de bêche, entre le pore abdominal et l'anus; presque tout l'intestin

proprement dit était enlevé; aujourd'hui, 4 mai, le tronçon antérieur est encore vivant.

J'ai coupé la queue à quelques-uns d'entre eux pour voir s'ils présenteraient quelques phénomènes de rédintégration. Jusqu'ici, rien n'a repoussé; bien loin de là, les plaies ne se sont pas cicatrisées, et les animaux se raccourcissent par suite de dissociation et de perte de substance à l'extrémité lésée; la corde dorsale, plus résistante, fait saillie hors des tissus malades. Sur l'un de mes *Amphioxus*, cette gangrène ascendante est telle que la section primitive (19 avril) ayant été faite comme pour les autres, au-delà de l'anus, le tronçon se termine aujourd'hui en-deçà de l'anus, à moitié chemin environ du pore abdominal. Sur cet animal, la partie amputée, mesurant 5 millim., a joui de mouvements réflexes durant dix-huit heures (temp. 15°).

Je n'ai pas encore pu examiner d'un peu près mes *Amphioxus;* les observations que j'ai faites ne m'ont guère amené jusqu'ici qu'à vérifier les assertions principales de Goodsir, de Retzius, de J. Müller, de Kölliker, de de Quatrefages, etc., touchant l'anatomie proprement dite. J'ai vu, à travers les cirrhes toujours entrelacés qui protégent la bouche, pénétrer les particules alimentaires attirées par le mouvement des cils cibratiles rangés en séries régulières sur les parois buccales; je les ai vues ressortir soit par le pore abdominal, soit par l'anus, selon qu'elles avaient traversé ou non la claire-voie de l'appareil branchial. J'ai constaté aisément les étranglements et les renflements successifs de la moëlle épinière, et sa terminaison antérieure obtuse, avec laquelle sont en rapport les yeux et l'organe de Kölliker. Puis aussi, l'appareil circulatoire, si étrange, avec ses vaisseaux longitudinaux contractiles, ses bulbilles artérielles, son sang incolore. Je me propose d'étudier avec tout le soin dont je suis capable ces particularités si intéressantes. J'insisterai surtout sur l'histologie, et je m'efforcerai notamment de chercher jusqu'à quel point sont fondés les reproches faits par Marcusen aux travaux de de Quatrefages.

Dans la note actuelle, j'ai seulement voulu donner à la découverte qu'ont faite MM. Fillioux et Lafont la publicité qu'elle mérite, et signaler à l'attention des naturalistes l'émission spontanée de spermatozoïdes bien mûrs que j'ai constatée sur mes *Amphioxus*.

NOTES DIVERSES

SUR LA

LOCOMOTION CHEZ PLUSIEURS ESPÈCES ANIMALES

PAR LE Dr PAUL BERT

Professeur de Zoologie à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Je m'étais proposé, il y a sept ou huit ans, de prendre pour sujet de ma thèse inaugurale la question si complexe de la locomotion; et avec cette ardeur intrépide qui caractérise les débutants, je ne prétendais à rien moins qu'à traiter de la locomotion dans le règne animal tout entier! Ce que méritait mon imprudence arriva : attaquant à la fois mille questions de détail, je n'en résolus aucune, et bientôt, entraîné par d'autres recherches, fatigué par la richesse même de mon sujet, je l'abandonnai sans avoir rien publié.

Déjà, cependant, et ceci date, je le répète, de 1860 à 1862, j'avais constaté des faits d'un véritable intérêt, et qui, étudiés depuis avec plus de suite et de méthode par plusieurs physiologistes, ont fourni à Monnoyer le sujet d'un excellent Mémoire sur la locomotion des poissons, à Maurice Girard celui d'un travail très intéressant sur le vol des insectes, etc..... Il m'a paru aujourd'hui que ce ne serait pas du temps complètement perdu que de mettre au jour celles de ces notes d'expériences déjà anciennes qui ne sont point devenues des banalités; il va sans dire que, pour les faits antérieurement publiés par d'autres expérimentateurs, je n'ai garde de faire entrevoir nulle réclamation de priorité : je ne citerai mes résultats que lorsqu'il me semblera utile de confirmer les propositions démontrées par d'autres, mais que j'avais pu établir, par devers moi, sans nulle préoccupation de contrôle. Ce qui va suivre ne constitue donc pas un travail d'ensemble, mais,

comme le titre l'indique, une suite de notes diverses, la plupart assez anciennes déjà, sur la locomotion chez divers animaux.

A. Mammifères. — *Homme.* — Je ne parlerais pas de la locomotion chez l'homme, sur laquelle je n'ai point de résultats personnels, si je ne croyais point devoir émettre un avis dans la discussion élevée par Giraud-Teulon et Duchenne (de Boulogne), à propos de la théorie de la marche, donnée par les frères Weber, et acceptée par la plupart des physiologistes : entre autres par Longet et J. Béclard, dont les livres élémentaires, justement réputés, sont entre les mains de tout le monde.

La marche doit être, à mon sens, définie : une série de chutes en avant, arrêtées alternativement par chaque pied, peu après que la verticale abaissée du centre de gravité a quitté la base de sustentation formée par l'autre pied. Or, selon les Weber, le pied qui arrive ainsi en avant est transporté, par une simple oscillation, à la manière d'un pendule, oscillation dont le centre de mouvement est dans l'articulation coxo-fémorale. « Il est prouvé, dit Longet [1], que les muscles des membres inférieurs ne jouent aucun rôle, et qu'ils restent dans le relâchement complet pendant que la jambe devenue flottante oscille d'arrière en avant, à la manière et suivant les lois du pendule » J. Béclard [2] s'exprime avec plus de circonspection en disant : « Le membre qui quitte le sol obéit à la pesanteur, et oscille, dans l'articulation coxo-fémorale, à la manière d'un pendule, sans que la contraction musculaire entre *nécessairement* en jeu. »

Nous ne pouvons, pas plus que Giraud-Teulon [3], accepter cette interprétation. Ce n'est pas que nous croyons, comme le mathématicien dont nous venons de citer le nom, que l'adhérence signalée par les physiologistes allemands entre le fémur et la cavité cotyloïde, adhérence due à l'action de la pesanteur, n'existe que sur le cadavre; rien n'est plus facile, en effet, que de répéter sur l'animal vivant les expériences des Weber, et de vérifier leurs conclusions. Mais nous considérons comme certain, par l'observation directe, que le membre qui se porte en avant est entraîné, non par la pesanteur, mais par l'action musculaire des fléchisseurs de la jambe et

[1] *Traité de physiologie*, 1 vol., 2e partie, 1861, p. 78.
[2] *Traité élémentaire de physiologie humaine*, 1866, p. 728.
[3] *Principes de mécanique animale*, 1858, p. 223 et suiv.

de ceux de la cuisse, qui soulèvent le membre et le détachent du sol; des fléchisseurs de la cuisse, qui l'entraînent en avant en le raccourcissant de manière à l'empêcher de toucher terre à son passage, et des extenseurs de la jambe, qui l'allongent et l'appliquent au sol. Il suffit, ce me semble, de s'observer soi-même avec soin, mais en prenant bien garde de ne pas troubler l'évolution naturelle de la marche, pour constater ces contractions successives. D'ailleurs, à la suite d'une marche un peu prolongée, et, chez les personnes faibles ou convalescentes, à la suite de quelques pas, la fatigue, les douleurs ou même les gonflements musculaires locaux prouvent suffisamment que la pesanteur n'a pas seule fait osciller les jambes, et que les muscles ont énergiquement agi. J'ai vu mourir, d'une inflammation suppurative du muscle psoas, consécutive à des marches forcées, un soldat qui se fût fort bien trouvé de n'avoir eu pour se transporter qu'à laisser osciller ses membres inférieurs. On peut, il est vrai, en y faisant grande attention, arriver à amener sa jambe en avant sans nulle contraction musculaire; mais c'est à la condition d'élever beaucoup son centre de gravité pour empêcher le pied de toucher terre en passant, et on s'aperçoit vite que c'est là un mode de progression anormal. La pesanteur ne me paraît pas plus intervenir dans la marche que dans la progression du sang dans les artères des membres inférieurs, bien que son action soit disposée de manière à favoriser ces deux actes physiologiques.

Rats. — Les rats, comme les kanguroos, possèdent une station sur trois membres, les deux pattes et la queue, tout à fait comparable à celle de ces industriels qui s'appuient en arrière sur un bâton pour débiter une boisson chère au peuple parisien. Cela est connu depuis longtemps; mais ce qu'on a moins remarqué, c'est le rôle de la queue des rats, et très probablement des kanguroos, dans le saut. Elle en est l'un des agents les plus efficaces : un rat privé de queue saute moitié moins loin qu'un rat intact. Le rat qui veut sauter appuie contre le sol le dernier tiers ou le dernier quart de sa queue, qui forme alors une courbe et presque un angle à ouverture postérieure; puis, soudainement, il contracte les muscles longs abaisseurs : ceux-ci redressent brusquement la courbe, et déterminent la projection en avant. Je suis persuadé que les chasseurs de kanguroos ont dû remarquer qu'on s'empare beaucoup plus

aisément d'un animal dont la queue a été brisée d'un coup de feu.

Chez les rats, la queue possède encore un autre usage : elle leur sert efficacement à grimper, en fournissant, par sa grande longueur et ses aspérités transversales, un vigoureux point d'appui.

J'ai pu garder des rats albinos, privés de queue, dans des boîtes en bois ouvertes, dont les bords n'avaient pas 0^m50 de hauteur; intacts, ils se fussent bien vite enfuis, soit en grimpant, soit en sautant.

Girafe. — La girafe marche l'amble comme le chameau et le lama; mais à la différence de ceux-ci, elle présente ce fait remarquable que, dans le pas ordinaire, le pied postérieur d'un côté vient se placer en avant du pied antérieur du côté opposé.

Rhinocéros. — Dans la marche du cheval, le corps appuie alternativement sur un bipède latéral et sur un bipède transversal, de telle sorte qu'un pas complet de marche se compose d'un demi pas de trot suivi d'un demi pas d'amble. Chez les mammifères très lourds, et notamment chez les rhinocéros, il en va autrement, et le corps porté toujours sur trois pieds. Il en résulte qu'ici la marche n'est plus constituée par une succession de chutes arrêtées, et que jamais le centre de gravité ne sort de la base de sustentation. Du reste, chez les rhinocéros, la succession des mouvements, dans les quatre membres, a lieu suivant le même ordre que dans le cheval, par exemple :

1° Antérieur gauche; 2° postérieur droit; 3° antérieur droit; 4° postérieur gauche.

Hippopotame. — L'hippopotame marche d'une manière tout à fait différente; au pas le plus lent, il marche comme le cheval au trot, c'est à dire qu'il appuie alternativement sur les bipèdes diagonaux, et repose ainsi seulement sur deux pieds.

B. Oiseaux. — *Queue.* — La queue, disent tous les auteurs, joue dans le vol le rôle de gouvernail : l'oiseau s'en sert pour se diriger. Il est bien vrai que, dans la chute très lente, rectiligne ou spirale qui constitue l'acte de planer, on voit les oiseaux de proie mouvoir leur longue queue, de telle façon que le sens de leur chute peut en être impressionné; mais il est facile de remarquer directement que l'inclinaison de l'aile du côté où ils se dirigent a bien plus d'importance et d'efficacité. D'autre part, il ne

manque pas d'oiseaux qui ne possèdent pas de queue ou n'ont qu'une queue très courte, et qui volent parfaitement.

Mais dans les oiseaux dont le vol est constitué par une série de bonds qui donnent à leur trajectoire une forme onduleuse, la queue sert très efficacement à arrêter la chute, et son mouvement actif, comme la direction qu'elle prend alors, aide l'oiseau à remonter dans sa course aérienne. Il suffit d'observer avec quelque soin une pie pour bien apprécier le rôle de la queue dans le vol de cet oiseau.

Mais ce rôle n'est ni le seul, ni peut-être le plus important. Si, tandis que nous continuons d'examiner notre pie, elle vient à se percher, et, particulièrement, sur quelque pièce isolée, nous la verrons, en arrivant sur sa base étroite, abaisser et relever successivement sa queue, et cela à diverses reprises.

Pour nous éclairer sur la valeur de ces faits, prenons un oiseau bon voilier, possédant une queue de dimensions moyennes, un pigeon, et coupons-lui les rectrices aussi près que possible de leur base. L'oiseau, lâché en pleine liberté, n'en vole pas moins bien; il monte, descend, tourne avec la même aisance qu'auparavant; mais vient-il à se poser sur une branche ou sur le bord d'un toit, d'un mur, aussitôt il tend à tomber, et tombe même, les premières fois, sur le bec : l'absence de la queue le gêne évidemment beaucoup pour reprendre son équilibre. C'est là, ce me semble, le rôle principal de la queue chez les oiseaux percheurs.

Aile. — J'ai cherché à déterminer expérimentalement l'importance qu'ont, dans une aile donnée, les différentes rémiges par rapport à l'acte du vol. J'ai pris pour exemple le pigeon biset.

L'aile du pigeon possède dix pennes primaires. Chez un oiseau de 25^c de longueur (de la base du bec à l'anus), et dont l'aile étendue, au maximum, mesure 38^c, le bras et l'avant-bras ont 11^c ($5^c + 6^c$), la main et la penne la plus longue (la deuxième), 29^c ($6^c + 23^c$); entre la première et la deuxième rémige, il y a 22^{mm} de différence; entre la deuxième et la troisième, 10^{mm}; entre la troisième et la quatrième, 12^{mm}; puis successivement 25^{mm}, 15^{mm}, 20^{mm}, 10^{mm}, 16^{mm}, 12^{mm}; la dixième rémige primaire n'a ainsi que 15^c5; les rémiges secondaires ne dépassent pas celle-ci.

Or, sur une semblable aile, l'ablation de toutes les rémiges secondaires, malgré l'énorme diminution de surface qui en est la

conséquence, ne paraît pas influer sur l'aisance et la rapidité du vol, qui, sans doute, a perdu un peu en puissance. En coupant maintenant les rémiges primaires de dedans en dehors, je vois que lorsque leur nombre est réduit à 7, l'oiseau, qui vole encore très bien et rapidement, a une difficulté manifeste à changer le niveau de son vol. Je ne laisse alors que les cinq pennes extérieures, et le pigeon, à mon grand étonnement, fournit aussitôt un vol rapide, rectiligne, horizontal ou légèrement ascensionnel, de 150 mètres environ. Puis il tombe brusquement, sans que j'aie pu nettement démêler la cause de sa chute, et ne peut se relever. Je le laisse alors reposer; puis j'ampute encore deux rémiges; l'oiseau ne peut plus alors voler horizontalement que pendant une vingtaine de pas, avec ses tronçons d'ailes réduites aux trois pennes extérieures.

Sur un autre pigeon, j'attaque l'aile de dehors en dedans, et j'enlève successivement les cinq premières rémiges; à ce point, l'oiseau, dont j'ai ainsi raccourci l'aile de 6^{c}, ne peut plus s'élever, mais vole encore un peu, horizontalement; la sixième coupée, il devient incapable de se soutenir en l'air.

Mais ce n'est pas seulement le raccourcissement de l'aile qui empêche le pigeon de voler, et notamment de s'élever. Si, en effet, au lieu de couper les cinq premières pennes à leur base, je taille l'extrémité de l'aile en forme d'aile obtuse dont la sixième penne soit la plus longue, le pigeon, non seulement peut voler horizontalement, mais peut s'élancer de terre jusque sur une planche située à 7 pieds de hauteur. Donc, dans les ailes obtuses, le renforcement fourni au bord qui attaque l'air par les pennes antérieures à la plus longue, n'est nullement à négliger.

La surprise que j'ai éprouvée en voyant s'envoler avec autant d'aisance le pigeon auquel je n'avais respecté que les cinq rémiges externes, diminua beaucoup lorsque j'étudiai l'aile de certains oiseaux bons voiliers à ailes très échancrées. Si nous prenons comme exemple le sterne pierre-garin, dont les dimensions sont moindres que celles du pigeon biset, nous trouvons que sa première rémige, la plus longue, qui mesure 24^{c}, dépasse la deuxième de 10^{mm}; celle-ci dépasse la troisième de 25^{mm}; puis successivement 27^{mm}, 27^{mm}, 27^{mm}, 27^{mm}, 24^{mm}, 24^{mm}, 15^{mm}. La marche de cette décroissance et la largeur des pennes sont telles, que l'aile normale du pierre-garin représente presque l'aile du

pigeon, à laquelle on a enlevé les sixième, septième, huitième, neuvième et dixième pennes primaires.

Ces deux ailes représentent deux types bien différents parmi les animaux bons voiliers. Dans la première, les pennes primaires décroissent lentement de longueur, et la dixième a au moins la moitié de la longueur de la plus longue (pigeon : 23^c, 15^{c}5); la décroissance est bien plus rapide, et la différence entre les deux rémiges bien plus grande (sterne : 24^c, 9^{c}5) dans la seconde. Dans les oiseaux qui présentent celles-ci, les pennes primaires forment avec les pennes secondaires une vaste échancrure, et c'est sans doute à l'isolement des pennes de la main, au peu de largeur de leur ensemble, qu'il faut attribuer l'irrégularité pleine de brusquerie que présente le vol, dont la trajectoire n'est, par moments, composée que de zigs-zags à angles vifs.

Il y a là, ce me semble, entre les diverses ailes, une différence plus importante que celle sur laquelle insistait Isid. Geoffroy Saint-Hilaire, basée sur le numéro d'ordre de la penne la plus longue, numéro qui marquait, pour ainsi dire, selon lui, la valeur locomotrice d'une aile. A ce compte, l'aigle, dont la quatrième et la cinquième rémiges seulement sont les plus longues, passerait bien après le grèbe, dont la deuxième penne est la plus longue, ou surtout la caille ou le macareux, dont l'aile si courte est suraiguë.

Le problème est d'ailleurs extrêmement complexe : la longueur totale de l'aile, son aire, sa forme, celle de son périmètre, les proportions de ses différentes parties, la raideur de ses pennes, la puissance de ses muscles moteurs, sa position par rapport au centre de gravité, sont autant de conditions dont il faut tenir compte pour apprécier le rapport de l'organe avec l'énergie de sa fonction. Une seule condition est constante : c'est la position, dans l'état de station, de l'articulation des ailes au dessus et en avant du centre de gravité, d'où la stabilité de l'oiseau durant le vol, et sa facilité à s'élever, le corps incliné, de bas en haut et d'arrière en avant. Faire la part des autres conditions serait un ensemble de questions dont la difficulté dépasse, ce me semble, l'intérêt.

J'ai seulement voulu montrer, par une simple expérience, l'importance capitale des quatre ou cinq premières rémiges qui peuvent, chez le pigeon du moins, à elles seules, suffire au vol, et dont l'ablation détruit pour cet oiseau la possibilité de la vie aérienne.

Il serait intéressant de répéter ces expériences sur des oiseaux possédant une forme d'aile différente, sur des hirondelles, par exemple.

Sacs pulmonaires. — Il n'est plus personne qui considère les sacs pulmonaires des oiseaux comme aidant leur vol par une diminution de la densité du corps. On peut facilement s'assurer, en effet, qu'un oiseau de grande taille gagne à peine quelques grammes par l'intervention de l'air échauffé que contiennent ses sacs. Barthez, et bien plus tard Jobard (de Bruxelles), leur avaient fait jouer un certain rôle, assez étrange, dû à la réaction de l'air poussé dans l'intérieur des os. Mais ayant ouvert largement sur un pigeon le sac sous-claviculaire, et ayant percé avec un trocard les quatre gros os aérifères de ses membres, je l'ai vu s'envoler avec tout autant d'aisance et de force qu'auparavant.

Mais il est un genre spécial de locomotion dans lequel les sacs aériens peuvent aider l'oiseau; je veux parler de l'acte du plonger pendant la natation. Ce n'est autre chose qu'une sorte de saut périlleux en avant, dans lequel l'oiseau prend un point d'appui en choquant de ses pieds les couches liquides. Or, dans un pareil mouvement, le déplacement brusque, d'avant en arrière, d'une certaine quantité d'air peut aider au mouvement de bascule, au même titre que la projection de la tête en avant. Aussi, les oiseaux plongeurs, et notamment les grèbes et les foulques, sont munis d'un muscle en éventail qui, s'insérant sur la fourchette, embrasse le sac sous-claviculaire, et peut, par sa contraction, chasser brusquement quelques centimètres cubes d'air dans les cavités abdominales situées de l'autre côté du centre de gravité.

Les usages de ces sacs aérifères sont des plus discutés. En leur cherchant un rapport direct et exclusif avec le vol, beaucoup d'auteurs ont oublié que des oiseaux simplement coureurs, comme l'autruche, en possèdent de très développés. Ce qui n'empêche pas qu'ils ne puissent être utiles aux oiseaux grands voiliers, par exemple, en les soustrayant aux effets des changements brusques auxquels ils sont soumis dans la valeur de la pression atmosphérique : idée développée par Foleÿ [1].

Le rôle qu'on leur a attribué dans le renforcement de la voix

[1] *Du travail dans l'air comprimé.* Paris, 1863.

est au moins problématique. Ayant largement ouvert le sac sus-claviculaire d'un canard, je n'ai pas remarqué que sa voix ait diminué d'intensité, bien qu'elle se soit en quelque sorte faussée.

En considérant que les sacs pulmonaires sont ainsi disposés que certains d'entre eux (ceux qui sont sous-cutanés) se vident au moment de l'inspiration, et mélangent par suite l'air qu'ils contiennent à l'air attiré du dehors, je suis amené à penser que très souvent ils mettent les qualités de cet air extérieur en équilibre avec les nécessités de l'oiseau. Durant l'hiver, et dans les hauteurs où il vole, ces sacs lui fournissent un air tiède qui mitige l'action de l'atmosphère insuffisamment réchauffée dans la trachée, déjà longue cependant. Et, inversement, dans le poumon de l'autruche, leur air saturé d'humidité se mélange utilement à l'air desséchant du désert. Mais leur rôle le plus universel dans la classe paraît être, par l'alternance de leurs mouvements, d'entretenir constamment dans les poumons de l'oiseau un courant d'air non épuisé pendant l'expiration comme pendant l'inspiration; d'où résulte véritablement une respiration double, selon l'expression de Cuvier, mais non dans le sens erroné qu'il donnait à ce mot.

Grèbes. — Le mode de station et de locomotion des grèbes a été l'occasion d'une discussion entre les ornithologistes. Pour la plupart, les grèbes se tiennent et marchent debout sur la terre. D'après M. Hardy, M. Gerbe et d'autres, ces oiseaux marchent comme les autres, inclinés à l'horizon.

Or, l'examen de leurs membres postérieurs démontre que les grèbes ne peuvent pas marcher à la façon des autres, c'est à dire en appliquant sur le sol la surface plantaire, tandis que le tarse est dans la position verticale. Il est, en effet, impossible de fléchir en avant le pied sur le tarse; à peine, en violentant l'articulation, peut-on obtenir entre ces deux segments un angle d'environ 160°, à ouverture antérieure.

Aussi, à l'état de repos, le grèbe s'accroupit, ses pattes portant à terre jusqu'au talon, et faisant ensemble un angle d'environ 45°. Dans la course, il touche terre seulement avec l'extrémité des doigts, le corps très incliné en avant, le cou tendu, et se soutenant par les battements très rapides de ses petites ailes courtes et concaves. Lorsqu'il nage entre deux eaux, il se tient presque horizontalement, agitant latéralement les pattes, mais ne

remuant en aucune façon les ailes, qui restent serrées au corps.

Ces observations ont été faites sur des grèbes castagneux à l'état libre.

C. Reptiles. — La marche de la tortue grecque est la même que celle du cheval, comme succession de mouvements dans les pattes; mais, comme le rhinocéros, elle porte toujours à terre sur trois pattes.

D. Poissons. — La locomotion des poissons, surtout dans ses rapports avec la vessie natatoire, a été récemment le sujet d'un travail très intéressant de Monnoyer.

Monnoyer [1] a d'abord très justement remarqué que l'équilibre d'un poisson dans l'eau ne peut être maintenu que par d'incessants efforts musculaires. Mort ou paralysé, il tourne sur le dos. La vessie natatoire ne peut être la cause de cet équilibre, car la plus grande partie est placée au dessous du centre de gravité.

Une expérience simple montre que non seulement elle ne sert pas au poisson pour le maintenir le ventre en bas, mais que souvent elle lui nuit. Si, à une tanche, on coupe toutes les nageoires paires et impaires, l'animal tourne sur le flanc, et devient incapable de s'enfoncer dans l'eau ; mais si, avec un trocart enfoncé sur la ligne latérale (à une distance de l'ouverture des ouïes à peu près égale à celle qui sépare l'œil de l'extrémité du museau), on perce la vessie natatoire et qu'on en aspire l'air, la tanche tombe au fond de l'eau dans sa position normale, le ventre en bas.

Il est nécessaire d'indiquer l'espèce sur laquelle on opère, car les résultats varient avec la forme du corps. Ainsi, tandis qu'une tanche se comporte comme je viens de le dire, après l'ablation de toutes ses nageoires, une carpe est beaucoup moins gênée par la même opération, un brochet ou un cyprin doré ne paraissent guère que perdre un peu de puissance. Au contraire, selon Monnoyer, les ablettes, goujons, gardons, barbeaux et perches, lorsqu'ils ont été privés de toutes leurs nageoires, se renversent sur le dos.

Pour ce qui a rapport à la densité des poissons comparée à celle de l'eau, je dirai avec Monnoyer que certains poissons

[1] *Recherches expérimentales sur l'équilibre et la locomotion chez les poissons.* (*Ann. des Sciences natur. Zoologie*, 5e série, t. VI, 1866.)

sont plus lourds, d'autres plus légers que l'eau. Le *Sparus mendola* flotte, lorsqu'il est mort, dans l'eau de mer, dans le décubitus dorsal, faisant un angle d'environ 30° avec la surface; mais si on le plonge dans l'eau douce, il tombe immédiatement au fond.

Ce sont incontestablement les nageoires impaires, et surtout la caudale et la dorsale, qui servent à la locomotion et à l'équilibration des poissons de forme ordinaire. Une tanche privée de ces nageoires se meut beaucoup moins vite et moins adroitement, et ne se maintient en équilibre que par les mouvements incessants de ses pectorales; mais si elle possède sa caudale et sa haute dorsale, elle se tient facilement en équilibre après l'ablation de ses nageoires paires.

J'ai observé, comme Monnoyer, que chez beaucoup de poissons, et notamment chez les cyprins, le mouvement de recul direct n'est opéré que par le jeu des nageoires pectorales. Des observations de cet ordre, intéressantes pour l'histoire naturelle et la physiologie comparée, pourront être faites avec grande facilité dans les bassins de l'*aquarium* d'Arcachon.

E. INSECTES. — *Marche.* J'ai étudié avec quelque soin la marche du *Carabus auratus* : Les pattes étant numérotées 1, 2, 3, 1' 2' 3', on voit que jamais deux pattes du même côté ni du même numéro d'ordre ne se lèvent ensemble. Les pattes se lèvent d'arrière en avant : 3, 2, 1 ; 3', 2', 1'; les temps sont ceux-ci : 3 et 2'; 1'; 2 et 3'; 1.

Si on examine les rapports du centre de gravité avec les pattes, on voit que, dans le repos, il tombe dans le quadrilatère 2, 2', 3, 3', plus près de 2, 2' que de 3, 3'. Si l'animal marche, et lève par exemple 3 et 2', le centre de gravité se trouve compris dans le quadrilatère 1, 1', 2, 3'. Quand 1 se lève, il est encore compris dans le triangle 1', 2, 3'. En un mot, jamais il ne sort de la base de sustentation ni ne tend à en sortir. La marche n'est donc pas ici, comme chez les bipèdes et les quadrupèdes, une série de chutes arrêtées, dans lesquelles le centre de gravité, porté en avant, détermine le mouvement. Il y a ici simple traction et propulsion.

De plus, les articulations se mouvant dans le sens horizontal et non dans le sens vertical, le centre de gravité n'est pas, comme chez les bipèdes et quadrupèdes, alternativement élevé, puis

abaissé. Sa trajectoire, en un mot, est horizontale et sensiblement rectiligne, tandis que chez les animaux dont je viens de parler, elle décrit des oscillations à la fois dans une direction verticale et dans une direction horizontale.

Chez les agrions, la marche est très peu différente. Les pattes de chaque côté vont toujours 3, 2, 1, 3′, 2′, 1′; mais il n'y a ordinairement qu'une patte à la fois de levée.

La paire de pattes la plus nécessaire à la marche, chez le carabe, est la paire médiane. Enlevée, l'animal peut à peine se traîner, malgré les plus énergiques efforts. L'ablation des pattes antérieures le gêne beaucoup moins.

Il en est autrement pour d'autres insectes. Une mouche domestique, par exemple, marche assez bien privée de ses pattes médianes; elle avance et grimpe, mais elle ne peut sauter. Si on lui eût enlevé les pattes de la première paire, elle eût été incapable de grimper, et presque d'avancer, mais pouvant encore sauter très vigoureusement. Quant à l'ablation des pattes postérieures, elle laisse à l'insecte la possibilité de marcher, de grimper, de sauter. Ainsi, tirer le corps en avant, soit sur un plan vertical, soit sur un plan horizontal, est le fait des pattes antérieures; les médianes servent surtout à sauter; les postérieures soutiennent un peu l'abdomen.

Balanciers des diptères. J'ai constaté, après tant d'autres expérimentateurs, l'impossibilité où sont la plupart des diptères de voler après l'ablation des balanciers (celle des cuillerons n'a aucun effet). Il n'y a là nulle paralysie des ailes, l'aile du côté opéré s'agite tout aussi rapidement que celle du côté sain.

C'est la tête seule du balancier, dont l'intégrité est si intimement liée à l'acte de voler. Je me suis assuré que si, avec des ciseaux fins, on tranche par la moitié seulement la tête des deux balanciers, la mouche est extrêmement gênée dans son vol; elle ne peut s'enlever de terre, et, lancée en l'air, se soutient très peu à l'horizontale; le reste de la tête du balancier enlevé, elle tombe lourdement à terre.

J'ai conservé sous cloche, pendant plusieurs jours, et nourri des mouches privées de balanciers, pensant que peut-être elles s'accoutumeraient à cette lésion; il n'en a rien été.

Les mêmes phénomènes sont représentés par les diptères les

plus différents de forme, comme les tabaniens et les tipulaires. Cependant certains diptères *(Sapromyza)* volent encore avec quelque vigueur après l'ablation des balanciers, ce qui porte à croire qu'il n'y a là-dessous qu'une question de mécanisme. Mais je n'ai rien pu trouver qui prête à quelque explication de ces faits étranges.

Vol. Le travail si complet de Maurice Girard ([1]) sur le rôle des ailes dans le vol des insectes, ne me laisse presque rien à dire.

Je n'ai trouvé, comme lui, que les agrions qui puissent voler également bien avec les ailes de la paire antérieure seules ou celles de la paire postérieure; mais ils ne peuvent voler avec une aile différente de chaque côté. Chez tous les autres insectes, où l'intégrité des quatre ailes est nécessaire (ex. : Abeille vulgaire); ou bien, soit la paire antérieure (ex. : Sphinx, Xylocope, etc.), soit la paire postérieure (ex. : Panorpe), elles doivent être respectées.

Le seul fait intéressant que j'aie à noter ici est l'impossibilité où sont certains coléoptères de prendre leur vol, ou même de se soutenir en l'air, lorsque leurs élytres sont en partie enlevées. C'est ainsi qu'un hanneton *(Melolontha vulgaris)* ou un taupin *(Lacon murinus)*, des longicornes *(Spondylis buprestoïdes)*, un sténélytre *(Nacerdes melanura)*, privés des deux tiers postérieurs de leurs élytres, sont complètement condamnés à la vie terrestre. Il en est de même des hémiptères du genre pentatome. Cependant, ces organes ne semblent pas prendre une part active à la locomotion aérienne, et ne jouent probablement qu'un rôle d'équilibration. Ainsi, chez la cétoine dorée, où, du reste, on peut sans inconvénient les enlever, elles restent appliquées au corps pendant le vol. Le véritable organe locomoteur, chez les coléoptères, est l'aile membraneuse; si, la dépliant complètement, on enlève avec des ciseaux la partie qui déborde les élytres, l'insecte devient incapable de voler (hanneton, etc.).

F. Mollusques céphalopodes. — Dans un travail récent, Fischer s'exprime ainsi ([2]) : « Je pense que l'entonnoir des seiches, s'il est utile aux mouvements, ne sert qu'à la natation rétrograde très rapide. » Il est facile de s'assurer, au contraire, que cet organe

([1]) *Bull. Société entomologique de France.* Janvier 1862.

([2]) *Ann. des Sc. natur. zool.*, 5e série, t. VI.

leur sert d'ordinaire pour se diriger dans tous les sens, et même en avant. Dans ce dernier cas, l'animal recourbe fortement l'ouverture de l'entonnoir en arrière et en bas. Il est ainsi, par le rejet violent de l'eau, projeté en avant et en haut : les bras allongés en pointe et la nageoire marginale régularisent le mouvement. Tout ceci est surtout facile à observer chez les seiches nouvellement écloses, qu'on peut faire aisément promener dans un vase dont le sable du fond met en évidence toutes les contractions de l'entonnoir. Au reste, la nageoire marginale peut aussi, comme l'a dit Fischer, suffire à la locomotion, soit en avant, soit en arrière.

NOTE SUR LA PRÉSENCE

dans la peau des holothuries

D'UNE MATIÈRE INSOLUBLE DANS LA POTASSE CAUSTIQUE

ET L'ACIDE CHLORHYDRIQUE CONCENTRÉ

PAR LE Dr PAUL BERT

Professeur de Zoologie à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

L'existence de matières plus ou moins comparables à la cellulose, insolubles dans la potasse caustique et l'acide chlorhydrique concentré, a déjà été signalée chez plusieurs animaux. Telles sont la tunicine, découverte par Schmidt (1846) dans les téguments des mollusques tuniciers, et la chitine, qui forme la partie animale des téguments des insectes et des crustacés, comme l'a montré Odier (1823). La première de ces substances est isomère de la cellulose ($C^{12} H^{10} O^{10}$); la seconde contient de l'azote, et peut être représentée, dit Berthelot, par la combinaison d'un isomère de la cellulose avec un isomère de la fibrine musculaire. Cet éminent chimiste a obtenu du traitement de ces deux substances par l'acide sulfurique à froid, un sucre analogue au glucose, réduisant les réactifs cupro-potassiques, destructible par les alcalis, et fermentant au contact de la levûre de bière, avec production d'alcool et d'acide carbonique.

Je ne sache pas qu'on ait encore rien constaté de semblable chez les holoturies, dans la peau desquelles se trouve cependant une notable proportion de semblable matière, comme le prouve l'expérience suivante :

20 grammes 50 de peau desséchée d'holothurie de la Méditerranée

ont été traités à plusieurs reprises par une forte solution de potasse et par l'acide chlorhydrique concentré bouillant. Il reste, après l'action de ces réactifs énergiques, 2 grammes 2 de matière insoluble, soit environ 10 0/0.

Je n'étais pas, lorsque je fis cette observation, en mesure de faire l'analyse élémentaire de la substance ainsi obtenue, et j'ai malheureusement perdu mon échantillon. Je signale le fait pour que les personnes qui peuvent se procurer aisément des holothuries (aussi rares à Arcachon qu'elles sont communes à Cannes), puissent l'approfondir davantage.

NOTE

SUR UN

SIGNE CERTAIN DE LA MORT PROCHAINE CHEZ LES CHIENS

SOUMIS A UNE HÉMORRHAGIE RAPIDE

PAR LE Dr PAUL BERT

Professeur de Zoologie à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

A l'époque où je m'occupais d'une manière suivie de la *greffe animale,* je fus conduit à faire d'assez nombreuses expériences sur la transfusion du sang, opération que je considère comme une véritable greffe des corpuscules sanguins. Je me proposais d'étudier, par ce procédé, quelques-unes des propriétés vitales de ces éléments anatomiques, les limites de résistance que ces propriétés peuvent présenter aux agents extérieurs (température, etc.), l'influence des races, des espèces, etc.

Le plan des expériences était des plus simples : saigner un animal (je n'avais en vue que les chiens) jusqu'à ce qu'il arrive à un tel point que, d'une part, sa mort fût certaine, si on l'abandonnait à lui-même, et que, d'autre part, son retour à la vie fût non moins certain, si on lui réinjectait son propre sang simplement défibriné; puis lui réinjecter du sang soumis à des traitements variés (refroidissement, échauffement, exposition à certains gaz pendant des temps divers, etc.), ou provenant d'autres animaux. Selon que le chien continuerait ou non de vivre, j'aurais la preuve que les globules sanguins auraient conservé ou non leurs propriétés dans les circonstances où les avait placés l'expérience; je dis les globules sanguins, parce qu'on sait, depuis 1821 (1), que c'est à

(1) Prévost et Dumas, *Examen du sang,* etc. (*Ann. de Chimie,* t. XVIII.)

ces éléments seuls qu'est due l'espèce de résurrection des animaux rendus exsangues et soumis à la transfusion.

Je pris toutes les précautions nécessaires pour rendre les conditions aussi égales que possible. La saignée était faite à l'artère carotide et avec rapidité (2 à 4 minutes), les résultats pouvant être fort différents, selon que l'hémorrhagie est lente ou soudaine. Je défibrinais par le battage et la filtration (sur un tamis fin de crin, pour éviter les fils échappés du linge, et par suite les embolies pulmonaires) le sang destiné à la transfusion. Cette pratique, en effet, a un avantage évident, et ne présente *aucun inconvénient*.

La quantité de sang réinjecté devait être sensiblement égale à celle du sang enlevé, bien que cette égalité ne soit rien moins que nécessaire au succès d'une transfusion simple, comme chacun sait; enfin, l'injection était faite par la veine jugulaire. Il va sans dire que si le sang destiné à la transfusion devait être soumis à quelque traitement de longue durée, il était nécessaire de le préparer à l'avance, et, par conséquent, de l'emprunter à quelque autre animal appartenant à la même espèce.

Mais tout d'abord une difficulté se présentait, que je pensais lever aisément en consultant les principaux auteurs parmi ceux, en si grand nombre, qui se sont occupés de la transfusion du sang (1).

A quel moment devais-je arrêter l'hémorrhagie et faire la transfusion pour être sûr, d'un côté, que mon chien allait mourir, et, d'un autre côté, qu'une transfusion simple (c'est à dire avec du sang défibriné) le sauverait? Il fallait évidemment le savoir, à peine de risquer d'attribuer, dans certains cas, à la transfusion la continuation de la vie, due simplement à une hémorrhagie insuffisante, et, dans d'autres cas, d'expliquer par la perte des propriétés des globules la mort occasionnée par une transfusion trop tardive. En vain j'interrogeai les auteurs. Nulle part je ne trouvai la caractéristique précise dont j'avais tout d'abord besoin : les uns rendaient, disaient-ils, l'animal *exsangue;* d'autres le *saignaient à*

(1) Voir spécialement le Résumé des travaux sur cette question, par M. Milne-Edwards (*Leçons sur la Physiologie et de l'Anatomie comparée*, t. I, 1857), et celui de M. Oré (*Mém. de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. II, 1863).

blanc, le *réduisaient à l'extrémité,* le mettaient dans un état de *faiblesse extrême,* de *mort apparente,* etc. S'ils employaient quelque expression plus précise, il s'agissait généralement de phénomènes ultimes, comme la cessation de la respiration, celle des battements cardiaques, etc.; mais il est certain que, dans ces conditions, la transfusion ne réussit pas *toujours*. Ces renseignements ne pouvaient donc me suffire, et je dus chercher moi-même une réponse à la question.

Lorsqu'on soumet à une hémorrhagie rapide un chien couché sur le dos, on voit survenir des troubles divers qu'ont décrits tous les auteurs : miction et défécation involontaires, convulsions, dilatation de la pupille, insensibilité finissant par gagner l'œil, abaissement de la température, de la pression cardiaque, etc., finalement arrêt de la respiration et du cœur. Notons encore un phénomène curieux, mais non constant, des contractions rhythmiques du diaphragme.

Lequel de ces phénomènes doit être considéré comme le signe d'une mort prochaine et certaine, mais certainement empêchée par une transfusion faite dans les conditions énoncées ci-dessus?

Laissons d'abord les accidents ultimes : Un chien qui ne respire plus, et surtout dont le cœur ne bat plus, n'est que rarement rappelé à la vie par la transfusion; je dois même dire que je n'en ai jamais vu revenir après l'arrêt du cœur.

Je me suis d'abord assuré qu'un chien dont la pupille n'est pas encore dilatée, et qui a conservé la sensibilité oculaire si facile à constater, ne peut pas moins être déjà fatalement condamné à mort.

Réciproquement, la dilatation de la pupille peut se manifester avant que l'hémorrhagie ait dépassé les limites mortelles. De plus, en se basant sur la sensibilité, on ne pourrait employer les anesthésiques.

D'autre part, les déjections involontaires peuvent arriver avant que la vie de l'animal soit compromise.

Enfin, les observations touchant le nombre des battements cardiaques, des mouvements respiratoires, etc., la pression sanguine, la température, ne fournissent aucun renseignement certain.

Tous ces phénomènes doivent donc être écartés.

Mais à un certain moment de l'hémorrhagie, on voit le chien contracter, par une convulsion énergique et durable, un, deux,

ou même les quatre membres. S'il s'agit d'abord, comme il arrive d'ordinaire, des pattes antérieures, le chien les raidit et les tient un instant presque à la verticale; pour les pattes postérieures, elles sont également raidies, et parfois ramenées en avant par une convulsion des psoas, jusque sur la tête. Pendant la convulsion, le cœur se ralentit beaucoup, et si l'on a introduit un manomètre dans une artère, on voit la pression sanguine diminuer.

Or, si on lie le vaisseau artériel immédiatement après la première de ces convulsions, et si on laisse l'animal à lui-même, la mort survient nécessairement. Les convulsions se répètent, plus fortes d'abord, plus faibles ensuite, et le chien cesse de respirer, de cinq à vingt-cinq minutes après l'arrêt de l'hémorrhagie. Que si, au contraire, on lui réinjecte, immédiatement après la première convulsion, du sang préparé à l'avance, on le voit toujours revenir à la vie.

Enfin, sauf dans un cas dont il sera parlé tout à l'heure, la ligature du vaisseau avant les convulsions a toujours laissé vivre l'animal.

Tels sont, au moins, les faits que j'ai observés. Ces expériences préalables ont été faites sur plus de vingt chiens. Mais je tiens à faire remarquer que je parle de chiens, de chiens couchés sur le dos, et que je n'entends nullement étendre le même criterium à d'autres espèces ou même à d'autres positions. On sait, en effet, que chez l'homme, et surtout dans la station verticale, les choses ne se passent pas ainsi, et que la syncope, la perte de connaissance, arrivent très vite. Ceci n'est point une question de physiologie générale, mais une humble question de physiologie opératoire, à l'usage à peu près exclusif des expérimentateurs.

Je dois dire, cependant, que, dans un cas, un de mes chiens est mort sans avoir présenté les grandes convulsions dont je viens de parler. Il pourra donc arriver, quand on voudra faire l'expérience, qu'on tue le chien sans en avoir été averti; mais cela n'arrivera que rarement, et n'a pas grande importance au point de vue qui nous occupe.

Ces convulsions sont dues à une excitation de la moelle; elles se présentent, en effet, même chez les animaux chloroformés jusqu'à insensibilité complète [1]. On ne peut attribuer cette excitation

[1] Voir, dans le présent volume, ma *Note sur l'action des anesthésiques.*

à l'action du sang chargé d'acide carbonique, comme on l'a fait pour les convulsions de l'asphyxie; elle est plutôt due à la diminution de la pression sanguine dans les centres nerveux, et à un changement brusque dans l'équilibre de nutrition de ces centres, par suite de l'anémie. Nous avons vu que la moelle allongée est aussi excitée, puisque le cœur se ralentit à chaque convulsion.

M. Piorry (1) avait annoncé, il y a longtemps, qu'on peut, chez les chiens, enlever en un seule saignée $\frac{1}{20}$ du poids du corps, mais que la mort survient si on dépasse un peu cette limite. J'ai, sur un certain nombre de mes chiens, pesé la quantité de sang enlevé. Voici les résultats obtenus :

Chiens dont l'hémorrhagie a été arrêtée après la première convulsion, et qui sont tous morts.

N° 1.	Poids du chien :	8 kil.	Sang enlevé :	445 gr.	Rapport :	$\frac{1}{17,97}$
N° 2.	—	10k8	—	620 gr.	—	$\frac{1}{16,6}$
N° 3.	—	17k5	—	1,000 gr.	—	$\frac{1}{17.5}$
N° 4.	—	10k62	—	620 gr.	—	$\frac{1}{17}$
N° 5.	—	8k66	—	460 gr.	—	$\frac{1}{18,6}$
N° 6.	—	8k35	—	425 gr.	—	$\frac{1}{18,5}$
N° 7.	—	9k58	—	480 gr.	—	$\frac{1}{19.7}$

Chez un chien, où on s'est arrêté au moment de la dilatation pupillaire, et qui a survécu, le rapport était $\frac{1}{22}$.

Les n[os] 1 et 2 étaient à jeun; le n° 7 était à jeun depuis deux jours. Les n[os] 3, 4, 5, 6 avaient mangé le matin; le n° 6 avait même le sang chyleux.

Ces chiffres concordent, on le voit, avec ceux de M. Piorry. Je n'ai pas cru cependant devoir chercher, dans cet ordre de phénomènes, le criterium dont j'avais besoin, et cela à cause des grandes variations dans la quantité de sang que contient un animal, suivant qu'il est gras ou maigre, malade ou bien portant.

Voici une expérience qui montre à quels écarts on peut arriver :

8 juillet 1864. — Une chienne très grasse, à jeun de la veille, est saignée par la carotide. On s'arrête aux grandes convulsions, et on

(1) *Note sur les émissions sanguines.* (*Archives générales de Médecine,* 1826.)

réinjecte 250 centigrammes du sang qui vient d'être tiré sans le défibriner : l'animal revient parfaitement à lui. Le 8, en digestion, on lui enlève 320 grammes; convulsions, arrêt de l'hémorrhagie, mort en 20 minutes. La chienne pèse 9,920; a un petit dans l'utérus. Rapport : $\frac{320}{9920} = \frac{1}{31}$.

On pourrait donc, en prenant comme base la quantité relative du sang perdu, être singulièrement induit en erreur. D'ailleurs, il me paraissait bien préférable, dans une question de physiologie, d'adopter pour criterium un phénomène purement physiologique, et je me suis arrêté à cette proposition :

Toutes les fois que, chez un chien couché sur le dos, l'hémorrhagie artérielle rapide a été poussée assez loin pour exciter le centre nerveux spinal jusqu'à production de grandes convulsions, en vain lie-t-on le vaisseau, l'animal est d'ores et déjà condamné à mort, et périt dans un temps variable; mais, dans ces conditions, la transfusion immédiate de sang simplement défibriné, en quantité égale à celle qu'on lui a enlevée, le sauve constamment d'une mort certaine et prochaine.

C'est donc en se basant sur cette caractéristique qu'il sera possible d'entreprendre les expériences que j'avais en vue, et dont je n'ai pu exécuter qu'un petit nombre.

Il serait très intéressant d'avoir, sur la mort par hémorrhagie chez l'homme, des renseignements analogues; on éviterait ainsi de glorifier la transfusion du sang, comme on l'a fait tant de fois, de guérisons dans lesquelles elle n'a eu tout au plus qu'une part adjuvante. Cependant, la pratique peut se passer à la rigueur de ces renseignements d'intérêt surtout scientifique.

Toutes les fois, en effet, qu'un homme, soumis à une cause d'hémorrhagie, présentera des symptômes sérieusement alarmants, ou que le médecin considérera comme tels, il sera rigoureusement du devoir de celui-ci de proposer la transfusion du sang, et d'insister sur son exécution. Pour cela, les médecins de campagne ne doivent pas craindre de voir compliquer leur trousse; en effet, aucun instrument spécial n'est nécessaire : une seringue à injections pour hydrocèle, dont le piston tienne bien, suffit parfaitement.

Le sang pourra être emprunté à plusieurs individus, et sa quantité ne pas dépasser le tiers de celle qui a été perdue.

Il sera prudent de le défibriner avec soin, par le battage et la filtration au tamis de crin très fin, sans s'inquiéter du refroidissement.

La crainte de l'introduction de l'air dans les veines, dans les limites de quantité, où cela est à la rigueur possible (même pour un opérateur maladroit), ne saurait être un objet de crainte pour nul médecin instruit.

Enfin, et c'est là la meilleure des raisons, on chercherait en vain un cas de transfusion du sang chez l'homme, fait avec quelque prudence, dans lequel des accidents sérieux aient pu être attribués à l'opération, tandis que, en laissant de côté des exagérations qui ont fait plus de tort que de bien à cette utile pratique, il serait facile de citer bon nombre de cas où elle a sauvé les malades d'une mort certaine. Au reste, ceci n'est plus, depuis bien des années, en discussion parmi les physiologistes.

NOTE

SUR

QUELQUES POINTS DE LA PHYSIOLOGIE DE LA LAMPROIE

(*Petromyzon marinus* Linn.)

PAR LE Dr PAUL BERT
Professeur de Zoologie à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

A. *Respiration.* — L'inspiration et l'expiration se font par les trous branchiaux, que l'animal soit fixé ou non. Dans ce dernier cas, il ne fait que très rarement arriver ou sortir l'eau par la bouche; mais ce mode de respiration lui est possible.

Tous les mouvements respiratoires sont simultanés pour les quatorze orifices.

Il y a communication régulière entre les orifices des deux côtés; un objet de petites dimensions introduit par un orifice ressort le plus souvent du côté opposé.

Au repos, la ventouse étant fixée, le nombre des inspirations est d'environ 70 par minute; en excitant l'animal sans qu'il se détache, on obtient jusqu'à 100 inspirations; l'animal étant détaché et s'agitant énergiquement, donne jusqu'à 120 inspirations.

B. *Tube nasal.* — A chaque inspiration, le tube nasal se remplit; il se vide à chaque expiration, lançant l'eau à 5 centimètres environ.

On pourrait croire, au premier abord, qu'il existe une communication entre ce tube et l'appareil branchial, tant ses mouvements sont dépendants des mouvements de celui-ci; mais il est facile de s'assurer qu'il n'en est rien, en mettant soit l'orifice du tube, soit ceux des branchies hors de l'eau.

C. *Digestion des matières grasses.* — La lamproie sur laquelle j'ai fait mes expériences était à jeun depuis huit jours. J'injecte dans l'estomac, à l'aide d'une sonde en gomme, environ 30 centimètres cubes d'oléine. Le lendemain, après 24 heures, je trouve dans tout l'intestin, à partir du foie, un grand nombre de globulins gras, très fins (environ 0mm001 à 0,002). Ils sont très rares auprès de l'anus. Leur ensemble n'est pas visible à l'œil nu.

Il est bon de rappeler que les lamproies ne possèdent ni pancréas ni appendices pyloriques.

D. *Circulation.* — En outre des veines jugulaires, on voit déboucher en avant, dans le cœur, deux petites veines; la plus considérable provient de l'appareil hyoïdien. Elle présente, avant d'entrer dans le cartilage péricardiaque, un renflement trabéculaire à pulsations rhythmiques. Ni l'aorte, ni aucune des veines du corps ne m'a présenté de pulsations, pas plus les veines cardinales que les veines sus-hépatiques. On sait que J. Müller en avait constaté dans ces dernières, chez les myxines.

Le sac cartilagineux péricardiaque ne contient aucun liquide.

Les sinus sanguins situés sous les veines cardinales ne possèdent pas d'épithélium. Il sont constitués par une trame de tissu conjonctif avec fibres élastiques, revêtus d'une couche hyaline.

L'animal étant immobilisé par le curare, comme il va être dit, je l'ouvre sur le flanc : les grands sinus sous-cardinaux sont flasques; graduellement ils se remplissent de sang; ce sang vient du côté du cœur. Une ligature, placée sur la veine qui fait communiquer le système rénal avec le système hépatique (arc hépato-néphrétique de Gratiolet), montre que le sang (l'expérience dure environ une heure) va du rein au foie.

E. *Empoisonnement par le curare.* — A 3 heures 21 minutes, j'injecte sur la peau de la queue 1 centigramme d'eau contenant 5 milligrammes de curare venant de chez Ménier, et que je dois à M. le docteur Sentex.

A 3 heures 23 minutes, agitation.

A 3 heures 25 minutes, *cessation* définitive *de tout mouvement respiratoire*. Agitation modérée jusqu'à 3 heures 45 minutes; l'animal se fixe à plusieurs reprises, mais pendant peu de temps.

A 4 heures, la lamproie est clouée sur la table à expérience; elle est très sensible et se meut avec une certaine énergie. Jus-

qu'à 6 heures, il y a encore des mouvements spontanés et réflexes. Vers cette heure, le poisson fait alternativement de chaque côté des mouvements respiratoires incomplets. A ce moment, le cœur est enlevé depuis cinq minutes environ.

Le fait intéressant est la suppression presque immédiate des mouvements respiratoires, alors que les mouvements généraux ont persisté, bien qu'affaiblis. Les nerfs pneumogastriques sont donc ici les premiers atteints. Or, le contraire a été signalé d'ordinaire chez les poissons, et notamment chez la torpille (Moreau) et la raie (Ch. Robin).

QUELLE EST LA CAUSE

DE LA

PREMIÈRE INSPIRATION DU NOUVEAU-NÉ?

(Critique d'une Note analogue de M. le Dr Lenoel, d'Amiens.)

PAR LE Dr P. LUZUN.

Si la physiologie a aujourd'hui de nombreux adeptes, c'est qu'elle est entrée dans une voie féconde en richesses, dans une voie où elle aurait dû de tout temps puiser ses ressources et ses arguments; mais malheureusement il n'en a pas été ainsi; aussi cette science a-t-elle eu plus que toute autre ses théories émises, ses théories renversées et remplacées suivant le caprice de l'imagination qui daignait s'en occuper; l'expérimentation l'a mise à même de donner dorénavant des faits positifs, des faits utiles pour le pathologiste et le clinicien, mais des faits qu'il faut ensuite apprécier, d'où il faut tirer des conclusions, et par là nous retombons souvent dans le domaine de la discussion, nous arrivons à une diversité remarquable d'opinions, tout en pensant juger sainement et croyant tirer des conséquences rigoureuses des faits observés. C'est ce qui aujourd'hui m'arrive avec M. le docteur Lenoel. Ce savant médecin a étudié comme moi les phénomènes de la première inspiration du nouveau-né; il est arrivé à une théorie qu'il a publiée dans les *Mémoires de la Société médicale d'Amiens* (année 1864-1865); il la croit bonne, je la crois erronée; c'est au lecteur à apprécier et à juger. Je vais, à cet effet, donner une analyse du travail que je combats, et ensuite j'exposerai la théorie de l'auteur.

M. Lenoel commence par citer les anciennes théories émises sur

la cause de la première inspiration du nouveau-né; il ne les trouve pas dignes d'une sérieuse discussion, et, à mon avis, il a parfaitement raison. Ces théories sont les suivantes : 1° les nouveau-nés respirent parce que les viscères abdominaux, entraînés par le bas-ventre aussitôt après la naissance, permettent au diaphragme de se mouvoir; 2° le nouveau-né respire afin de faire entendre ses vagissements; 3° le nouveau-né respire, parce que la pression atmosphérique suffit à pousser l'air dans les voies respiratoires; 4° le nouveau-né respire, parce qu'ayant déjà exécuté les mouvements nécessaires pour avaler de l'eau de l'amnios, il cherche encore cette eau après la naissance. C'était la doctrine du grand physiologiste Haller : « *Cibum quœrit in quo natabat, aerem invenit.* »

M. Lenoel pense que, pour que la première inspiration ait lieu, il faut que la cavité pulmonaire s'ouvre, appelle l'air, et que les lèvres de la glotte soient écartées l'une de l'autre par la contraction des muscles. Ceci est évidemment assez nécessaire. Mais qu'est-ce qui produit cette dilatation?

L'auteur admet, avec le professeur Bérard, que les propriétés du bulbe rachidien rendent compte de l'établissement de la respiration; sur ce point, je suis en accord parfait avec eux. Bérard ignorait quel est le stimulus de cette action réflexe; M. Lenoel déclare que pour lui c'est, le plus souvent, le contact de l'air sur la figure, autour de la bouche et du nez, et, en général, sur toute la surface cutanée. A l'appui de son opinion, il cite les expériences suivantes de M. Beau, instituées dans un autre but : 1° un chien est plongé en entier dans un liquide, il fait une inspiration et une expiration saccadée, tousse et meurt au bout de quatre ou cinq minutes; 2° un chien ayant subi l'opération de la trachéotomie, et muni d'une canule, placé dans les mêmes conditions, meurt absolument de la même façon; 3° un troisième chien ayant subi la même opération que le second, et placé dans l'eau de manière que la canule y plonge et que la tête soit entièrement hors du liquide, meurt de la façon suivante : à la première inspiration, l'eau entre et est rejetée en partie par la toux; suspension des mouvements respiratoires, puis ils reparaissent. Plusieurs inspirations se succèdent sans toux; ce sont des inspirations et des expirations d'eau, jusqu'à ce que la mort survienne. Voici les

conclusions : Si dans cette expérience l'animal a respiré plus longtemps, c'est qu'il avait la face en contact avec l'air; or, si le chien respire plus longtemps à cause de cette situation, c'est cette situation faite au nouveau-né qui est la cause de sa première inspiration. Je m'efforce, en réduisant presque au syllogisme ce raisonnement, de bien faire comprendre l'idée de M. Lenoel.

Voici maintenant mon opinion sur les expériences citées par l'auteur et sur la cause de la première inspiration du nouveau-né : La première et la deuxième expérience sont absolument les mêmes; l'animal meurt de la même façon; une fois plongé dans l'eau, après quatre ou cinq minutes, il cesse de vivre. Mais que s'est-il passé depuis la première et dernière inspiration dans l'eau jusqu'au moment de la mort? Aucun renseignement n'est donné. Y a-t-il eu syncope, c'est à dire arrêt de la respiration et des battements du cœur, ou simplement arrêt de la respiration? Dans les expériences physiologiques, le moindre détail a de l'importance. La troisième expérience, qui a paru capitale à M. Lenoel, et sur laquelle il a entièrement basé sa théorie, me paraît tout à fait mal interprétée ou au moins très incomplète. L'animal respire plusieurs fois, dit l'auteur, parce qu'il a la tête hors de l'eau. Suivons l'expérience telle qu'elle est rapportée : le chien, muni de sa canule, est introduit dans le liquide, etc.... Au moment d'arrêt de la respiration, j'ajoute : avec resserrement considérable de la poitrine et oblitération certaine de la glotte; sans cela l'équilibre des liquides s'établirait dans ces nouveaux vases communiquants et les poumons seraient pleins d'eau : ce qui prouve qu'il n'en est pas ainsi, c'est qu'après ce temps d'arrêt a lieu une inspiration et non une expiration : c'est une inspiration d'eau, dit M. Lenoel; il a raison en ce qui concerne la canule qui est submergée; mais par la gueule et malgré la canule, ou plutôt sur le pourtour de celle-ci, ne s'introduit-il pas une certaine quantité d'air sous l'influence du vide? Dans l'expiration qui suit, a-t-on eu soin de s'assurer si de l'air n'était pas rendu par la gueule de l'animal, en plaçant par exemple un miroir devant elle? Rien n'a été fait. Pour moi, je crois qu'il s'introduit un peu d'air à chaque inspiration, et que c'est cette quantité d'air insuffisante, il est vrai pour entretenir la vie, qui fait que la respiration persiste plus longtemps, comme toutes les autres fonctions organiques. Cette expérience aurait, je

crois, acquis de la valeur, ou n'aurait pas fait naître d'opinion erronée si on avait eu le soin, en laissant la face à l'air, de lier la trachée artère au-dessus de la canule. Je le répète, cette expérience est, sinon mal interprétée, du moins très incomplète, et la possibilité de l'entrée de l'air me la fait rejeter complètement.

Mais à quoi donc attribuer la première inspiration du nouveau-né? Je me pose cette question, parce que je ne suis pas disposé à croire que mon rôle de critique se borne à détruire; il faut savoir remplacer dans l'édifice de la science la pierre que l'on a cru devoir enlever. Voici ma théorie. Elle a été émise, au dire de M. Lenoel, par quelques médecins; mais, ignorant entièrement leurs noms et leurs arguments, je prends toute la responsabilité de ce que je vais dire.

L'enfant qui quitte le sein de la mère voit, chacun le reconnaît, changer complètement ses conditions d'existence. Durant la vie intra-utérine, son sang, se mettant continuellement en rapport avec celui du placenta maternel, allait puiser dans cette source féconde non seulement l'oxygène nécessaire à l'hématose, mais encore les éléments de la nutrition et de la chaleur animale. Après sa naissance, il est obligé de se procurer lui-même toutes ces ressources; or, où peut-il les trouver? Seulement dans la respiration que lui fournira l'hématose et dans une alimentation appropriée à la délicatesse de ses organes; à la suite de l'absorption de l'air et de l'ingestion des aliments se produira intérieurement et partout la chaleur animale indispensable à la vie, et dont l'enfant a surtout, dans le bas âge, si grand besoin. Mais qu'est-ce qui pousse l'enfant à manger, à respirer? Pour l'alimentation, on sait ce qui la détermine; c'est un besoin intérieur, un malaise particulier se traduisant par une sensation désagréable qu'on a nommée faim, soif; elle disparaît après l'ingestion des aliments et des boissons pour reparaître ultérieurement, dans un temps plus ou moins éloigné, suivant les dépenses et les besoins d'assimilation de l'économie. Pour la respiration, les idées sont moins fixées, le travail de M. Lenoel le prouve; mais n'est-il pas sage de penser que c'est aussi un besoin intérieur, un malaise particulier, qui n'a pas reçu de nom il est vrai, mais qui n'en existe pas moins réellement. La faim et la soif font que l'enfant s'attache au mamelon de la nourrice, qu'il fait le vide dans sa bouche pour que le lait s'y précipite, et cela sans en avoir

souci ni connaissance, mais par le seul instinct de sa conservation; et le besoin de l'hématose ne serait-il pas, lui, également suffisant pour que l'enfant prenne les moyens de le satisfaire dès qu'il le peut? Le changement des conditions de vie dans lesquelles se trouve l'enfant le force à utiliser ses organes; de passifs qu'ils étaient durant la vie intra-utérine, ils deviennent actifs; car désormais ils sont chargés de suppléer à l'alimentation fournie par le sang de la mère. La faim fait prendre des aliments; mais ceux-ci ne sont pas la cause de la faim. L'aliment est entièrement passif; qu'on n'aille pas m'objecter le sens du goût et son excitation; car je répondrais qu'alors jamais nous ne prendrions d'aliments qui nous déplussent ou fussent désagréables à notre goût particulier, et il est impossible à chacun de nous de compter le nombre de fois que par politesse ou par besoin nous avons été obligé de le faire. L'aliment est donc passif; de même, pour la respiration, l'air est passif par rapport au poumon qui, pour satisfaire au besoin du sang, joue un rôle actif et très actif.

J'ai dit que la cause de la respiration résidait dans l'action du bulbe rachidien. En effet, pensez-vous que cet organe essentiel à la vie puisse s'accommoder longtemps d'un sang non suffisamment hématosé et ne soit pas pressé de réagir contre l'irritation qu'il en éprouve? C'était probablement là l'idée qu'avait Bérard lorsqu'il attribuait la respiration à l'action du bulbe rachidien.

Le nerf pneumo-gastrique, qui prend son origine dans cette portion des centres nerveux, et qui se distribue principalement au foie, au poumon et au cœur, n'agit jamais qu'après la formation du sang et suivant les besoins de ce dernier. Pour ce qui est d'abord de l'organe central de la circulation, je crois que le cœur ne commence à battre qu'après la formation du sang et seulement par l'excitation particulière que celui-ci lui occasionne. En effet, privez une seule seconde le cœur du sang, c'est à dire de son excitant naturel, il cessera aussitôt de battre. Voyez ce qui survient après l'introduction de l'air dans les veines ou son injection. Dès que ce fluide est dans le cœur, plus de battements. Je sais qu'on a donné comme cause de cette suppression des battements du cœur une foule de théories avec lesquelles celle-ci n'a rien de commun. Mais je la crois néanmoins vraie, et je suis heureux de dire que c'est celle que professe mon excellent maître M. Oré, de qui je la

tiens. Passons, car ce n'est pas ici le moment de la développer. Pour le foie, dès que le sang a acquis toute sa perfection, cette glande commence à élaborer les matériaux qu'il lui présente, à le purger de certaines matières qui sont utilisées par ailleurs. Eh bien! pour le poumon n'en est-il pas de même, et les branches du pneumo-gastrique distribuées à cet organe et au larynx ne fonctionnent-elles pas également suivant les besoins du sang, dès que ces besoins se manifestent? Ce qui est vrai pour une branche d'un nerf est vrai pour l'autre, quand ces branches se réunissent à un tronc commun et ont une commune origine.

Je crois cette théorie trop vraie et trop raisonnable pour ne pas m'y attacher. Ainsi, pour moi, ce n'est pas la présence de l'air autour de la bouche et des fosses nasales qui détermine la première inspiration d'un nouveau-né. Comment l'air agirait-il? Par ses propriétés physiques ou par ses propriétés chimiques? Ni par les unes, ni par les autres; en effet, placez au milieu d'un gaz quelconque un animal, il respirera quand même, et sa mort, si le gaz n'est point délétère, ne surviendra qu'à cause du défaut d'oxygène dans le milieu ambiant, c'est à dire à cause du defaut d'hématose.

Si l'air était l'agent qui fait dilater la poitrine et ouvrir la glotte, comme le prétend M. Lenoel, et que cela se fît comme pour le nouveau-né, par une action réflexe, pourrions-nous, étant adultes, résister aux pressantes sollicitations et à l'activité de cet agent? Nous ne le pourrions certainement pas, tandis que nous avons la faculté de ralentir ou d'accélérer à volonté notre respiration, pourvu que ce soit dans des bornes convenables et que les besoins de l'économie soient satisfaits. L'air n'est donc pas actif, puisque nous ne le subissons pas, tout au contraire.

Retenez votre respiration, vous serez ensuite forcés de faire une inspiration considérable pour suppléer à la privation d'hématose que vous avez supportée; si l'air était l'agent actif, il ne ferait exécuter, à mon sens, qu'une inspiration ordinaire; une cause invariable produit toujours des effets invariables.

Mais, je le reconnais, on peut faire des objections à cette théorie. Pourquoi, dira-t-on, si l'air n'agit pas, la respiration est-elle si prompte à s'établir au moment de la naissance? Pourquoi la respiration s'établit-elle alors que l'enfant est encore uni au

placenta par le cordon, et que celui-ci présente des battements? Ces deux objections sont pour moi la même, et je réponds : Croyez-vous que depuis la rupture de la poche des eaux et la rétraction consécutive des parois utérines, le placenta maternel soit dans le même état qu'auparavant et suffise à hématoser, aussi complètement qu'il serait désirable, le sang contenu dans le placenta fœtal? Croyez-vous qu'une fois l'enfant arrivé au détroit inférieur ou complètement sorti du vagin, les conditions d'hématose ne soient pas changées du tout au tout par la rétraction des fibres musculaires utérines et souvent le décollement partiel ou même complet du placenta? Pour moi, j'admets un changement complet. Ainsi, reconnaissons que, pendant l'accouchement, l'enfant souffre du défaut d'hématose, sa teinte violacée le prouve souvent; reconnaissons qu'il a à franchir une passe difficile, et qu'aussitôt qu'il est à même de satisfaire de pressants besoins il en profite, et il fait bien, car sans cela il ne pourrait vivre. Que d'enfants qui, pour une cause ou une autre, gênés ou retardés dans leur évolution, meurent asphyxiés faute d'hématose, et n'ont pas la faculté d'attendre le moment favorable où ils pourront se la procurer! Ne sait-on pas d'ailleurs que le pouls de l'enfant bat environ 150 fois par minute, et que par conséquent il a besoin 150 fois par minute qu'une partie de son sang soit mise en rapport avec l'oxygène?... Ne nous étonnons donc pas si l'enfant respire immédiatement après la naissance.

Mais revenons à la note de M. Lenoel. De sa théorie cet auteur a tiré des conclusions. « Cette manière de voir, dit-il, conduit à une pratique médicale. Un enfant vient-il au monde sans que sa respiration s'établisse; on l'exposera à un courant d'air froid en lui imprimant brusquement des mouvements semblables à ceux d'une balançoire, etc. » C'est encore ici un argument contre M. Lenoel et l'action de l'air. En effet, que se propose-t-on d'obtenir en agissant ainsi? Est-ce de mettre l'enfant en contact avec l'air? Non. Il y est suffisamment déjà. Est-ce de lui faire chatouiller davantage la face et les fosses nasales par ce fluide? Encore moins. Ce que l'on se propose, c'est d'exciter l'enfant par la production du froid sur la surface cutanée, en augmentant et accélérant l'évaporation. Ce n'est pas à l'air que l'on s'adresse, ou ce n'est au moins qu'à l'une de ses propriétés physiques, sa température; ce qui le

prouve, c'est que l'on peut parfaitement remplacer ces mouvements de balançoire par des aspersions d'eau froide, ou mieux encore, de substances volatiles, comme le chloroforme, l'éther, etc..... La conclusion de l'auteur me paraît donc tout à fait erronée.

Permettez-moi, en terminant cette Note déjà trop longue, de poser une dernière question à M. Lenoel et aux partisans de sa doctrine : Que pensent-ils de la première inspiration du plongeur qui vient de chercher du corail au fond de l'eau ou de celle d'un animal amphibie qui poursuit sa proie au milieu de l'onde? Nous savons tous que ces individus sont obligés, par intervalle, de venir à la surface du liquide, c'est à dire à l'air; eh bien! qu'y viennent-ils faire? Pour moi ils sont absolument dans les mêmes conditions que le nouveau-né. Avec les idées de M. Lenoel, je suis obligé de croire qu'ils viennent là pour une raison quelconque; qu'arrivé à l'air, cet agent excite leur muqueuse nasale et buccale; qu'ils respirent, mais peut-être malgré eux, et qu'ils n'étaient nullement venus à la surface de l'eau dans cette intention. Voilà où j'arrive avec la théorie que je combats. N'est-il pas plus sage et plus raisonnable de penser que ces individus sont obligés de venir de temps en temps à la surface de l'eau pour satisfaire le besoin indispensable et impérieux de l'hématose? Pour moi, je le crois; du reste, prenez la peine de retenir un homme au fond de l'eau, et vous verrez si, malgré l'absence de l'air, il ne respirera pas quand même? Nous ne le savons malheureusement que trop bien, et beaucoup, chaque année, en subissent les tristes conséquences.

Toutes ces raisons me font rejeter la théorie de M. Lenoel, et jusqu'à preuve du contraire, je maintiens celle que j'ai défendue, à savoir : que le nouveau-né respire parce qu'un besoin intérieur et impérieux le pousse à respirer; que plus tard ce besoin est en partie, comme les autres, soumis à la volonté; qu'elle peut lui résister un moment jusqu'à ce qu'elle soit subjuguée à son tour par l'instinct de la conservation qui nous fait agir et respirer quand même et dans tous les milieux.

NOTE

SUR LES

SACS OU RÉSERVOIRS CLOACAUX DU PYTHON

PAR M. LE Dr MÉTADIER.

Il y a bientôt deux ans, sous la direction de M. Bazin, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, M. Ladevi et moi fûmes chargés d'étudier l'anatomie du boa sur un magnifique individu mâle que nous avions le bonheur de posséder. Guidés par les savants qui s'étaient occupés du même sujet, nous trouvâmes le plus souvent la tâche facile. Notre dissection attentive, qui ne dura pas moins de vingt jours, ne nous apprit, en effet, que ce que MM. Cuvier, Duméril et Bibron, Milne Edwards, nous avaient parfaitement fait concevoir. Elle nous fit voir de plus, et avec la plus vive satisfaction, avec quelle précision, avec quel soin, l'anatomie de détail avait été traitée par les savants auteurs dont je viens d'énumérer les noms, et qui nous servaient de guides. Mais l'étude des organes de la génération, que nous suivîmes avec la plus grande attention, ne fut pas toujours conforme aux descriptions qui en avaient été faites, et le savant Mémoire de M. Martin Saint-Ange sur l'anatomie et la physiologie des organes génito-urinaires des vertébrés nous fut alors du plus grand secours, car ce fut là que nous puisâmes les renseignements les plus précis. Cependant, malgré cet important travail, plusieurs points nous paraissant encore pleins d'obscurité, nous les étudiâmes avec soin, et nous fîmes part de nos recherches à la Société.

Parmi les points que nous signalions, il en était un qui nous

paraissait mériter quelque intérêt au point de vue anatomo-physiologique, plutôt parce qu'il avait été mis de côté par les auteurs que par sa grande importance. Je veux parler de ces sacs ou réservoirs logés dans l'épaisseur de la queue, présentant une connexion manifeste avec les organes génitaux et venant s'ouvrir dans le cloaque.

Ces réservoirs, placés chez l'individu que nous observâmes en dedans des fourreaux copulateurs, de chaque côté du rachis, avaient la forme de sacs allongés; leurs parois étaient minces, résistantes, et leur structure, quoique présentant bien nettement des fibres musculaires, était essentiellement fibreuse. Chez cet individu, dont la longueur totale était de 3^{m}80, la longueur du sac était de 72 millimètres, et son diamètre ne dépassait pas 6 millimètres, environ le 12e de sa longueur.

Un orifice très ténu, dans lequel nous eûmes beaucoup de peine à faire pénétrer une soie de porc, faisait communiquer chaque réservoir avec la portion caudale et inférieure du cloaque au niveau des fourreaux copulateurs. L'action des muscles peauciers intervient probablement pour provoquer l'issue du liquide contenu dans la cavité, car le tissu qui le compose ne paraît pas doué d'une contractilité suffisante pour expliquer la sortie de ce liquide. L'ouverture, excessivement déliée, étant encore un obstacle à cette sortie, nous fûmes contraints d'admettre une action musculaire indépendante du sac. Du reste, la pression du doigt faisait suinter par cette petite issue un liquide particulier, sur la nature duquel nous reviendrons bientôt.

Des adhérences nombreuses, surtout au niveau du cloaque, existaient entre les sacs et les fourreaux copulateurs; quelques fibres élastiques unissaient encore ces organes dans le reste de leur étendue, mais leur intimité n'y était pas aussi grande que dans leur partie cloacale.

Le liquide qui remplissait ces sacs était jaunâtre, épais, semblable à la moutarde comestible, d'une odeur musquée, pénétrante et presque agréable. Sa densité était supérieure à celle de l'eau, et il gagnait immédiatement le fond d'un vase rempli de ce liquide.

Tels étaient les principaux caractères physiques et anatomiques que M. Ladevi et moi reconnûmes aux réservoirs que portait l'individu qui était alors soumis à notre étude. Communiqués à la

Société, leur publication en fut négligée, quoique adoptée par elle. Aujourd'hui, de nouvelles observations, faites avec le même soin, sont venues à l'appui de la première, et permettent d'ajouter encore quelques détails sur le même sujet.

L'hiver dernier, deux pythons mâles moururent à Bordeaux dans une ménagerie de passage dans cette ville, et devinrent pour moi un nouvel objet d'étude. Les caractères anatomiques qui distinguent ces serpents des boas sont assez peu importants. A peu près les mêmes dimensions, les mêmes habitudes, ils ne diffèrent essentiellement que par leur coloration et leur provenance; les premiers appartiennent exclusivement à l'ancien continent, les seconds au nouveau.

Ces deux individus, étudiés sous différents points de vue, ne me présentèrent rien de particulier, les organes génito-urinaires me reproduisirent exactement ceux du boa, en tenant compte, bien entendu, des différences de taille, car ces derniers avaient, l'un 2ᵐ60, l'autre 2ᵐ85, c'est à dire environ un quart de moins que le boa dont j'ai parlé plus haut. La disposition des organes était exactement la même. Dans un cas cependant, chez l'un de ces pythons, le rein gauche était beaucoup plus volumineux que le droit, quoique le nombre des lobes qui les constituaient fût exactement le même. Le nombre des lobes était de 24. La longueur totale du rein le plus volumineux était de 12 centimètres, celle du plus petit de 10.

Chez ces deux pythons, je trouvais, comme chez le boa, des sacs ou réservoirs tout à fait semblables; rien de changé ni dans la structure des sacs, ni dans la nature du liquide qu'ils renfermaient. Le plus grand présentait des sacs contenant peu de liquide, environ la 5ᵉ partie de ce que contenaient ceux de l'autre individu. Il y avait donc une légère différence d'aspect, mais elle était due uniquement à la vacuité presque complète des uns et à la distension des autres.

L'odeur de ce liquide était tout à fait analogue à celle que le boa nous avait fournie. Je serais tenté de dire exactement semblable; mais la comparaison n'ayant pu se faire qu'à une distance assez éloignée, il serait imprudent d'être trop affirmatif.

Il est assez naturel de se demander ici à quel appareil appartient ce sac et quelle est sa fonction.

Ce sac n'est certainement que le réservoir d'un appareil ganglionnaire logé dans l'épaisseur même du sac, et sécrétant le liquide qui en remplit la cavité. Aucune communication n'existe entre lui et les autres organes, si ce n'est l'ouverture dont j'ai déjà parlé, et qui le fait communiquer avec la cavité cloacale. Si cette cavité contenait des liquides analogues, il serait assez naturel de supposer que, malgré la finesse de l'ouverture, ces sacs pourraient être remplis par le liquide cloacal; mais il n'en est rien, une différence immense existe entre les matières excrémentitielles et le liquide qui nous occupe. L'aspect, l'odeur, et probablement aussi les caractères chimiques, les distinguent au premier coup d'œil.

Si les connexions intimes servent à limiter l'ensemble des appareils, malgré l'indépendance qui existe entre le sac et le fourreau copulateur, on ne pourra réellement s'empêcher de le considérer comme un appendice de l'appareil générateur. Aucune communication n'existe, il est vrai, entre le fourreau et le sac, mais en comprend-on bien la nécessité pour admettre qu'il fait partie de l'ensemble des organes reproducteurs? La région qu'il occupe suffit pour ne pas permettre de doute à ce sujet.

Quelle est sa fonction? Comme il ne m'a pas été permis de faire des observations sur ces animaux vivants; que, d'un autre côté, le milieu dans lequel nous les tiendrions pour l'observation nuirait singulièrement à la marche de leurs fonctions, il faut, pour résoudre ce point physiologique, étudier ce qui se passe dans les vertébrés supérieurs qui sont porteurs d'appareils de ce genre dont l'analogie est assez grande pour ne pas permettre le doute, et en conclure le rôle de cet appareil chez les ophidiens.

ÉTUDE

SUR LES

PREMIERS HABITANTS DE BORDEAUX

PAR M. SANSAS.

Une question d'ethnologie intéressante est celle de savoir quelles étaient les races auxquelles appartenaient les habitants de Bordeaux pendant les trois premiers siècles de l'ère chrétienne.

L'histoire nous fournit à ce sujet certaines indications que des circonstances assez singulières nous permettent de contrôler.

La Gaule, à l'époque où César en fit la conquête, était habitée par des peuplades nombreuses classées sous trois grandes divisions : la Gaule belgique, la Gaule celtique et l'Aquitaine. Les Belges, les Celtes et les Aquitains différaient par leur langage, leur constitution physique, leurs lois et leurs institutions. Voici comment s'exprime, à ce sujet, l'éminent capitaine dans ses *Commentaires*, livre Ier :

« Gallia est omnis divisa in partes tres, quarum unam incolunt » Belgæ, aliam Aquitani, tertiam qui ipsorum linguâ Celtæ nostra » Galli appellantur, *Hi omnes linguâ, institutis, legibus inter se* » *differunt.* »

Pline, chapitre IV, divise la Gaule de la même manière que Jules César :

« Gallia omnis comata, unc nomine appellata, in *tria populorum genera* dividitur, amnibus maxime distincta.

» A scalde ad sequenam Belgica,

» Ab eo ad Garumnam Celtica, eadem Lugdenensis,

» Inde ad Pirænei montis excursum Aquitania Aremorica antea » dicta. »

Le géographe Strabon, entrant dans de plus grands détails sur les caractères ethnologiques des peuples de la Gaule, nous fait connaître spécialement que, sur le territoire des Aquitains, il se trouvait un seul peuple de race purement celtique : c'étaient les *Bitouriges vivisci,* dont le principal *emporium* était *Bourdigala :*

> Εκβαλλει δὲ ὁ μεν Γαρουνας τρισι ποταμοῖς αὐξηθεὶς εἰς το μεταξὺ Βιτουριγων τε τῶν Ιοσκῶν επικαλουμενων, και Σαντόνων αμφοτέρων Γαλατικῶν ἐθνων· μονον γαρ δὴ το των Βιτουριγῶν τούτων ἔθνος ἐν τοῖς Ακουιτανοῖς ἀλλόφυλον ἵδρυται καὶ οὐ συντελεῖ αὐτοῖς.
>
> (STRABON, *Géographie. Verbo Aquitania.*)

Le même auteur nous fait aussi connaître que les Aquitains ressemblaient beaucoup plus aux Ibères qu'aux Celtes.

Auguste ayant donné à Bordeaux le titre et les prérogatives de capitale de l'Aquitaine, cette disposition administrative appela nécessairement, dans le sein de la ville que nous habitons, le concours de populations étrangères à ses habitants primitifs. Un assez grand nombre de familles d'origine aquitanique vint s'établir dans la capitale de la province : des Grecs, des Romains, des Germains, etc., vinrent aussi se mêler aux *Bitouriges.* Voilà ce que nous enseigne l'histoire.

Consultons maintenant les monuments qui nous restent de cette époque reculée.

Vers la fin du IIIe siècle, Bordeaux fut détruit de fond en comble. L'histoire est muette sur cet événement, mais le fait est matériellement prouvé par ce que nous offrent les débris de monuments journellement recueillis dans l'enceinte de notre ville.

Au commencement du IVe siècle, lorsque les Romains étaient encore uniques maîtres du territoire, Bordeaux, après une première destruction, fut pour la première fois entouré de murailles. Alors fut élevée cette enceinte dont nous voyons encore de nos jours quelques restes. Elle s'étendait : 1° de la place Rohan à la place du Palais, au nord des rues du Peugue, des Trois-Canards, du Mû (sous le mur *subter murum*) et Poitevine; 2° de l'angle formé par l'ancien palais de l'Ombrière (place du Palais) à la Bourse, en passant entre la rue des Argentiers et celle des Bahutiers; 3° de la Bourse à la rue de la Vieille-Tour, en longeant les

cours du Chapeau-Rouge et de l'Intendance établis sur l'emplacement des anciens fossés de la ville gallo-romaine; le nom de fossés du Chapeau-Rouge et de l'Intendance, récemment changé en celui de cours, indique cette origine. La muraille de ce côté a été reconnue sur toute cette ligne, et elle sert encore de fondements à la façade nord des bâtiments de l'ancienne Intendance; 4° enfin, le mur de ville se prolongeait en formant une ligne brisée de la vieille tour servant aujourd'hui de glacière, à la place Rohan, à l'angle de la rue du Peugue, derrière l'ancien cloître de Saint-André.

L'enceinte de la ville gallo-romaine du IVe siècle formait ainsi un long parallélogramme, indiqué dans les vers d'Ausone, lorsque, célébrant les beautés de sa ville natale vers la fin du IVe siècle, il en donnait la description. L'enceinte du temps d'Ausone est bien celle dont nous voyons encore les traces; car, dans tous les bouleversements que subit ou qu'a subis le sol de Bordeaux, on n'a pu en signaler une autre.

En établissant ainsi leurs murailles, les Bordelais gallo-romains restreignirent incontestablement l'espace qu'occupait primitivement leur ville. Ce fait ressort invinciblement des restes de bâtiments somptueux, et surtout du temple consacré aux dieux tutélaires de la ville, qui se sont trouvés hors de l'enceinte murale. Or, jamais le monument le plus important d'une cité, le temple de ses dieux tutélaires, n'a été établi hors de l'enceinte de ses murs, et laissé ainsi exposé à la merci des ennemis. Ce fait s'explique, au contraire, très bien à Bordeaux, parce que le temple de Tutelle, qui remonte au siècle d'Auguste, ayant été profané par la prise de la ville, avait perdu son caractère sacré lors de la construction des murailles. D'ailleurs, à l'époque de la construction des murailles, *sous des empereurs chrétiens,* on ne devait guère attacher d'importance aux monuments du paganisme.

Mais le fait capital, dans la construction des murs de Bordeaux, est que toute leur partie inférieure a été formée des débris de monuments antiques détruits violemment par le fer ou par le feu; ils en portent presque toujours les traces.

On distingue, parmi ces débris de toute sorte, une classe de monuments sur lesquels j'appelle votre attention d'une manière spéciale.

Ce sont des stèles ou cippes, portant presque toujours le nom et très souvent l'image de la personne du défunt, quelquefois celle des membres de sa famille.

Ces sculptures nous donnent de véritables *portraits* des habitants de Bordeaux, du Ier au IVe siècle de notre ère, moment où ils ont été employés comme matériaux; et ces indications, rapprochées des noms portés par les personnages, peuvent utilement, ce nous semble, servir à déterminer l'origine de la race de ces premiers habitants de notre ville.

On remarque dans les types une très grande variété, et cela s'explique parfaitement par les faits que l'histoire consacre.

Bordeaux, à cause de la nouvelle situation administrative qui lui était faite sous Auguste, dut rapidement s'accroître par l'arrivée d'étrangers de toute sorte. C'est ce que prouve la variété des types. Il en est cependant dont les formes se reproduisent un si grand nombre de fois, tandis que les autres se présentent pour ainsi dire exceptionnellement, qu'on ne peut méconnaître l'existence d'un type réellement indigène. C'est sur cette particularité, Messieurs, que j'appelle spécialement votre attention.

Lorsqu'on compare, par exemple, la tête de *Peregrina,* mère d'*Abascantus,* avec celle d'*Axula,* fille de *Cintugenus,* et celle de *Tatinia,* femme d'*Anaxagoras,* il n'est pas possible de méconnaître des différences caractéristiques entre ces divers types.

Peregrina, par exemple, a la figure ronde, plate, le menton large, etc., etc.

Axula, la figure ovale, les tempes déprimées, le menton très petit; l'ensemble de la face offre une forme triangulaire.

Tatinia a la figure très longue; son nom est d'origine celtique.

Peregrina est étrangère, son nom l'indique; elle n'appartenait pas aux races indigènes; l'ensemble de la physionomie nous parait se rapporter à celle des femmes d'Arles.

Axula, fille de *Cintugenus,* nous semble se rapporter au type indigène, parce qu'il se retrouve sur un grand nombre d'autres monuments, tels que ceux élevés à la mémoire de l'épouse de Cintugnatus *Matua,* de l'épouse de Aplonius *Quela,* de la fille de Cintugena *Aveta* (Désirée), etc., etc.

Tatinia ne me paraît pas appartenir au type aquitain.

Ces noms *Cintugenus, Cintugena,* appartiennent essentiellement à notre localité. On en retrouve aujourd'hui la trace dans un quartier de Bègles, appelé aujourd'hui *Saint-Ujan,* qu'on appelait encore, au Moyen Age, CENTUJAN. — *Domus de Centujano,* disent les anciens titres cités par l'abbé Baurein dans ses *Variétés bordelaises.*

Nous ne présentons ici qu'un simple aperçu indiquant à la Société une voie qui semble permettre de déterminer les races qui ont primitivement habité Bordeaux.

Je proposerai donc de nommer une Commission chargée de vérifier, à l'aide des monuments nombreux renfermés au Musée de Bordeaux, ce que mes observations peuvent avoir d'important, et de compléter, par une étude suivie de ces monuments, les indications sommaires que je soumets à votre appréciation.

NOTE DE M. PÉCHADERGNE

ANCIEN PROFESSEUR AU LYCÉE D'AVIGNON

sur le

PHÉNOMÈNE DE LA DÉPOLARISATION APPARENTE DE LA LUMIÈRE

DANS SON PASSAGE A TRAVERS UNE LAME CRISTALLISÉE

(communiquée par M. Abria) (¹).

Un rayon polarisé, transmis à travers une lame bi-réfringente, se divise en deux, qui se propagent avec des vitesses différentes, et la lumière émergente est, en réalité, composée de la réunion de deux faisceaux, qui ne s'accompagnaient pas à leur entrée dans la lame, et étaient séparés l'un de l'autre par un certain intervalle dépendant de la nature de la lame et de son épaisseur. Ce rayon émergent paraît complètement polarisé, tantôt dans l'azimut primitif, tantôt dans un azimut différent; d'autres fois, au contraire, il est partiellement polarisé, et, dans quelques circonstances, ressemble à un faisceau de lumière neutre. Je me propose, dans cette Note, d'examiner les conditions auxquelles doit satisfaire l'expérience pour que ce dernier cas se présente.

Analysé à sa sortie de la lame avec un prisme bi-réfringent, il donne deux images, l'une ordinaire, l'autre extraordinaire, dont les intensités sont représentées, d'après la théorie de Fresnel, par les formules suivantes.

(¹) Cette Note m'a été remise, en 1859, par l'auteur, qui suivait alors les Cours de la Faculté, et se préparait aux épreuves de la licence ès sciences physiques, qu'il subit avec succès au mois de juillet. Nommé, peu de temps après, professeur au lycée d'Avignon, il succomba, jeune encore, à une affection de poitrine dont il était atteint depuis longtemps. M. Péchadergne promettait de devenir un professeur distingué, et le petit travail publié aujourd'hui, quoique se rattachant à une question très simple, est cependant de nature à montrer le soin avec lequel il étudiait les questions de science. (A.)

L'image ordinaire I_o a pour expression :

$$I_o = \cos^2\beta + \sin 2\alpha \sin 2(\beta - \alpha) \sin^2 \pi \frac{c}{\lambda}$$

et l'image extraordinaire I_e :

$$I_e = \sin^2\beta - \sin 2\alpha \sin 2(\beta - \alpha) \sin^2 \pi \frac{c}{\lambda}$$

α et β sont égaux aux angles que forment respectivement, avec le plan primitif de polarisation, la section principale de la lame cristallisée et celle du prisme analyseur; c est égal à la différence de marche, mesurée dans le vide ou dans l'air, occasionnée par le cristal.

Pour que la lumière émergente paraisse neutre, il faut que l'on ait, quel que soit β, $I_o - I_e = 0$, ou

$$\cos^2\beta - \sin^2\beta + 2\sin 2\alpha \sin 2(\beta - \alpha) \sin^2 \pi \frac{c}{\lambda} = 0$$

ou

$$\cos 2\beta + 2\sin 2\alpha (\sin 2\beta \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cos 2\beta) \sin^2 \pi \frac{c}{\lambda} = 0$$

ou

$$2\sin 2\beta \sin 2\alpha \cos 2\alpha \sin^2 \pi \frac{c}{\lambda} + \left(1 - 2\sin^2 2\alpha \sin^2 \pi \frac{c}{\lambda}\right) \cos 2\beta = 0$$

ou, enfin,

$$\operatorname{tang} 2\beta . 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha \sin^2 \pi \frac{c}{\lambda} + 1 - 2\sin^2 2\alpha \sin^2 \pi \frac{c}{\lambda} = 0$$

Cette équation ne peut être satisfaite, quel que soit β, que par :

$$2\sin 2\alpha \cos 2\alpha \sin^2 \pi \frac{c}{\lambda} = 0$$

et

$$1 - 2\sin^2 2\alpha \sin^2 \pi \frac{c}{\lambda} = 0$$

lesquelles exigent que l'on ait :

$$\cos 2\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin^2 \pi \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

ou

$$\alpha = 45° \qquad \text{et} \qquad c = \frac{\lambda}{4}$$

Il est donc nécessaire, pour que la lumière émergente paraisse

complètement dépolarisée, que la lame amène entre les deux faisceaux interférents une différence de marche d'un quart de longueur d'ondulation, et que sa section principale soit à 45° du plan primitif de polarisation, ou, ce qui revient au même, que les deux faisceaux aient des intensités égales. Il n'était pas inutile de faire voir que ces deux conditions sont indispensables, et, de plus, sont les seules qui puissent faire apparaître le phénomène. On sait, d'ailleurs, que la lumière qui a traversé la lame mince n'est pas neutre en réalité, mais qu'elle est polarisée circulairement.

Juillet 1859.

EXTRAITS

DES

PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES DE LA SOCIÉTÉ.

ANNÉE 1866.

Président : M. ROYER. — *Secrétaire* : M. CHATARD.

Séance du 22 février. — Publications reçues :

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique, t. XIX, nº 5.

Les Tablettes agricoles.

Sont élus membres titulaires de la Société : MM. VALAT, JEANNEL, LINDER, SENTEX, ABBADIE.

M. BAUDRIMONT signale à l'attention de la Société un article du *Journal de Chimie*, attribuant à M. Varington l'honneur d'avoir obtenu, le premier, la transformation de l'azotate de potasse en azotite, à l'aide du sucre. Cette méthode, qu'on présente comme *nouvelle*, a été indiquée par M. Baudrimont, et publiée dans les Mémoires de la Société, en 1862.

Séance du 8 mars. — Publications reçues :

1º *Bulletin de la Société médicale d'Amiens ;*

2º *Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Bordeaux ;*

3º *Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique ;*

4º *Onzième Compte rendu de la Société de la Hesse supérieure pour les sciences naturelles et médicales.*

Sont nommés membres titulaires de la Société : MM. DE LACOLONGE et BÉRO.

Lectures faites dans cette séance :

Éloge de M. Bazin, par M. AZAM.

Éloge de M. Bernard, par M. H. BROCHON fils.

— *Note* de M. JEANNEL *pour servir à l'histoire de l'acétate de soude.*

Dans ce travail, l'auteur décrit plusieurs propriétés de ce sel, qui n'avaient pas été constatées jusqu'à présent.

L'acétate de soude cristallisé fond à + 58º C. C'est aussi la tem-

pérature fixe à laquelle il cristallise. Il bout à + 123° C. Lorsqu'on le laisse se refroidir à l'abri de l'air, après l'avoir fait fondre, il reste modifié par la chaleur; il a l'aspect d'une masse butyreuse, translucide. Si on l'expose alors à l'air libre, si on le touche avec un corps sec, si on le met en contact avec un cristal d'acétate de soude ordinaire, il reprend rapidement l'état cristallin ordinaire en dégageant beaucoup de chaleur : le thermomètre monte de 11° à + 54° C. Il résulte de là que l'acétate de soude peut servir à emmagasiner la chaleur solaire. En effet, on peut aisément, dans nos climats, obtenir pendant l'été une température supérieure à + 58° sous des châssis vitrés, et, par conséquent, faire fondre l'acétate de soude. Si cette fusion a lieu en vase clos, le sel conservera, en refroidissant, la modification déterminée par la chaleur, et lorsque ensuite on débouchera le vase, le sel, reprenant l'état cristallin ordinaire, dégagera une partie de la chaleur qu'il avait rendue latente en fondant. Cette chaleur est considérable, car 100 grammes de sel modifiés, refroidis à l'abri de l'air libre jusqu'à zéro, fondent 36 grammes de glace dans le calorimètre de Lavoisier, en reprenant l'état cristallin ordinaire, ce qui équivaut à un dégagement de 2,844 calories.

L'acétate de soude cristallisé, qui a perdu une partie de son eau de cristallisation par l'ébullition, et qu'on laisse refroidir à l'abri de l'air libre, se boursouffle considérablement en reprenant l'état cristallin et en absorbant de l'humidité; il brise alors les vases qui le contiennent; il en est de même de l'alun et de plusieurs autres sels.

L'acétate de soude, modifié par la fusion et refroidi, est très déliquescent. Étendu en couche mince à la surface d'une ampoule de verre, il peut être exposé à l'air libre, surtout lorsqu'il est additionné d'un dixième d'eau, sans reprendre l'état cristallin ordinaire; au contraire, il tombe en déliquium.

Séance du 22 mars. — Publications reçues :

Mémoires lus à la Sorbonne dans les séances extraordinaires du Comité impérial des travaux historiques et des Sociétés savantes, tenues les 19, 20, 21 avril 1865.

Lecture d'un ***Mémoire*** de M. Valat sur l'origine logique du calcul infinitésimal.

— M. Luzun lit un Rapport sur un travail envoyé à la Compagnie par la Société médicale d'Amiens. Dans le Bulletin dont on lui avait confié l'examen, M. Luzun a remarqué un Mémoire de M. Lenoël sur la cause de la première inspiration. Après avoir analysé le

travail, il déclare insuffisantes et mal interprétées les expériences invoquées par l'auteur pour établir que cette inspiration est due à l'action de l'air autour de la bouche et des fosses nasales. Pour M. Luzun, il y a analogie complète entre l'alimentation et la respiration, au point de vue de la cause première. C'est la faim qui fait prendre des aliments; c'est le besoin de respirer, c'est à dire le besoin de l'hématose qui fait que l'on respire. La faim, la soif et le besoin de respirer, sont des sensations internes sans siége fixe. L'aliment n'est pas la cause de la faim. L'air n'est pas la cause du besoin de respirer. S'il avait cette propriété, nous ne pourrions pas retarder ou accélérer notre respiration : il faudrait la subir. Les animaux, introduits dans un gaz tout différent de l'air, respirent quand même, et meurent faute d'oxygène, c'est à dire faute d'hématose. La respiration peut s'expliquer par les besoins pressants du sang amenant une réaction du bulbe rachidien. D'ailleurs, M. Luzun établit que le nerf pneumo-gastrique, issu du bulbe rachidien, ne fonctionne jamais qu'après la formation du sang ou pour réparer ses pertes; les branches de ce nerf, qui se distribuent aux poumons, agissent comme celles qui se distribuent au cœur et au foie.

La respiration s'établit immédiatement après la naissance, parce que le sang a besoin d'être hématosé, en partie du moins, 150 fois par minute, etc., etc.

Après la réfutation des conclusions de M. Lenoël, relativement aux mouvements que l'on fait subir à l'enfant menacé d'asphyxie au moment de sa naissance, M. Luzun énumère quelques autres arguments moins importants en faveur de sa théorie, et termine en refusant à l'air, comme agent actif, par ses propriétés physiques ou chimiques, à part quelques exceptions pour ce qui est de la température, toute coopération dans l'établissement de la première inspiration.

M. Oré, dont les leçons et les travaux ont été invoqués par le Rapporteur, croit que le sang est bien réellement la cause de la respiration, comme il est celle de la contraction du cœur.

L'honorable membre cite ici quelques expériences de Haller et de lui-même, venant à l'appui de son assertion.

M. Sentex partage l'opinion de ses honorables collègues, en ce sens qu'il croit que le sang est la cause de l'acte respiratoire. Il trouve dans la disposition du canal artériel, dans les modifications qui surviennent dans ce canal à mesure que le fœtus avance en âge, modifications qui aboutissent à l'oblitération de ce conduit et forcent ainsi la plus grande partie de l'ondée sanguine à passer dans le poumon, la cause efficiente de cette première inspiration.

— M. Jeannel communique ensuite, en quelques mots, le résultat de ses recherches sur les solutions salines sursaturées en général et la solution de sulfate de soude saturée à + 33° C., refroidie vers + 12° C. à l'abri de l'air libre. Cette solution donne elle-même de très beaux cristaux d'un hydrate beaucoup moins soluble dans l'eau que le sulfate de soude ordinaire.

Séance du 11 avril 1866. — Sont nommés membres titulaires de la Société : MM. Paul Bert et Colot.

Séance du 26 avril. — Publications reçues :

Mémoires de la Société des Naturalistes de Brünn, t. III.

Compte rendu de l'excursion de la Société Linnéenne.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique.

— M. de Lacolonge met sous les yeux de la Société deux spécimens en vraie grandeur du moteur à pression d'eau de M. Perret. Il rend compte des expériences qui ont été, à diverses reprises, exécutées sur cette machine sous les auspices de la Compagnie du Chemin de fer du Midi et de M. de La Roche-Tolay, sous-directeur de la construction.

M. de Lacolonge expose la théorie de la nouvelle machine, compare les déductions aux faits observés, et montre qu'elle est spécialement propre à utiliser de petits volumes d'eau sans forte chute.

Entrant dans un ordre d'idées plus pratiques, il explique ce qui a été fait pour appliquer le récepteur de M. Perret à la perforation des roches par le diamant. Il s'agit de l'outil rotatif inventé par M. Leschot et exécuté par M. Pihet. La Compagnie en a un spécimen sous les yeux.

Ces essais en grand, exécutés au tunnel Saint-Elme, à Port-Vendres, ont montré que le perforateur, actionné par le moteur à pression d'eau, avançait sans peine, de 1 à 2 centimètres par minute, dans un talcschiste fort dur. Pour un trou de mine de 0m60 de profondeur, il suffit donc d'une heure au plus, tandis que deux mineurs, par les procédés ordinaires, n'effectuent ce travail qu'en deux heures et demie. Dans ces conditions, on peut espérer que le travail, qui n'est aujourd'hui que de 0m30 en vingt-quatre heures, sera aisément de 1m80 dans le même temps. Pour y arriver, la Compagnie du Midi fait exécuter en ce moment un charriot portant huit perforateurs, attaquant de front toute la section du tunnel, et y pratiquant par station soixante trous de mine.

Notre collègue est assisté, dans ses explications, de M. Perret,

ingénieur civil, inventeur du moteur, qui reçoit les félicitations de la Société; de M. Darriet, constructeur mécanicien, qui a fabriqué la machine avec un soin digne d'éloges; de M. Quereillac, élève des écoles des Arts et Métiers, auteur des études graphiques, aussi consciencieuses que finement exécutées, dont la Société agrée l'hommage qui lui est fait par les intéressés.

Ces messieurs joignent à ce don un certain nombre de fragments de roches enlevés par la machine dans le tunnel de Saint-Elme.

Séance du 17 mai. — M. VALAT est nommé archiviste de la Société.

Cet honorable membre donne un court résumé de ce qu'il a pu remarquer d'intéressant dans la réunion des délégués des Sociétés savantes des départements à la Sorbonne.

— M. BAUDRIMONT fait part à la Société de la découverte qu'il vient de faire d'une nouvelle eau oxygénée. Il remet à une époque plus éloignée la communication complète de sa découverte.

Séance du 31 mai. — La Société vote à l'unanimité une somme de 200 francs pour participer à l'élévation d'un monument à la mémoire de feu le docteur Bazin.

— M. LESPIAULT annonce que l'Association scientifique de France tiendra prochainement ses séances publiques à Bordeaux, sous la présidence de M. Le Verrier. Il espère que tous les membres de la Société voudront bien faire partie de cette Association scientifique. Il rappelle les conditions d'admission, et se met à la disposition de tous les membres qui désireraient en faire partie.

— M. SOUS communique à la Société divers travaux entomologiques publiés par M. Sichel, de Paris, qui désirerait obtenir le titre de membre correspondant. M. le Président prie M. Samy et M. Sous d'examiner ces travaux et de faire un Rapport à la Société.

— M. BROCHON présente des fragments d'une tortue marine trouvée à Léognan.

Séance du 14 juin. — Publications reçues :

1° *Société centrale et impériale d'Agriculture de France*, 4e et 5e bulletins;

2° *Notice sur les travaux de la Société de Médecine de Bordeaux;*

3° *Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique.*

Sont élus membres de la Société : MM. SANSAS et VERGELY.

Séance du 5 juillet. — Correspondances, Bulletins, Mémoires :

1° *Actes de la Société Linnéenne de Bordeaux;*

2° *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin;*

3° *Mémoires de la Société des Sciences naturelles de Strasbourg.*

— MM. Morisot et Serré communiquent à la Société les nombreuses expériences qu'ils ont faites sur les propriétés de l'ozone.

Ces messieurs se proposaient de vérifier s'il ne se dégage pas d'ozone, quand l'eau décomposée par la pile est rendue conductrice au moyen d'un chlorure ou de l'acide chlorhydrique.

Ils ont constaté que, dans ce cas, il ne se dégage que très peu d'oxygène ; encore faut-il que la dissolution soit très étendue. C'est surtout le chlorure de l'acide chlorhydrique qui est décomposé.

En essayant d'absorber par la potasse le chlorure du mélange recueilli au pôle positif, ils ont reconnu que l'oxygène restant n'est pas ozoné. Mais comme ils ont vu, dans d'autres expériences, la potasse enlever à l'oxygène les caractères de l'ozone, et que la plupart des absorbants du chlore jouissent de la même propriété, MM. Morisot et Serré pensent qu'il ne faut pas conclure à l'absence de l'ozone, non plus qu'à sa présence dans la décomposition par la pile de l'eau additionnée d'un chlorure ou d'acide chlorhydrique.

Ils ont aussi observé que le brômure de potassium, de même que l'iodure en dissolution dans l'eau, est décomposé par l'ozone, et que le brôme est mis en liberté.

Ils ont fait agir différents corps sur l'oxygène ozoné, et donnent une liste de ceux qui lui enlèvent les caractères de l'ozone aussitôt qu'ils sont en contact avec ce gaz ou par un contact prolongé ; enfin, ils indiquent ceux qui n'ont aucune influence sur l'oxygène ozonisé.

Séance du 19 juillet. — Publications reçues :

Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin;

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Bordeaux, 4e trimestre 1865.

— M. Hoüel propose de publier dans nos *Actes* la traduction d'un Mémoire allemand du géomètre russe Lobatschewsky, où la théorie des parallèles est présentée sous un point de vue très peu connu en France, et qui s'accorde avec celui de Gauss. Les résultats établis par ce Mémoire prouvent que Legendre et les géomètres qui l'ont suivi ont fait fausse route en cherchant à établir l'axiome fondamental de la théorie des parallèles sur d'autres bases que sur l'expérience.

— M. Paul Bert fait part à la Société des observations qu'il a

faites, soit à Paris, soit dans son laboratoire de Bordeaux, sur l'annulation des *propriétés toxiques* des solutions contenant, soit de la curarine, soit de la strychnine, lorsqu'on ajoute à ces liquides une certaine proportion d'acide phénique. Lorsqu'on opère ainsi, ce liquide se trouble, s'émulsionne sans précipiter. Si on le filtre jusqu'à complète limpidité, on obtient un liquide qui ne possède plus de propriétés toxiques; mais si l'on fait redissoudre la substance qui s'est arrêtée sur le filtre, les propriétés toxiques reparaissent. M. Bert se demande si, par ce moyen, dont il ne cherche pas à expliquer la cause, mais qui sépare si bien la curarine et la strychnine de leur dissolution, et probablement aussi d'autres alcaloïdes, on ne trouverait pas quelques applications importantes, soit au point de vue industriel, soit au point de vue médico-légal.

M. Baudrimont fait observer à M. Bert que l'acide phénique ne se comporte pas comme un acide vis à vis des alcaloïdes; il ajoute que les poisons organiques n'agissent pas de la même façon que les venins en présence d'un acide. Il a beaucoup expérimenté sur les venins des vipères et des abeilles, et il raconte que, piqué par un xylocope, il apaisa la douleur au moyeu de l'ammoniaque. Ce venin était probablement acide.

M. Bert répond qu'il sait bien que l'acide phénique ne doit pas être considéré comme un acide, mais qu'il ne le considère pas non plus comme jouant un rôle semblable dans les phénomènes dont il a entretenu la Société.

Quant aux venins, M. Bert a pu observer que ceux des vipères, des scorpions, des araignées, des abeilles, présentent des différences notables dans leurs effets physiologiques, comme dans leur composition chimique, celui des scorpions et des abeilles étant acides, tandis que celui des vipères est alcalin.

Séance du 2 août. — M. le Président annonce la mort de M. Billiot, membre de la Société. Une notice biographique sera imprimée dans un prochain cahier. M. Ladevi-Roche est chargé de sa rédaction.

M. Peyraud est élu membre de la Société.

— M. Sous donne un aperçu d'une méthode pour trouver les caractères de divisibilité par les nombres terminés par l'un des chiffres 1, 3, 7, 9.

Soit $10a+b$ le diviseur proposé, et supposons d'abord que b soit l'un des chiffres 1, 3, 9. On déterminera le nombre x par la formule

$$x = \frac{9a}{b} + 1 .$$

On opérera ensuite de la manière suivante sur le nombre à essayer. On multipliera le chiffre des unités par x et l'on ajoutera le produit au nombre total des dizaines. On considérera le nombre résultant comme un nouveau nombre d'unités, sur lequel on opérera comme sur le nombre proposé; et l'on répétera ce procédé jusqu'à ce que l'on soit parvenu au plus petit reste possible, lequel, dans le cas de la divisibilité, devra être égal au diviseur ou à un de ses premiers multiples.

Si $b = 7$, on prendra pour x un nombre négatif, dont la valeur absolue sera $3a + 2$, et l'on fera le calcul comme dans le cas précédent, en ayant seulement égard aux signes.

M. Sous a fait voir, en outre, comment, au moyen des calculs faits pour constater la divisibilité, on pouvait immédiatement reconstituer le quotient de la division.

En terminant, M. Sous annonce qu'il rédigera sur sa méthode une note complète, note dans laquelle il exposera méthodiquement le point de départ et le mécanisme de son procédé.

— M. Sansas donne lecture d'un Rapport sur des Mémoires d'archéologie, lus à la Sorbonne les 19, 20, 21 avril 1865 (section d'archéologie).

Les matières dont traitent ces Mémoires, au nombre de 27, ne rentrent pas dans le cadre spécial de nos études : M. Sansas n'en donne, en conséquence, qu'un compte rendu très sommaire.

Cependant, il signale à l'attention deux Mémoires dus à M. Louis Leguay, architecte. Ces Mémoires sont en effet pleins d'intérêt : le premier, sur un carneillou ou cimetière de l'âge archéologique de la pierre, découvert à la Varenne-Saint-Hilaire, commune de Saint-Maur-des-Fossés (Seine); l'autre, sur la découverte, dans la même commune, d'une pierre paraissant avoir servi à polir les haches à silex de l'âge de pierre.

— MM. Serré et Morisot, en continuant leurs recherches sur les propriétés de l'ozone, ont eu l'idée, dans la décomposition par la pile, d'employer un électrode positif en or, qui s'est recouvert d'une poudre brunâtre de sesqui-oxyde d'or. Ces messieurs ont recherché partout si ce moyen était connu; ils n'ont rien trouvé d'analogue. Dans ce cas, l'oxygène qui se dégage est à peine ozoné. Des feuilles d'argent, exposées à un courant d'air ozoné par le phosphore, noircissent en devenant du bioxyde d'argent; l'acide sulfurique le change en sulfate, avec dégagement d'oxygène ozoné.

BULLETIN

DES

PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES

REÇUES PAR LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES pendant l'année 1866-1867 [1].

N° 1.

Monatsberichte der K. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. **(Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Berlin.)**

Année 1865.

Janvier. — Riess : Second Mémoire sur la déviation de l'aiguille aimantée par les courants dérivés de la batterie électrique. — Bary : Nouvelles recherches sur les Urédinées, particulièrement sur le développement du *Puccinia graminis,* et sur ses rapports avec le *Æcidium Berberidis* (35 p., 1 pl.). — Peters : Sur de nouveaux gastéropodes terrestres des Indes orientales, et sur deux étoiles de mer de Costa-Rica (8 p.). — Wojeikoff : Calcul des mouvements du baromètre à Providence dépendant de la loi de rotation. — Kummer : Discours annuel (Maupertuis et d'Alembert) (13 p.).

Février. — Haeckel : Sur une nouvelle forme de génération alternante chez les Méduses, et sur les rapports qui existent entre les Géryonides et les Æginides (10 p.). — Peters : Sur une nouvelle espèce de bars, *Labrax Schœnleinii,* de Célèbes. — Peters : Sur certaines espèces de poissons du genre *Serranus* de Bloch (15 p.). — Rammelsberg : Sur la composition des minerais de manganèse, et sur le poids spécifique de ces minerais et des oxydes de manganèse en général (5 p.). — Magnus : Sur les spéctres calorifiques des flammes lumineuses et non lumineuses.

Mars. — Dove : Sur lés illusions d'optique dans le mouvement.—

[1] Dans sa séance du 21 février 1867, la Société a décidé qu'il serait inséré, à la fin de chaque livraison de ses Mémoires, une table des matières des articles scientifiques les plus importants contenus dans les Mémoires des Sociétés savantes avec lesquelles elle échange ses publications.

Foerster : Observation du satellite de Sirius à l'Observatoire de Berlin. — Martens : Sur deux nouvelles Echinides de l'Asie orientale. — Feussner : Sur l'absorption de la lumière à des températures variables.

Avril. — Kummer : Sur la surface minimum ayant pour limite donnée un quadrilatère gauche formé par quatre arêtes d'un tétraèdre régulier (5 p.). — R. Weber : Combinaisons du chlorure acide de sélénium avec les chlorures métalliques. — Poggendorf : Sur une nouvelle disposition de la pompe pneumatique à mercure (9 p.). — Poggendorf : Nouvelle note sur l'influence de quelques circonstances non encore obtenues sur les phénomènes de la décharge électrique (6 p.). — Poggendorf : Sur un appareil inventé et construit par Holtz, et que l'on pourrait appeler machine par influence. — Lipschitz : Sur les lois asymptotiques de certaines fonctions arithmologiques (12 p.). — Braun : Sur le genre *Selaginella* (25 p.).

Mai. — Peters : Addition à son Mémoire sur le *Chiromys*. — Kundt : Sur la communication du son des verges vibrant longitudinalement et des tuyaux à l'air ambiant (22 p.). — Peters : Communication relative aux chiroptères.

Juin. — Peters : Nouvelle addition à son Mémoire sur les *Typhlopina* (5 p., 1 pl.). — Rammelsberg : Sur la composition et la constitution de la topaze (16 p.). — Wiedemann : Sur le magnétisme des sels des métaux magnétiques (6 p.). — Peters : Sur la classification des insectivores. — Kummer : Sur les systèmes de rayons (faisceaux) algébriques, et, en particulier, sur ceux du premier et du second ordre (5 p.). — Quincke : Sur le passage de la lumière réfléchie totalement dans un milieu moins dense (17 p.).

Juillet. — Hofmann : Discours sur les progrès de la chimie. — Spoerer : Sur les taches solaires (15 p.). — Peters : Sur les chauves-souris (8 p.). — Lossen : Sur l'hydroxylamine, $O^{16}S^{32}C^{12}$. — Magnus : Sur les modifications produites dans les barreaux magnétiques par la traction, ainsi que par le passage d'un courant galvanique (16 p.). — Riess : Sur la charge du condensateur par les courants dérivés de la batterie de Leyde (15 p.). — Poggendorf : Sur la perturbation de la décharge par étincelle de l'appareil d'induction, produite par le voisinage de substances isolantes (11 p.).

Août. — Peters : Sur un gekko fossile, *Hemidactylus*. — H. v. Schlagintweit-Sakünlünski : Sur la température moyenne de l'année et des saisons, et sur le caractère général des lignes isothermes dans l'Inde et la Haute-Asie. IIe partie : Himalaya, Thibet et Turkestan (25 p., 5 pl.). — Reichert : Sur la substance contractile *(sarcode, protoplasma)* et les phénomènes de mouvement qu'elle pré-

sente chez les Polythalamiées et quelques autres animaux inférieurs. (12 p.).

Octobre. — PETERS : Sur les chauves-souris appartenant aux *Vampyrus,* et sur la place naturelle du genre *Antrozous* (22 p.).

Novembre. — PAALZOW : Recherches sur la température de l'étincelle électrique. — PETERS : Sur les chauves-souris du Brésil, décrites par Spix (20 p., 1 pl.). — SPOERER : Sur les taches solaires (19 p., 1 pl.). — RAMMELSBERG : Sur les degrés inférieurs d'oxydation du molybdène (6 p.).

Décembre. — HOFMANN : Sur l'amidodiphénylimide, nouvelle base organique de C.-A. Martius et P. Griess (8 p.). — PETERS : Sur quelques chauves-souris peu connues *(Phyllostoma brachyotum, Cœlops, Furia, Lasionycteris)* (8 p.). — HOFMANN : Sur l'action du trichlorure de phosphore sur les sels de la monamine aromatique (12 p.). — BEYRICH : Sur quelques céphalopodes du muschelkalk des Alpes, et sur des espèces voisines (12 p.). — HILGENDORF : Sur l'appareil dentaire des rongeurs léporidés. — MARTIUS : Sur l'amidodinaphtylimide et le diazoamidonaphtole. — KRONECKER : Sur quelques formules d'interpolation pour les fonctions entières de plusieurs variables (4 p.).

Année 1866.

Janvier. —W. PETERS : Sur la position zoologique du Lepidosiren. — W. PETERS : Tableau des espèces de Rongeurs appartenant aux *Murins.* — W. PETERS : Sur quelques Vespertiliens nouveaux ou peu connus (9 p.).

Février. — ROSE : Sur les formations régulières qui se rencontrent dans les variétés de l'albite dites *périclines* (4 p.). — R. WEBER : Sur la formation de l'acide sulfurique (4 p.). — MAGNUS : Sur la polarisation de la chaleur rayonnante, et sur son passage à travers des plaques parallèles (12 p.). — MAGNUS : Sur l'influence de l'absorption de la chaleur sur la formation de la rosée (11 p.). — C.-A. MARTIUS : Sur une combinaison double du ferro-cyanure de potassium avec le nitrate de potasse et de soude (3 p.). — PETERS : Sur de nouveaux poissons et amphibies du Musée Royal zoologique (11 p.). — WEIERSTRASS : Sur une classe de fonctions à période réelle (19 p.). — DU BOIS-REYMOND : Cristaux de gypse du Sahara.

Mars. — RIESS : Sur les moyens de reconnaître le courant dérivé d'une pile (16 p.). HOFMANN : Sur les synthèses de la guanidine (9 p.). — EHRENBERG : Sur un tuf phytolithaire qui se rencontre comme terrain dans la vallée de Toluca, au Mexique (11 p.). — PETERS : Sur le jabot (sac guttural) du Marabout *(Leptotilus cru-*

meniferus). — C.-A. Martius : Sur un moyen perfectionné pour la représentation du diazo-amido-benzol.

Avril. — A. de Bary : Nouvelles recherches sur les Urédinées (11 p.). — Kummer : Sur deux surfaces remarquables du quatrième degré (5 p.).

Mai. — Reichert : Sur le mouvement (rotation, circulation) de la sève dans les cellules végétales, dans ses rapports avec la question de la contractilité (6 p.). — Peters : Sur les *Otariæ* (lions marins, ours marins) (21 p.). — Vom Rath : Sur un cas de présence de l'augite comme formation des fumaroles (3 p.). — Lepsius : Deux lettres écrites du Caire et de Damiette (16 p.). — Carrington Bolton : Sur les caractères distinctifs des combinaisons de fluor et d'urane (7 p.). — Ehrenberg : Nouvelles considérations sur la couche puissante de terrain siliceux à infusoires qui se trouve au-dessous du sol en divers endroits de Berlin (5 p.).

Juin. — R. Weber : Sur la décomposition du sulfure de carbone par le chlorure d'iode, et sur les produits qui en résultent (5 p.). — F. Hildebrand : Sur le trimorphisme dans le genre *Oxalis* (23 p.). — Schimkow : Sur le spectre de l'aigrette et de l'étincelle électrique dans l'air (12 p.). — Du Bois-Reymond : Addition à sa théorie des courants d'induction du muscle (6 p.). — Peters : Sur des Vespertiliens et des Rongeurs nouveaux ou mal connus (10 p.). — Richelot : Sur la transformation du second ordre dans les intégrales ultraelliptiques du premier ordre (5 p.). — Siemens : Méthode pour des observations répétées de la température de la mer dans les sondages (3 p.). — Heine : Sur les fractions continues (16 p.).

Juillet. — Hilgendorf : Sur le *Planorbis multiformis* du calcaire d'eau douce de Steinheim (31 p.). — Reichert : Sur la substance contractile et la structure intime des Campanulaires, des Sertulaires et des Hydrides (5 p.). — Peters : Sur les Poissons. — Baeyer : Sur la réduction des combinaisons aromatiques au moyen du zinc en poudre.

Août. — Rammelsberg : Sur l'acide phosphoreux et ses sels (13 p.). — Sell et Lippmann : Sur l'action de l'éthyle de mercure sur l'éthyle monobromacétique. — R. Weber : Sur la formation du protoxyde d'azote par l'action de l'acide sulfureux sur l'acide azoteux et l'acide sulfurique (5 p.).

Septembre et *Octobre.* — Kronecker : Sur les formes bilinéaires (16 p.). — Weierstrass : Sur les surfaces dont la courbure moyenne est nulle en chaque point (12 p.). — Hincks : Sur un document nouvellement découvert, relatif à d'anciennes éclipses de lune (9 p.).

Novembre. — Ehrenberg : Sur les progrès de la photographie en

Europe et en Amérique, remarquables au point de vue scientifique (9 p.). — Peters : Sur les Otariées (6 p.). — Peters : Nouveaux documents relatifs aux chauves-souris (10 p.). — Hofmann : Sur la transformation de la monamine aromatique en acides plus riches en carbone (6 p.). — Hofmann : Méthode de Graham pour la séparation mécanique des parties constituantes de l'atmosphère. — Dove : Sur la variation moyenne et absolue de la température de l'atmosphère (16 p.). — Philippi : Remarques sur les poissons de rivière du Chili (11 p.). — A. Baeyer : Sur la constitution de l'acide mellique. — Förster : Observations du phénomène de novembre en 1866 (4 p.). — Auwers : Sur l'orbite de Sirius. — Erdmann : Sur la matière colorante des aliments devenus rouges et bleus.

Abhandlungen herausgegeben vom naturwissenschaftlichen Vereine zu Bremen. (Mémoires de la Société des Sciences naturelles de Brême.)

Tome I, 1er cahier 1866.

F. Buchenau : Additions et corrections à la *Flora Bremensis* (46 p.). — W. O. Focke : Sur le *lolium festucaceum*. — W. O. Focke : Sur les tubes fulminaires près d'Oslebshausen. — F. Buchenau : Sur la présence d'une double spathe, et sur la germination du *Richardia (Calla) æthiopica* (L.) *Buchenau* (6 p., 1 pl.). — C. Ochsenius : Température de l'air et de l'eau de mer à la surface, entre Callao et Valparaiso. — Ed. Lorent : Sur la rage des chiens (20 p.). — W. O. Focke : Étude des terrains des environs de Brême.

Verhandlungen des naturforschenden Vereins in Brünn. (Mémoires de la Société des Naturalistes de Brünn.

Tome I (1863).

J. Nave : Sur la limite et les points de contact du règne animal et du règne végétal (10 p.). — Marian Koller : Sur l'instrument des passages (35 p.). — C. Schwippel : Sur les circonstances géognostiques des environs de Lettowitz (7 p.). — A. Makowsky : Flore du cercle de Brünn (166 p.). — J. Müller : Catalogue des coléoptères trouvés jusqu'à ce jour en Moravie et dans la Silésie autrichienne.

Tome II (1863).

G. v. Niessl : Sur la nature physique du soleil (4 p.). — M. Koller : Sur la théorie de l'héliostat d'August (12 p.). — J. Kalmus, J. Nave et G. v. Niessl : Travaux préparatoires pour une flore des cryptogames de Moravie (2 p.). — J. Nave : Les algues de Moravie

et de Silésie (1re suite) (42 p.). — G. v. NIESSL : Recherches sur l'exactitude des procédés de nivellement et de mesure des distances, d'après la méthode de Stampfer (33 p.). — J. NEUMANN : Le Musée de Troppau (7 p.). — G. MENDEL : Observations météorologiques en Moravie et en Silésie, pour l'année 1863 (23 p.). — Bon H. v. LEONHARDI : Les Characées d'Autriche connues jusqu'à ce jour, considérées au point de vue morphogénique (104 p.).

Tome III (1864).

C. SCHWIPPEL : La région houillière de Rossitz-Oslawa (14 p.). — J. SAPETZA : Notices géognostiques et minéralogiques sur les environs de Neutitschein (14 p.). — A. OBORNY : Notices sur le caractère minéralogique et géognostique des carrières de la Moravie (15 p.). — M. KOLLER : Note sur la théorie du niveau à bulle d'air (14 p.). — G. v. NIESSL : Travaux préparatoires pour une flore de cryptogames de la Moravie et de la Silésie autrichienne. II. Champignons et Mucédinées (134 p., 1 pl.). — Bon H. v. LEONHARDI : Additions et rectifications au Mémoire sur les Characées (tome précédent) (9 p.). — E. STEINER : Première addition au catalogue de *J. Müller* des Coléoptères trouvés jusqu'à ce jour dans la Moravie et la Silésie autrichienne (6 p.). — G. MENDEL : Observations météorologiques faites en Moravie et en Silésie pendant l'année 1864 (12 p.).

Tome IV (1865).

A. MAKOWSKY : Sur la théorie de la création organique de Darwin (8 p.). — G. v. NIESSL : Sur la forme mathématique de la terre, etc. (10 p.). — A. MAKOWSKY : Sur les blocs erratiques (7 p.). — G. MENDEL : Essai sur les hybrides végétaux (45 p.). — A. GARTNER : Les Géométrines et les Microlépidoptères de la faune de Brünn (223 p.) — A. OBORNY : Sur quelques carrières de gypse de la Moravie, et particulièrement sur celle de Koberitz, près d'Austerlitz (6 p.). — G. v. NIESSL : Travaux préparatoires pour une flore des cryptogames de la Moravie et de la Silésie autrichienne. III. Cryptogames supérieurs (34 p.). — G. MENDEL : Observations météorologiques faites en Moravie et en Silésie pendant l'année 1865 (13 p.).

Berichte der Oberhessischen Gesellschaft für Natur-und Heilkunde. (Mémoires de la Société d'Histoire naturelle et de Médecine de la Hesse supérieure.)

Tome VIII (1860).

H. HOFFMANN : Études comparatives sur la théorie de l'habitat constant des plantes (12 p.). — O. VOLGER : Faits propres à décider

entre les points de vue anciens et modernes en géologie (10 p.). — J. Rossmann : Sur les caractères distinctifs des phanérogames et des cryptogames. — K. Koch : Chauves-souris de la Hesse supérieure et des contrées voisines (38 p.). — v. Heiden : Notice sur les galles fossiles trouvées sur les feuilles dans les mines de houille de Salzhausen. — Tasche : Notices climatologiques. I. Coup d'œil sur les observations météorologiques faites au Jardin botanique de Giessen. II. Observations météorologiques faites à Salzhausen, de 1857 à 1859. — Seibert : Note sur la géologie de l'Odenwald, notamment sur les couches de calcaire granulé et les gangues de quartz qui s'y rencontrent (6 p.). — O. Buchner : Sur les météores ignés et les météorites. — Hoffmann : Saisons de la végétation en 1859 (1 pl.). — K. Heyer et J. Rossmann : Flore phanérogame de la province de Hesse supérieure, et particulièrement des environs de Giessen (96 p.).

Tome IX (1862).

K. Heyer et J. Rossmann : Flore phanérogame de la province de Hesse supérieure, et particulièrement des environs de Giessen *(suite)*.

Tome X (1863).

W. Scriba : Coléoptères du grand duché de Hesse et des contrées les plus voisines (60 p.). — Documents sur la flore cryptogame du grand duché de Hesse et des contrées limitrophes. I. Fr. zu Solms-Laubach : Liste et habitat des champignons du pays. II. O. Buchner : *Geaster coliformis* (Pers.), près Darmstadt. III. R. zu Solms-Laubach : Lichens recueillis et déterminés par moi aux environs de Braunfels et de Laubach. IV. R. zu Solms-Laubach : Addition aux Mousses trouvées en Hesse supérieure, etc. (13 p.). — Hoffmann : Époques de la végétation en 1861-62 (11 p.). — Notices climatologiques. 1° Hoffmann : Observations météorologiques faites au Jardin botanique de Giessen ; 2° Tasche : Observations météorologiques faites à Salzhausen en 1861-62. — O. Buchner : Notes sur les météorites d'Allemagne. — W. Dickoré : Additions à la liste des Papillons des environs de Giessen donnée dans les tomes II et III des Mémoires de la Société. — K. Heyer et J. Rossmann : Flore phanérogame de la province de Hesse supérieure, et particulièrement des environs de Giessen *(fin)* (274 p.).

Tome XI (1865).

W. Scriba : Coléoptères du grand duché de Hesse et des contrées les plus voisines *(suite)* (58 p.). — Hoffmann : Tableaux mycologiques (11 p.). — Hoffmann : *Parerga botanica*. 1° Action de la cuisson

sur les graines; 2° Sur la prétendue congélation des plantes au-dessus de 0°. — Documents sur la flore cryptogame du grand duché de Hesse et des contrées limitrophes *(suite)*. V. Fr. zu Solms-Laubach : Champignons. VI. Bagge et Metzler : Flore des Lichens de Francfort-sur-le-Mein. VII. Notes sur la flore cryptogame de la Wettéravie. VIII. Mousses recueillies par divers. IX. Rossmann : Liste des Mousses observées par Dillenius aux environs de Giessen (37 p.). — P. Seibert : Note sur la géologie de l'Odenwald hessois (29 p.). — Hoffmann : Époques de la végétation à Giessen en 1862-63. — Tasche et Hoffmann : Notices météorologiques. — W. Uloth : Études sur quelques spores de Lichens (9 p.).

Amtlicher Bericht über die 39te Versammlung deutscher Naturforscher und Aertzte in Giessen, im September 1864. (Rapport sur la 29e réunion des naturalistes et des médecins allemands à Giessen, septembre 1864.) — 1 vol. in-4° (260 p., 6 pl.).

Séances générales. — Jessen : L'histoire naturelle en Allemagne. — Horn : Sur l'extrait de viande obtenu du bouillon de Liebig, en 1854. — Birnbaum : Sur la question des engrais d'après Liebig. — Hoffmann : Sur le rapport des végétaux avec les terrains.

Mathématiques et Astronomie. — Weiler : Transformation des équations différentielles du mouvement dans la théorie de la Lune.

Physique. — Friedmann : Sur la cause des perturbations non périodiques de l'atmosphère. — Prestel : Rose des vents de la réaction ozonométrique (1 pl.). — Prestel : Sur les changements annuels de la quantité d'eau des fleuves et des rivières (8 p., 1 pl.). — Bohn : Recherches sur l'absorption de la lumière dans les milieux solides à réfraction simple. — Poggendorf : Sur une nouvelle classe de phénomènes d'induction (6 p.). — Prestel : Sur un instrument pour mesurer l'évaporation *(atmidomètre)*.

Chimie et Pharmacie. — Semenoff : Sur la représentation des alcools bi et tri-atomiques, et des combinaisons d'hydrogène carboné de faible atomicité. — Liebreich : Recherches sur la substance cérébrale. — Otto : Produits de la décomposition de l'acide hippurique. — Otto : Action du chlore gazeux sur le cyanéthyle. — L. Buff : Sur le poids spécifique du carbone dans les combinaisons fluides. — Remelé : L'oxysulfure d'urane et les produits de sa décomposition. — Remelé : Sur une nouvelle réaction du cobalt. — Carius : Sur les additions d'acide hypochlorique hydraté au bioxyde d'hydrogène. — Schmidt : Sur les météorites. — Erlenmeyer : Rapports des alcools polyatomiques, notamment de la glycérine, avec les mono-atomiques.

Minéralogie. — LUDWIG : Sur les travaux de la Société Géologique du Rhin central *(Mittelrheinischer geologischer Verein).* — LUDWIG : Sur les gîtes houilliers de Dorheim. — v. HAUER : Sur les derniers travaux de l'Institut Géologique de Vienne *(K. K. geologische Reichsanstalt).* — ROSE : Les météorites. — v. DUCKER : Sur les formations de montagnes de la Suisse. — REUSCH : Sur une hydrophane de Czerwenitza. — REUSCH : Sur les flammes chantantes. — v. KLIPSTEIN : Sur les couches de minerai de fer dans l'Eggegebirge, près d'Oldendorf, en Prusse. — v. KLIPSTEIN : Sur l'origine des minéraux phosphorés.

Botanique et Physiologie végétale. — HOFMEISTER : Sur la mécanique des mouvements du protoplasma. — DIPPEL : Sur la composition des faisceaux vasculaires des cryptogames (2 pl.). — SCHIMPER : Observations morphologiques. — WIGAND : Sur la désorganisation des parois des cellules.

Zoologie et Anatomie comparée. — BAUR : Sur la *Synapta digitata.* — LEUCKART : Sur la présence supposée d'yeux accessoires chez un poisson. — LEREBOULLET : Structure de la *Limnadia Hermanni.* — WEISMANN : Sur le développement des Tipulides. — MECZINIKOFF : Organes des sens chez les Annélides. — MÜLLER : Sur les nids des oiseaux.— PAGENSTECHER : Reproduction asexuelle des Cécidomyies. — KEFERSTEIN : Contraction du cœur chez les Pérophores. — DE LA VALETTE : Sur le développement des Isopodes. — BAUR : Sur les tubes coquilliers des Synaptes. — v. EICHWALD : Insectes fossiles et Bélemnites. — LEUCKART : Sur les abeilles hermaphrodites.

Anatomie et Physiologie. — STEIN : Structure des reins.— GERLACH : Préparations injectées reproduites par la photographie, avec leurs couleurs naturelles. — KEHRER : Sur les corps jaunes. — DURSY : Le corps de Wolff et son conduit excréteur. — SCHAAFHAUSEN : Sur la génération spontanée. — STILLING : Structure de la lingule dans le vermis du cervelet. — HENKE : Articulation du genou. — FICK : Sur un nouveau cymographe. — NASSE : Sur la tyrosine. — PREYER : Revivification des muscles atteints de rigidité cadavérique. — WELKER : Sur l'épitrichium. — DE LA VALETTE : Sur les cellules amœboïdes. — DURSY : Rapports génétiques des conduits urinaires avec la vessie. — CLAUDIUS : Position de l'utérus.—WINTHER : Sur l'excitation du ptérygien, et sur la structure de la membrane pupillaire. — FROMMANN : Structure des cellules ganglionnaires. — HÜTER : Structure intime des capsules et des surfaces articulaires. — HELMHOLTZ : Sur le ton et le son des muscles en contraction.

Médecine. — DAWOSKY : Méthode pour la guérison rapide du catarrhe chronique de la cavité du col utérin. — E. SEITZ : Sur un

nouveau bruit caverneux. — Dawosky : Sur la balanite et la balanopasthite. — Friedmann : Sur la cause de l'insalubrité de l'air atmosphérique. — Horn : Sur la scarlatine et son traitement.

Chirurgie. — Roser : L'opération de l'empyème. — I. Glück : Sur l'enlèvement fait avec succès des deux seins (de 21 livres et demie). — Königsfeld : Sur un appareil d'extension pour le traitement des fractures du col du fémur. — Königsfeld : Pince pour les aiguilles de Carlsbad. — Adelmann : Appareil pour les fractures de la jambe. — Burow : Nouvel optomètre. — Textor : Extirpation d'une tumeur osseuse de la voûte orbitaire. — Horn : Sur la trachéotomie.

Gynécologie et Obstétrique. — Dohrn : Sur la forme de la base du thorax chez les femmes enceintes ou nouvellement accouchées. — Dohrn : Sur une forme particulière de la tête de l'enfant produite par l'accouchement. — Ripps : Cas d'absence complète du vagin, et probablement aussi de l'utérus. — Winckel : Application des instruments d'extraction dans la position latérale de la tête. — Hennig : Sur la combinaison du crochet avec le céphalotribe. — Birnbaum : Cas de tumeur échinocoque à plusieurs loges comme obstacle à l'accouchement. — Gusserow : Sur le métrotome de Greenhalgh. — Spiegelberg : Sur l'état du col pendant la grossesse. — Stamm : Sur la disposition des maisons d'accouchement, au point de vue de la possibilité d'éviter les épidémies de fièvre puerpérale. — Birnbaum : Bassin avec exostoses multiples.

Psychiatrie et Médecine légale. — O. Müller : Sur l'application de la noix vomique aux maladies mentales.

Sitzungsberichte der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München. (Comptes-Rendus des séances de l'Académie des Sciences de Munich.)

Tome I (1864).

Steinheil : Sur un nouveau cercle méridien construit par l'Auteur (12 p., 1 pl.). — Bischoff : Sur la relation de l'étendue horizontale et de la capacité intérieure du crâne avec le poids du cerveau (40 p., 2 pl.). — Buchner : 1° Sur le turbith; 2° Sur la berbérine; 3° Sur l'huile essentielle des fruits de l'*Abies reginæ Amaliæ* (19 p.). — v. Kobell : Sur l'Ædelforsite et la Sphénoclase (7 p.). — Mohr : Sur les méthodes perfectionnées pour la séparation et la détermination du cuivre. — Steinheil : L'astrographe, appareil pour dessiner le ciel étoilé vu à travers une lunette (4 p.). — Schönbein : Communications sur la chimie : 1° Sur l'hydrogène sulfuré; 2° Nouveau réactif très sensible sur le bioxyde d'hydrogène et les azotites; 3° Sur l'urine humaine; 4° Formation d'une matière fluorescente

dans la putréfaction de l'urine humaine; 5° Présence du bioxyde d'hydrogène dans le corps humain (38 p.). — JOLLY : 1° Sur la dilatation de l'eau de 30° à 100° centigrades; 2° Balance à spirale pour les pesées délicates (26 p. p.) — KOLBE : Nouvelle classe de combinaisons organiques du soufre. — VOGEL jun. : Influence de la gelée sur les pommes de terre. — PETTENKOFER : Remarque sur les recherches de Reiset sur la respiration des animaux domestiques (8 p.). — GUMBEL : Sur les couches d'ossements et de végétaux en Franconie (64 p.). — VOGEL jun. : Sur le charbon de tourbe. — NÆGELI : Sur la structure intime des membranes des cellules végétales (44 p., 2 pl.).

Tome II (1864).

LAMONT : 1° Sur l'influence de la Lune sur l'aiguille aimantée (3 pl.); 2° Sur la période annuelle du baromètre; 3° Sur la période décennale des variations magnétiques et des taches solaires (23 p.). — NÆGELI : Sur la structure intime des membranes des cellules végétales (57 p.). — v. MARTIUS : Sur les noyaux argileux d'acide phosphorique (coprolithes?) de Leimersdorf (4 p.). — WAGNER : Sur les découvertes anthropologiques du diluvium stratifié près d'Abbeville (5 p.). — VOGEL : (a) Sur la transformation de la végétation par le desséchement; (b) Sur la transformation de l'amidon par le procédé de la germination (16 p.). — H. v. SCHLAGINTWEIT-SAKÜNLÜNSKY : Observations sur l'influence de l'humidité sur l'insolation dans l'Inde et dans la Haute-Asie (31 p.) — BUHL : Sur l'étiologie du typhus. — SCHÖNBEIN : Nouvelles recherches sur l'oxygène (41 p.). — v. SIEBOLD : Sur les recherches préliminaires entreprises par ordre de l'Académie pour établir la présence des *Pfahlbauten* (habitations lacustres) en Bavière (7 p.). — GÜMBEL : Sur la présence nouvellement reconnue du phosphate de chaux dans les couches jurassiques de la Franconie (22 p.). — BISCHOFF : Sur les rapports entre le poids absolu et le poids spécifique du cerveau, et entre le volume du cerveau et la capacité du crâne (25 p.). — v. BEZOLD : Sur la théorie de la vision binoculaire (9 p.).

Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester.

Tome I (1862), 3e série.

J. SMITH : Sur l'origine de la couleur et sur la théorie de la lumière (96 p.). — JOULE : Méthode pour éprouver la résistance des bouilleurs. — Expériences sur la chaleur totale de la vapeur. — Expériences sur le passage de l'air à travers des tuyaux et des ouvertures en minces parois. — COCKLE : Nouvelles recherches d'algèbre supérieure. — JEVONS : Remarques sur les placers de

de l'Australie (16 p.). — E. Hull : Sur les vestiges d'anciens glaciers dans les highlands de la Grande-Bretagne et de l'Irlande (16 p.). — Fryer : Nouvelle forme de phare flottant. — Sur un moyen d'estimer les distances des phares. — Ransome : Influence des changements atmosphériques sur les maladies (22 p.) — Baxendell : Sur les phénomènes des groupes de taches solaires. — Sur la rotation de Jupiter. — W. Roberts : Évaluation du sucre dans l'urine des diabétiques par la perte de densité après la fermentation. — Roscoe : Sur un moyen commode pour ingérer l'arsenic en Styrie. — A. Smith : Production et préservation de la malaria. — Th. Heelis : Observations météorologiques faites sur l'Océan atlantique, etc. — O'Neill : Changement de densité du cuivre forgé ou étiré. — Cayley : Sur les polyacrons à faces triangulaires, considérés relativement au problème de l'énumération des polyèdres. — Baxendell : Sur un système de perturbations périodiques de la pression atmosphérique en Europe et dans l'Asie septentrionale. — Vernon : Oscillations irrégulières du baromètre à Manchester. — Kirkman : Sur la théorie des groupes des fonctions à plusieurs valeurs (125 p.). — Baxendell : Remarques sur la théorie de la pluie. — Nasmyth : Sur la structure de l'enveloppe lumineuse du soleil.

Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de Colmar.

5e année (1864).

Hirn : Exposé et analyse de la théorie du soleil de M. Faye (14 p.). — Kampmann père : Notice sur l'île Sainte-Marguerite et ses environs (18 p.). — Leprieur : Matériaux pour servir de complément à la faune vogéso-rhénane. Note sur quelques coléoptères des environs de Colmar (53 p.). — Ad. Lesslin : Liste des minéraux et des roches de la vallée de Lièpvre (canton de Sainte-Marie-aux-Mines) (16 p.). — Giorgino et Kampmann fils : Matériaux pour une flore cryptogamique de l'Alsace. Algues (34 p.). — Bleicher : Essai d'une monographie géologique du Mont-Sacré. Quelques mots sur l'ancienneté de l'homme dans la vallée de l'Anio (14 p.). — Benoit : Roche striée de Giromagny. — Miannée de Saint-Firmin : De l'existence du grand épervier comme espèce distincte de l'épervier ordinaire.

Mémoires de la Société des Sciences naturelles et médicales de Seine-et-Oise.

Tome VII (1864).

Thibierge : Recherches sur la lizarimétrie (9 p.). — De Rouvre : Note sur l'amiante (6 p.). — Madden : Expédition des Anglais au

Pic de Ténériffe (7 p.). — MADDEN : Origine des espèces (16 p.). — THIBIERGE : Rapport sur la fabrique d'aluminium de Nanterre (8 p.).

Tome VIII (1864).

CAZIN : Leçons sur la théorie mécanique de la chaleur (62 p.). — LANDRIN : Correspondance de Linné avec Claude Richard. Pièces justificatives, etc. (48 p.). — CAZIN : Extrait d'un Mémoire sur l'évaluation en unités de poids des actions électrodynamiques (18 p.). — THIBIERGE : Sur la production de la soude avec les sulfures métalliques (12 p.).

Mémoires de la Société académique de Maine-et-Loire.

Tome XIX (1866).

PLANCHENAULT : Notice historique et pratique sur la culture de la vigne, spécialement en Anjou (58 p.). — RIDARD : Études sur l'homme (20 p.).

Tome XX (1866).

LAREVELLIÈRE : Essai sur la canalisation de l'Èbre et sur la florule du delta de ce fleuve (16 p.). — GENEVIER : Extrait de la florule des environs de Mortagne-sur-Sèvre (Vendée) (35 p.). — BOREAU : Herborisations faites en Maine-et-Loire en 1865 (14 p.). — DÉSÉGLISE : Révision de la section *Tomentosa* du genre *Rosa* (44 p.). — BOREAU : Monographie de quelques *Sedum* du groupe *Telephium* (20 p.). — DECHARME : Halo solaire observé à Angers le 30 août 1866 (5 p.). — MÉNIÈRE : Note sur l'aétite ou pierre d'aigle (16 p.).

Mémoires de la Société impériale des Sciences naturelles de Cherbourg.

Tome XII (1866).

ROSANOFF : Recherches anatomiques sur les Mélobésiées (108 p., 7 pl.). — JOUAN : Description de quelques poissons de l'île de Poulo-Condor (16 p.). — GUICHENOT : Catalogue des poissons de Madagascar de la collection du Muséum de Paris (20 p.). — MULSANT et J. et ED. VERREAUX : Essai d'une classification méthodique des Trochilidés ou Oiseaux-mouche, contenant le catalogue de toutes les espèces de ces oiseaux (94 p.). — GUICHENET : Sur une nouvelle espèce de poisson appartenant au genre des Rhombes (5 p.). — GUICHENET : Sur un nouveau genre de Sauriens de la famille des Geckotiens (5 p., 1 pl.). — GUICHENET : Sur un nouveau genre de poissons de la famille des Cottoïdes (4 p., 1 pl.). — BORNET et THURET : Sur la fécondation des Floridées (6 p.). — JOUAN : Description de quelques

poissons et de quelques oiseaux du nord de la Chine (14 p.). — LIAIS : Sur l'intensité relative de la lumière dans les divers points du disque du soleil (65 p.). — JOUAN : Coup d'œil sur la flore de la Basse-Cochinchine (17 p.).

Actes de l'Académie Impériale des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Bordeaux.

Année 1866.

RAULIN : Résultats des excursions faites dans la partie occidentale du département des Landes pour la carte géologique, en 1864 et 1865 (20 p.). — VALAT : Plan d'une géométrie nouvelle, ou réforme de l'enseignement de la géométrie élémentaire (36 p.). — MANÈS : Des eaux publiqués en général, et de celles de Bordeaux en particulier (102 p.). — VALAT : De la double série de polyèdres demi-réguliers qui servent de complément aux recherches d'Archimède et de Képler sur le même sujet (24 p.). — HAILLECOURT : Sur la déviation dans la chute des graves (18 p.). — VALAT : Des hypothèses dans la science (28 p.).

Bulletin de l'Académie delphinale de Grenoble.

2e série, tome I (1861).

MACÉ : Le *silphium* des anciens (12 p.). — FAUCHÉ-PRUNELLE : Météorologie des Alpes dauphinoises (31 p.).

Tome II (1863).

MACÉ : Notes inédites de Villars sur quelques botanistes dauphinois.

3e série, tome II (1867).

DE GALBERT : Fragment d'un manuscrit intitulé : *L'isthme de Suez et le Delta d'Égypte*. — Extrait de lettres sur l'Égypte et l'isthme de Suez (103 p.).

Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles du département d'Ille-et-Vilaine.

Tome I, 2e livr. (1865).

DE LA GOBELINAIS et ANDRÉ : Catalogue des Coléoptères du département d'Ille-et-Villaine (19 p.). — LALLEMAND : Propriétés physiques du sesquioxyde de fer attirable à l'aimant, et du colcothar artificiel peu magnétique. — Des cyanures de cuivre. — OBERTHUR : Catalogue des Lépidoptères du département d'Ille-et-Vilaine (9 p.).

Boston Journal of Natural History.

Tome VII, n° III (1862).

Bailey : Note sur une nouvelle espèce d'organismes microscopiques (23 p., 8 pl.). — Wilder : Sur la myologie comparée du Chimpanzé (32 p.).— Agassin : Sur la génération alternante des Annélides, et sur l'embryologie de l'*Autolytus cornutus* (25 p., 3 pl.).— Scudder : Matériaux pour une monographie des Orthoptères de l'Amérique du Nord, renfermant un Catalogue des espèces de la Nouvelle-Angleterre (72 p.).

N° IV (1863).

White : Observations sur la structure du sommet des Pentrémites, sur la structure et l'arrangement de certaines parties des Crinoïdes, et description de nouvelles espèces provenant des roches carbonifères de Burlington (Iowa) (25 p.). — Newberry : Description des plantes fossiles recueillies par M. G. Gibbs, géologue de la Commission des frontières nord-ouest des États-Unis (19 p.). — Aganiz : Sur l'*Arachnactis brachiolata,* espèce d'Actinie flottante trouvée à Nahant (Massachusetts). — James-Clark : Prodrome de l'histoire, de la structure et de la physiologie de l'ordre des Lucernariées (36 p.). — Ordway : Monographie du genre *Callinectes* (16 p.). — Stimpson : Sur le Crabe fossile de Gay Head (7 p., 1 pl.). — Packard jun. : Sur les types synthétiques chez les Insectes (13 p.). — Wyman : Description d'un « Poisson blanc » ou « Baleine blanche » (*Beluga borealis,* Lesson) (9 p., 1 pl.). — Scudder : Remarques sur quelques particularités de la faune des insectes des Montagnes Blanches (New. Hampshire) (20 p., 2 pl.).

Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia.

Année 1865.

Sur quelques nouveaux oiseaux Rapaces peu connus. — Cooper : Sur un nouveau Cormoran des îles Farallow (Californie). — Lewis : Variétés singulières de Diatomées dans les Montagnes Blanches. — Tryon : Synonymie des espèces de Strepomatidées, mollusques fluviatiles de l'Amérique du Nord. — Lawrence : Nouveaux oiseaux des familles des Paridées, des Vireonidées, etc. — Meek et Worthen : Nouveaux types de restes organiques de l'Illinois. — Carpentes : Nouveaux Mollusques. — Gill : Tableau du genre *Pomoxys.* Du genre *Caulolatilus.* Caractères du crâne du *Gadus proximus.* Quelques genres de Cyprinoïdes. — Conrad : Formation éocène de lignite.

Mollusques éocénes. Nouvelles espèces d'Échinides. — COPE : Vertébrés à sang froid du Michigan. — LEA : Nouvelles espèces d'*Unio*. — CASSIN : Oiseaux du genre *Chrysomitris*. — WINCHELL : Nouveaux fossiles du Michigan. — COPE : Sur l'*Amphibamus grandiceps*, nouveau batracien. — MEEK et WORTHEN : Genre *Taxocrinus*. Nouvelles espèces de Crinoïdes. Genre *Gilbert-Socrinus*. — COPE : Baleine prise dans le Delawarre. — ALLEN : Nouveau genre de Vespertiliens. — GILL : Deux espèces de Dauphins de Californie. — COPE : Espèce de baleine bossue. Herpétologie de l'Amérique tropicale. Sur les Delphinides. — LE CONTE : Galéruques et genres voisins de l'Amérique du Nord. Monographie des Anobiinii, etc. — MEEK et WORTHEN : Paléontologie de l'Illinois et des États de l'Ouest. Structure microscopique de la coquille du *Spirifer curpidatus*, etc.

Annals of the Lyceum of Natural History of New-York.

Tome VIII (1863).

LAWRENCE : Catalogue d'une collection d'oiseaux faite à la Nouvelle-Grenade. — BLAND : Sur la famille des Proserpinacées, etc. — ADAMS et ALBERS : Sur les classifications des *Helix* de l'Amérique du Nord faites par les auteurs européens. — JOY : Examen de quelques minéraux d'Amérique. — LAWRENCE : Nouvelles espèces d'oiseaux des familles des Tanagridées, etc. — GILL : Sur les Myliobatoïdes. Poissons remarquables voisins du *Nemophis*. — BLAND : Sur certains sacs à larves d'insectes, décrits comme des espèces de *Valvata*. Sur certains mollusques terrestres. — LAWRENCE : Oiseaux de l'Amérique centrale, etc. — BAILEY : Minéralogie de l'île de New-York. — GROTE : Sphingidées de Cuba. — MORSE : Nouvelles espèces de Pupadées. — PRIME : Espèces de la famille des Corbiculadées. — AGANIZ : Embryologie du *Tornaria*. — Minerais américains de thallium et d'indium. — JULIEN : Géologie de la Clef de Sombrero. — LAWRENCE : Catalogues d'oiseaux de New-York, Long-Island, etc. — HITCHCOCK : Nouveau reptile volant du trias du Massachusetts.

Bordeaux. G. Gounouilhou, imprimeur de la Société, rue Guiraude, 11.

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ

DES SCIENCES

PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

TOME IV

2me Cahier

A PARIS

CHEZ J.-B. BAILLIÈRE

LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DE MÉDECINE

rue Hautefeuille, 19.

A Londres, chez H. Baillière, 219, Regent Street. — A New-York, chez H. Baillière, 290, Broadway

A Madrid, chez Bailly-Baillière, calle del Principe, 11

A BORDEAUX

CHEZ CHAUMAS-GAYET, LIBRAIRE

Fossés du Chapeau-Rouge, 34

1866

RECUEIL DE FORMULES

ET DE

TABLES NUMÉRIQUES,

PAR J. HOÜEL,
Ancien Élève de l'École Normale, Professeur de Mathématiques pures
à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Extrait des Mémoires de la Société des Sciences physiques
et naturelles de Bordeaux.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1866

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

TABLE DES MATIÈRES.

AVERTISSEMENT.

En rédigeant ce Recueil de formules et de Tables, je me suis proposé un double but. J'ai voulu, d'une part, rassembler des Tables abrégées à l'usage des personnes qui s'occupent d'applications numériques n'exigeant pas beaucoup d'approximation, ce qui est le cas d'une grande partie des calculs d'Astronomie ou de Physique; mais, d'autre part, mon dessein principal a été de venir en aide à ceux qui étudient les parties élevées des Mathématiques, et auxquels la mise en nombre des formules peut faciliter l'intelligence des théories, en jouant un rôle analogue à celui des expériences dans l'enseignement des sciences physiques.

Pour remplir ce double objet, et pour pouvoir en même temps offrir une série de Tables aussi complète que possible sous un mince volume, j'ai construit les diverses Tables avec un petit nombre de décimales, avec quatre généralement, ce qui suffit dans la plupart des calculs vraiment pratiques. J'ai cependant inséré dans ce volume quelques Tables avec un grand nombre de figures, servant de complément aux grandes Tables logarithmiques ordinaires, et destinées aux calculs qui exigent une approximation exceptionnelle.

Dans la plupart des cas, l'interpolation de ces Tables peut se faire à simple vue. Aussi ai-je cru inutile d'y ajouter les parties proportionnelles des différences, qui, pour être d'une utilité réelle, auraient dû souvent occuper autant de place que les Tables elles-mêmes. D'ailleurs on suppléera toujours, avec un grand avantage, aux Tables auxiliaires de parties proportionnelles, en employant l'admirable instrument connu sous le nom de *règle à calcul,* et dont un préjugé inexplicable, contre lequel je ne saurais trop énergiquement protester, a jusqu'ici retardé l'adoption universelle par les calculateurs.

Cet Ouvrage se compose de deux Sections principales : d'un Recueil de formules relatives aux applications pratiques des fonctions elliptiques, et d'une série de Tables mathématiques qui permettent de mettre ces formules en nombres.

Comme préliminaires aux formules de la théorie des fonctions elliptiques, j'ai donné les principales formules rélatives à des fonctions, analogues aux fonctions circulaires ou trigonométriques, auxquelles Lambert a donné le nom de *fonctions hyperboliques,* parce qu'elles expriment les coordonnées de l'hyperbole équilatère, de même que les fonctions trigonométriques expriment les coordonnées du cercle.

L'espace ne m'a pas permis d'indiquer les nombreux usages de ces

fonctions hyperboliques dans le calcul intégral. On trouvera d'amples développements sur ce sujet dans les ouvrages de Gudermann (*) et de M. Gronau (**), ainsi que dans divers Mémoires répandus dans les *Archives de Mathématiques* de M. Grunert. J'ai seulement transcrit les formules fondamentales, en les accompagnant d'applications numériques à diverses questions de Géométrie et de Mécanique, principalement à celles qui conduisent aux transcendantes elliptiques, et où les fonctions hyperboliques jouent un rôle aussi capital que les fonctions circulaires. On verra, d'après les cas que j'ai traités, de quelle utilité pratique seraient des Tables plus étendues de ces importantes fonctions.

Pour les formules concernant les fonctions elliptiques, j'ai pris pour point de départ la théorie des fonctions ϑ, sur laquelle sont fondées les méthodes les plus simples et les plus directes pour le calcul numérique et pour l'étude théorique des transcendantes elliptiques. J'ai consulté principalement les ouvrages de Legendre, de Jacobi, de Gudermann (***), de Schellbach (****), qui sont ceux où le point de vue pratique a reçu le plus de développement.

J'ai conservé autant que possible les notations classiques de l'auteur des *Fundamenta nova*, en les abrégeant un peu, à l'exemple de Gudermann, et me conformant seulement, pour les fonctions ϑ, à l'usage, adopté généralement aujourd'hui, de prendre pour argument de ces fonctions, non plus l'intégrale elliptique u, mais le produit $x = \frac{\pi u}{2K}$. Je n'ai pas cru cependant devoir aller dans cette voie aussi loin que l'a fait M. Schellbach dans l'ouvrage cité, et j'ai continué à prendre l'intégrale u pour argument des *fonctions elliptiques*, qui sont les rapports deux à deux des fonctions ϑ.

J'ai désigné provisoirement les intégrales elliptiques de troisième espèce au moyen des notations proposées par Gudermann, en y ajoutant, par analogie, un symbole pour représenter, au même point de vue, en fonction de u et de a, la transcendante $\Pi(\varphi, n)$ de Legendre. Ces notations provisoires ne m'ont servi qu'à formuler brièvement les propriétés essentielles des intégrales de troisième espèce. Elles n'offrent guère d'utilité dans la pratique, où l'on remplace toujours ces intégrales par leurs expressions au moyen des fonctions ϑ.

Ce Recueil de formules est terminé par quelques applications pratiques des fonctions elliptiques, qui montrent bien quelle grande simplification on introduit dans les calculs par l'emploi des fonctions hyperboliques proposé par Gudermann. J'ai résumé, en faisant usage de cette notation, les belles formules du *Mémoire* de Jacobi *sur la rotation des corps*, et l'on voit sans peine combien ces formules

---

(*) *Theorie der Potenzial- oder Cyklisch-hyperbolischen Functionen.* 1 vol. in-4, extrait du *Journal de Crelle*, tomes VI, VII, VIII et IX.

(**) *Tafeln für sämmtliche trigonometrische Functionen der cyklischen und hyperbolischen Sektoren.* Danzig, 1863.

Theorie und Anwendungen der hyperbolischen Functionen. Danzig, 1865.

Voyez aussi l'Introduction des *Tavole dei logaritmi delle funzioni circolari ed iperboliche, dal dott. Ang. Forti.* Pisa, 1863.

(***) *Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale.* 1 vol. in-4, extrait des tomes XVIII-XXV du *Journal de Crelle.*

(****) *Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen.* Berlin, 1864.

gagnent par là en élégance et en simplicité, et combien leur mise en nombre devient facile par l'usage des Tables de fonctions hyperboliques. C'est ce que prouvent les calculs que j'ai effectués pour quelques-unes de ces formules.

La seule opération un peu pénible dans ces sortes de calculs, c'est la détermination d'une intégrale elliptique de première ou de seconde espèce, correspondante à une amplitude et à un module donnés. Pour faciliter ce travail, il serait bien à désirer que l'on possédât des Tables plus étendues, s'il est possible, que celles de Legendre, et d'une disposition plus commode. En attendant que de pareilles Tables aient été construites, on y supplée par des méthodes de calcul assez expéditives, tirées, soit de la transformation de Landen, soit de la théorie des fonctions ϑ. C'est ce dernier moyen que j'ai employé pour construire la petite Table (page 58) qui donne les logarithmes de $F(\varphi, \theta)$ pour les valeurs des deux arguments voisines de $\frac{\pi}{2}$, de centième en centième du quadrant.

Les Tables qui forment la seconde Section de l'Ouvrage peuvent se diviser en trois parties principales, comprenant : la première, les logarithmes vulgaires et naturels; la seconde, les fonctions circulaires et hyperboliques; la troisième, les Tables de diverses transcendantes et les Tables de puissances.

Parmi les Tables dont se compose la première partie, les Tables I et II, qui donnent avec quatre décimales les logarithmes des 2000 premiers nombres et les antilogarithmes, n'offrent rien de particulier dans leur disposition.

La Table III des logarithmes d'addition et de soustraction présente une disposition un peu différente de celle que j'avais adoptée pour les Tables analogues contenues dans mon précédent Recueil. L'expérience m'a démontré l'avantage de cette modification, grâce à laquelle le maniement de ces Tables acquiert une plus grande régularité, sans que la précision en souffre, comme cela a lieu lorsqu'on adopte les dispositions que j'ai critiquées dans l'Avertissement de mes Tables à cinq décimales.

Par la combinaison des deux Tables d'addition et de soustraction, on forme une troisième Table donnant, pour chaque valeur de $\log x$, le logarithme du rapport $\frac{1+x}{1-x}$. L'idée de la construction de cette Table est due à Gauss, qui en fit calculer une semblable, vers 1829, par son élève Weidenbach. Cette Table a été insérée dans l'édition donnée par Jahn des Tables de Maurice de Prasse (*). Gauss en recommande l'usage dans divers calculs trigonométriques, notamment pour la résolution des équations

$$p\sin(\mathrm{A}+\mathrm{P}) = a, \quad p\sin(\mathrm{B}+\mathrm{P}) = b,$$

qui donnent (*Theoria motus corp. cœl.*, art. 78)

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}+\mathrm{P}\right) = \frac{a+b}{a-b}\operatorname{tang}\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}.$$

(*) *Moritz v. Prasse's logarithmische Tafeln für die Zahlen, Sinus und Tangenten, revidirt u. s. w. von K. Br. Mollweide und G. A. Jahn.* Leipzig, o. J., in-16.

J'ai donné à cette Table la même disposition et la même étendue qu'à la Table des logarithmes d'addition et de soustraction.

Les Tables V et VII, qui servent à calculer les logarithmes vulgaires et les logarithmes naturels avec un grand nombre de figures, sont, comme la Table analogue du précédent Recueil, extraites du *Supplément logarithmique* de Leonelli. J'ai eu soin de vérifier tous les logarithmes qu'elles renferment.

Les Tables VI et VIII ne donnent lieu à aucune remarque spéciale.

Dans la seconde partie, j'ai rassemblé des Tables des valeurs, tant naturelles que logarithmiques, des fonctions circulaires, construites suivant les diverses divisions angulaires qui ont été proposées jusqu'ici. Les deux premières correspondent à la division sexagésimale pure, soit du jour, soit du quadrant. La suivante, Table XI, se rapporte au système mixte imaginé par Briggs, et peut servir également dans la cas où l'on divise le degré en minutes et dans celui où on le divise en parties décimales. J'ai pu profiter de l'avantage que m'offrait cette division pour donner à la Table une disposition à *double entrée*, favorable à la rapidité des calculs.

Les quatre Tables qui viennent ensuite se rapportent à la division décimale du quadrant. J'ai fait ressortir ailleurs les immenses avantages que présente cette division naturelle sur les divisions artificielles jusqu'ici en usage (*), et les exemples numériques que j'ai développés justifieront la cause que je défends, comme on peut le voir en reprenant les mêmes calculs à l'aide des Tables sexagésimales.

La première de ces Tables, la Table XII, donne les valeurs naturelles des fonctions circulaires avec trois décimales. La suivante, la Table XIII, contient les valeurs logarithmiques à quatre décimales, et est disposée à double entrée, comme la Table XI. La Table XV donne les valeurs naturelles avec dix décimales.

La Table XIV, dont il nous reste à parler, forme la partie la plus importante de notre volume. Elle contient les valeurs, tant naturelles que logarithmiques, des fonctions circulaires, de millième en millième du quadrant, et, par l'addition de deux colonnes auxiliaires, sert en même temps de Table pour les fonctions hyperboliques. Je me suis inspiré, pour la construction de cette Table, de l'ouvrage de M. Gronau, que j'ai cité plus haut; mais j'ai modifié sa disposition de manière à rassembler sur une même ligne toutes les fonctions d'un même argument, circulaire ou hyperbolique. De plus, j'ai donné deux évaluations du double secteur hyperbolique, savoir : sa valeur propre et son produit par le module des logarithmes vulgaires; en d'autres termes, l'argument hyperbolique

$$u = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

est exprimé, sur chaque page de droite, par un logarithme naturel, et sur chaque page de gauche, par un logarithme décimal. La pratique montre que ces deux modes d'évaluation ont chacun leurs avantages, suivant les cas que l'on traite.

(*) *Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire*, Note IV (*Archiv der Mathem. u. Physik*, tome XL, page 200.) — *Note sur les avantages qu'offrirait, pour l'Astronomie théorique et pour les sciences qui s'y rapportent, la construction de nouvelles Tables trigonométriques suivant la division décimale du quadrant* (*Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft*, 2e cahier, p. 86).

Cette Table peut servir en même temps à faire connaître les puissances positives et négatives de e,

$$e^u = \mathrm{Ch}\,u + \mathrm{Sh}\,u, \quad e^{-u} = \mathrm{Ch}\,u - \mathrm{Sh}\,u.$$

Toutes les valeurs relatives aux fonctions circulaires ont été extraites de la *Trigonometria Britannica* de Briggs.

La troisième partie se compose de Tables des fonctions elliptiques et d'autres transcendantes importantes, d'une Table des carrés et de diverses Tables de puissances.

Les petites Tables de fonctions elliptiques ont été en partie extraites des Tables de Legendre, en partie calculées directement. Les unes peuvent s'interpoler et servir ainsi au calcul effectif des valeurs quelconques de ces fonctions; les autres ont plutôt pour but de montrer la marche générale des transcendantes qu'elles renferment, ce qui suffit souvent pour la discussion des questions.

Les autres transcendantes, dont on trouvera ici des Tables abrégées, sont les fonctions Γ, le logarithme intégral et la fonction $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$, qui est d'un grand usage dans le calcul des probabilités.

Vient ensuite une Table à quatre décimales des carrés des nombres depuis 0,000 jusqu'à 1,200. Cette Table est destinée aux calculs de la méthode des moindres carrés.

Enfin, la dernière page renferme diverses Tables de puissances d'un fréquent usage dans les calculs.

Dans ce travail, pour lequel je n'avais souvent aucun modèle qui pût me guider, j'ai dû laisser sans doute beaucoup de points incomplets. Sans doute aussi je n'ai pu, malgré tous mes soins, faire disparaître toutes les incorrections, soit dans les formules, soit dans les calculs numériques. J'espère cependant que le public saura gré à la *Société des Sciences physiques et naturelles* de Bordeaux de m'avoir mis à même de publier cet essai, qui pourra un jour donner l'idée de composer un ouvrage plus étendu et plus parfait.

Pour assurer du moins à cet opuscule le mérite de la correction typographique, je prie instamment toutes les personnes qui y découvriront quelque faute, si légère qu'elle soit, de vouloir bien m'en donner avis, soit directement, soit par l'intermédiaire de M. Gauthier-Villars. Les fautes seront indiquées dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, et les personnes qui les auront signalées recevront en retour un exemplaire corrigé.

INTRODUCTION.

DISPOSITION ET USAGE DES TABLES.

I.

(Pages 2-5.)

Logarithmes vulgaires à 4 décimales des 2000 premiers nombres.

1. Nous avons prolongé cette Table jusqu'à 2000, pour faciliter les calculs d'interpolation des logarithmes des nombres voisins de l'unité, ces logarithmes étant ceux que l'on rencontre le plus fréquemment dans les applications, et qui correspondent, dans le premier millier, aux différences tabulaires les plus considérables.

A l'aide des logarithmes des rapports $\frac{\sin}{\text{arc}}$, $\frac{\text{tang}}{\text{arc}}$, que donnent les Tables auxiliaires placées au bas des pages 3 et 5, la Table I peut servir de Table trigonométrique pour les petits arcs inférieurs à $0^q,05$. Ainsi, pour avoir log sin ($0^q,03658$), on ajoutera au logarithme $\bar{2},5633$ de l'arc exprimé en quadrants, le logarithme de la colonne marquée sin : arc correspondant à $0^q,036$..., c'est-à-dire 0,1959, ce qui donne $\bar{2},7592$ pour le logarithme cherché. *Voyez* l'*Introduction aux T. à 5 D.* (*), pages XVI et XIX.

II.

(Pages 6-7.)

Table antilogarithmique à 4 décimales.

2. Cette Table ne diffère en rien de celle qui fait partie des *T. à* 5 *D.*, et dont l'usage a été expliqué (*Introduction,* page XXXI).

III.

(Pages 8-11.)

Logarithmes d'addition et de soustraction à 5 décimales.

3. L'usage de ces Tables a été longuement développé dans l'*Introduction* aux *T. à* 5 *D.*, pages XXI et suiv., et nous n'y reviendrons que pour indiquer les modifications que les Tables actuelles présentent dans leur disposition.

Les Tables de notre précédent recueil, de même que celles de Gauss, offraient l'inconvénient d'avoir des différences tabulaires négatives; et, de plus, la partie la plus importante de ces Tables, celle qui sert à calculer de petites corrections,

(*) Nous désignerons ainsi, pour abréger, la 2e édition de nos *Tables de logarithmes à cinq décimales,* auxquelles le présent Recueil sert de complément.

et qui correspond à des valeurs très-inégales des deux termes du binôme $a \pm b$, se trouvait rejetée vers la fin. La disposition que nous avons adoptée rend les différences tabulaires positives, comme dans les Tables de logarithmes ordinaires, et nous permet de placer en tête des deux Tables la partie importante dont nous parlons.

Il nous a suffi, pour cela, de prendre pour argument, non plus le logarithme du rapport $\frac{a}{b}$ du plus grand terme du binôme au plus petit, mais le logarithme du rapport inverse $\frac{b}{a}$, logarithme dont la caractéristique est nécessairement négative.

De cette manière, x désignant une fraction moindre que l'unité, nos nouvelles Tables donnent, pour x variant de o à 1, et, par suite, pour $\log x$ variant de $-\infty$ à o, les valeurs correspondantes des fonctions

$$\log(1+x), \quad \log\frac{1}{1-x} \; (*).$$

Nous avons disposé parallèlement les logarithmes d'addition et les logarithmes de soustraction sur deux pages en regard, ce qui offre une plus grande commodité dans certains calculs, en rendant, en outre, impossible la confusion qui eût pu résulter de la similitude d'aspect des deux Tables.

En prolongeant la Table de soustraction au delà de la valeur $\log \frac{1}{2}$ de l'argument, nous avons évité l'emploi de l'*entrée inverse*, qui était nécessaire dans la Table de notre précédent Recueil toutes les fois que le rapport $\frac{b}{a}$ surpassait une demi-unité.

Exemple. — Étant donnés

$$\log a = \bar{3},17192, \quad \log b = \bar{4},91712,$$

on en tire

$$\log\frac{b}{a} = \bar{1},74520 = \log x,$$

d'où (pages 10 et 11)

$$\log(a+b) = \log a + \log(1+x) = \bar{3},17192 + 0,19205 = \bar{3},36397,$$

$$\log(a-b) = \log a - \log\frac{1}{1-x} = \bar{3},17192 - 0,35277 = \bar{4},81915.$$

IV.

(Pages 12-13).

Table donnant, pour chaque valeur de $\log x$, la valeur de $\log\frac{1+x}{1-x}$.

4. Cette Table est formée par l'addition des nombres des deux Tables précédentes qui correspondent à une même valeur de $\log x$.

Si l'on pose

$$\frac{1+x}{1-x} = y,$$

(*) Il est aisé de voir que, si l'on désigne par y l'un des nombres $1+x$ ou $\frac{1}{1-x}$, l'*entrée inverse* des deux Tables donnera, pour chaque valeur de $\log y$, les valeurs correspondantes de $\log(y-1)$ et de $\log\left(1-\frac{1}{y}\right) = \log\frac{y-1}{y}$.

y étant > 1, la Table donnera, par l'entrée inverse, pour chaque valeur de $\log y$, la valeur correspondante de $\log \frac{y-1}{y+1}$.

Si l'on fait $x = \cos\theta$, la Table donnera, pour chaque valeur de $\log\cos\theta$, la valeur correspondante de $\log\cot^2\frac{\theta}{2}$.

5. Cette Table sert à abréger un grand nombre de calculs, par exemple le calcul des angles d'un triangle dont on connaît un angle avec les logarithmes des deux côtés qui le comprennent. Ainsi, dans le cas traité à la page xxv de l'*Introd.* aux *T. à 5 D.*, où l'on avait

$$\log\frac{c}{b} = \bar{1},69571 = \log x,$$

la Table donnera immédiatement (page 13), par une seule lecture,

$$\log\frac{b+c}{b-c} = \frac{1+x}{1-x} = 0,47187 + 131 \times 0,71 = 0,47280.$$

Par l'entrée inverse, en prenant

$$\log\frac{b}{c} = 0,30429 = \log y,$$

on aurait eu

$$\log\frac{b-c}{b+c} = \log\frac{y-1}{y+1} = \bar{1},527 + \frac{15}{76} = \bar{1},52720.$$

V.

(Pages 14-15.)

Table abrégée pour le calcul des logarithmes vulgaires à 15 décimales.

6. Cette Table, comme la Table analogue que nous avons insérée dans les *T. à 5 D.* (page 109), est extraite du *Supplément logarithmique* de Leonelli, et son usage repose également sur les principes que nous avons développés dans l'*Introd.* aux *T à 5 D.*, pages XXIX et suiv., et dans celle de l'édition française de la *Table d'interpolation* de Schrön, page 2. La seule différence consiste en ce que, au lieu d'opérer chiffre par chiffre, on opère par groupes de deux chiffres, en s'aidant d'une Table de multiplication (*), telle que la *Table d'interpolation* de Schrön, qui donne au moins les produits de tous les nombres de deux chiffres les uns par les autres.

Si l'on veut calculer, par exemple, avec 15 décimales le logarithme de

$$e = 2,7182\ 8182\ 8459\ 0452\ldots,$$

on divise d'abord e par 28, en s'aidant de la Table de multiplication, ce qui donne

---

(*) Pour faire commodément usage de la Table de multiplication dans ces calculs, on opérera comme il suit. Soit à multiplier 9999 9753 9556 8737 par 1,0000024. Je sépare autant de chiffres sur la droite du multiplicande qu'il y a de décimales au multiplicateur (soit ici 7), et je multiplie 999995739,55... par 24, en négligeant les décimales, après avoir ajouté, pour plus d'exactitude, au produit de la partie entière les retenues provenant du produit par 24 des décimales supprimées, $0,55\ldots \times 24 = 13$. On opère comme dans la multiplication ordinaire, si ce n'est qu'on écrit deux chiffres à chaque multiplication partielle. Ainsi, en prenant les produits dans la colonne qui porte en tête 240 (*Table d'interpolation*, pages 42 et 43), on dira : $39 \times 24 + 13 = 936 + 13 = 949$, dont on retient les 9 centaines; $75 \times 24 + 9 = 1809$, dont on retient les 18 centaines, et ainsi de suite.

pour quotient 0,9708 1493 8735 3733.... On dispose ensuite le calcul comme il suit :

PRODUITS.	MULTIPLICATEURS.	LOG. DES MULTIPL.
2,7182 8182 8459 0452	$\frac{1}{28}$	5528 4196 8657 781
9708 1493 8735 3733	1,029	124 1537 4762 433
281 5363 3223 3258		4 3407 7479 319
9989 6857 1958 6991	1,001	1302 8639 028
9 9896 8571 9587		104 2305 506
9999 6754 0530 6578	1,00003	2 6057 668
2999 9026 2159		191 090
		3 909
		15
9999 9753 9556 8737	1,0000024	5657 0551 8096 949
239 9994 0949		
9999 9993 9550 9686	$1,0^7 60$	
5 9999 9964		
9999 9999 9550 9650	$1,0^8 4490350$	

Complément = log. cherché 0,43429448 1903 251,

valeur exacte à moins d'une unité près du 15e ordre décimal.

Soit proposé maintenant de trouver le nombre correspondant au logarithme

$$\bar{1},9176\ 4829\ 7002\ 426.$$

Voici le tableau du calcul :

9176 4829 7002 426			1,0000 0003 4958 739
9138 1385 2383 717	82	(1)	(4) 130 0000 045
38 3444 4618 709			1,0000 0133 4958 784
34 6053 2109 506	1,008	(2)	(3) 8 6000 1148 065
3 7391 2509 203			1,0008 6133 6106 849
3 7333 2744 357	1,00086	(3)	(2) 80 0689 0688 855
57 9764 846			1,0088 6822 6795 704
56 4582 459	1,0000 013	(4)	(1) 8272 7194 5972 475
1 5182 387			Le nombre cherché est donc
1,4766 012	1,0000 0003 4	(5)	0,8272 7194 5972 475.
416 375			
412 580	$1,0^9 95$	(6)	
3 795			
3 778	$1,0^{11} 87$	(7)	
17			
17	$1,0^{13} 39$	(8)	

VI.

(Pages 16 et 17.)

Logarithmes naturels ou hyperboliques à 4 décimales.

7. Pour trouver le logarithme naturel d'un nombre, on commence par transporter la virgule à la gauche du premier chiffre significatif; on calcule par interpolation le logarithme du nombre ainsi obtenu; puis on lui ajoute le logarithme de la puissance de 10 par laquelle il faudrait maintenant multiplier le nombre pour le ramener à sa valeur primitive.

Pour trouver le nombre correspondant à un logarithme donné, on ôte du logarithme donné le logarithme d'une puissance (positive ou négative) de 10, telle que le reste soit compris entre $\log 1 = 0{,}0000$ et $\log 10 = 2{,}3026$. On calcule, au moyen de la Table, le nombre dont ce reste est le logarithme, puis on multiplie ce nombre par la puissance de 10 dont on avait soustrait le logarithme.

Ainsi, pour avoir le logarithme de 0,047159, on cherche celui de 4,7159, qui est 1,5509, et l'on ajoute à ce logarithme celui de 10^{-2}, ou $\bar{5}{,}3948$, ce qui donne $\bar{4}{,}9457 = -3{,}0543$.

Pour avoir la valeur de $\frac{1}{e}$, dont le logarithme naturel est -1 ou $\bar{1}{,}0000$, j'ajoute à ce logarithme $\log 10 = 2{,}3026$, ce qui donne 1,3026, correspondant au nombre 3,679. Donc $\frac{1}{e} = 0{,}3679$.

VII.

(Page 18.)

Table abrégée pour le calcul des logarithmes naturels ou hyperboliques à 20 décimales.

8. L'emploi de cette Table est identique à celui de la Table analogue relative aux logarithmes vulgaires dans les *T. à 5 D.*, en tenant compte seulement de ce que l'on vient de dire au sujet de la Table VI. *Voyez* aussi l'*Introduction* à la *Table d'interpolation* de Schrön, pages 2 et 3.

VIII.

(Page 19.)

Table de conversion des logarithmes naturels en logarithmes vulgaires et des parties décimales du rayon en parties décimales du quadrant, et réciproquement, ou Tables des multiples de M, $\frac{1}{M}$, $\frac{2}{\pi}$, $\frac{\pi}{2}$.

9. L'usage de ces Tables n'a besoin d'aucune explication.

IX.

(Pages 20-22.)

Valeurs naturelles à 4 décimales des fonctions circulaires de 15 en 15 minutes de degré, ou de minute en minute de temps, avec l'évaluation des arcs en parties de rayon.

10. Cette Table est une extension de celle que nous avons donnée à la page 86 des *T. à 5 D.*, et peut servir aux mêmes usages. Pour la conversion du temps en arc ou de l'arc en temps, on s'aidera de la Table auxiliaire suivante :

Table auxiliaire pour la conversion des parties de la circonférence en parties du jour, et réciproquement.

0'	0^s	**5'**	20^s	**10'**	40^s	**0^s**	0'. 0"	**5^s**	1'.15"	**10^s**	2'.30"
1	4	**6**	24	**11**	44	**1**	0.15	**6**	1.30	**20**	5. 0
2	8	**7**	28	**12**	48	**2**	0.30	**7**	1.45	**30**	7.30
3	12	**8**	32	**13**	52	**3**	0.45	**8**	2. 0	**40**	10. 0
4	16	**9**	36	**14**	56	**4**	1. 0	**9**	2.15	**50**	12.30

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$0^s,0$	0",0	0",15	0",3	0",45	0",6	0",75	0",9	1",05	1",2	1",35
1	1,5	1,65	1,8	1,95	2,1	2,25	2,4	2,55	2,7	2,85
2	3,0	3,15	3,3	3,45	3,6	3,75	3,9	4,05	4,2	4,35
3	4,5	4,65	4,8	4,95	5,1	5,25	5,4	5,55	5,7	5,85
4	6,0	6,15	6,3	6,45	6,6	6,75	6,9	7,05	7,2	7,35
0,5	7,5	7,65	7,8	7,95	8,1	8,25	8,4	8,55	8,7	8,85
6	9,0	9,15	9,3	9,45	9,6	9,75	9,9	10,05	10,2	10,35
7	10,5	10,65	10,8	10,95	11,1	11,25	11,4	11,55	11,7	11,85
8	12,0	12,15	12,3	12,45	12,6	12,75	12,9	13,05	13,2	13,35
9	13,5	13,65	13,8	13,95	14,1	14,25	14,4	14,55	14,7	14,85

X.

(Pages 23-25.)

Logarithmes à 4 décimales des fonctions circulaires de minute en minute pour les 100 premières minutes, et de 10 en 10 minutes pour le reste du quadrant.

11. Cette Table est particulièrement appropriée aux calculs dans lesquels on divise la minute en parties décimales. Sa disposition est la même que celle des Tables de Lalande ou de nos *T. à 5 D.*

12. Remarque. — Pour trouver le logarithme du sinus ou de la tangente d'un très-petit arc, on commencera par multiplier cet arc par une puissance de 10, telle que le produit soit compris entre 10' et 100' = 1°40'. On cherchera alors, par interpolation, le logarithme du sinus ou de la tangente de ce nouvel arc, et l'on diminuera ensuite la caractéristique d'un nombre d'unités correspondant à la puissance de 10 par laquelle on a multiplié.

Ainsi, pour avoir log sin 1',432, on cherchera

$$\log\sin 14',32 = \bar{3},6099 + 299 \times 0,32 = \bar{3},6195,$$

et l'on en conclura

$$\log\sin 1',432 = \bar{4},6195.$$

Autrement, on prendra le logarithme du nombre de minutes, et l'on y ajoutera le logarithme d'une minute en parties du rayon, en se servant de la Table I. Ainsi

log 1,432.....	0,1559
log 1'........	$\bar{4}$,4637
log sin ou tang 1',432...	$\bar{4}$,6196

On voit aisément comment on résoudra le problème inverse, de déterminer un arc très-petit, connaissant son log sin ou son log tang.

XI.

(Pages 26-29.)

Logarithmes à 4 décimales des fonctions circulaires de 6 en 6 minutes, ou de dixième en dixième de degré.

13. L'objet principal de cette Table est de faciliter les calculs rapides, dans lesquels on divise le degré lui-même en parties décimales, quoiqu'elle se prête aussi aux calculs où l'on conserve la division du degré en minutes. Dans ce dernier cas, les calculs d'interpolation sont tout pareils à ceux des Tables ordinaires, de minute en minute, lorsqu'on y divise la minute en secondes.

Pour les fonctions des petits arcs, voir la remarque du numéro précédent.

14. Nous avons ajouté, au bas des pages 26 et 27, des Tables de conversion des parties sexagésimales du degré en parties décimales, et réciproquement. Dans ces Tables, les chiffres renfermés entre parenthèses sont les périodes des fractions décimales. Ainsi, on trouve

$$47'' = 0^\circ,0130\,(5) = 0^\circ,013055555.....$$

15. Au bas des pages 28 et 29 nous avons placé deux petites Tables donnant les logarithmes à 3 décimales des sinus et des tangentes de degré en degré, et destinées soit à l'ébauche, soit à la révision rapide des calculs.

XII.

(Page 30.)

Valeurs naturelles à 3 décimales des fonctions circulaires pour chaque centième du quadrant, donnant la conversion des parties décimales du quadrant en parties sexagésimales de la circonférence et en parties décimales du quadrant.

16. L'usage et la disposition de cette Table sont entièrement analogues à ceux de la page 86 des *T. à 5 D.* (Voyez *Introduction*, pages XX et XXI.)

La Table auxiliaire du bas de la page donne par addition la conversion des parties décimales du quadrant en parties sexagésimales, et par soustraction la conversion réciproque.

XIII.

(Pages 31-35.)

Logarithmes des fonctions circulaires : 1° à 3 décimales pour chaque centième du quadrant; 2° à 4 décimales pour chaque dix-millième du quadrant jusqu'à $0^q,0300$, et pour chaque millième dans toute l'étendue du quadrant.

17. Cette Table est disposée comme la Table XI, et son usage est analogue, en tenant toujours compte, pour les petits arcs, de la remarque du n° 12.

De $0^q,0000$ à $0^q,0300$, la Table de la page 31 donne log tang x au moyen de la formule

$$\log\tang x = \log\sin x + \log\operatorname{séc} x.$$

XIV.

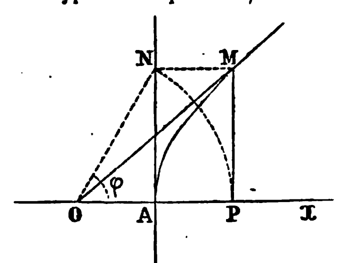
(Pages 36-55.)

Valeurs naturelles et logarithmiques, à 4 décimales, des fonctions circulaires et hyperboliques, correspondantes à toutes les valeurs de l'arc ou de l'amplitude hyperbolique, de millième en millième du quadrant.

18. La partie de cette Table relative aux fonctions circulaires est disposée *à simple entrée*, comme la partie trigonométrique des *T. à 5 D.*

19. Avant d'expliquer l'usage des colonnes auxiliaires qui donnent les *fonctions hyperboliques*, rappelons en quelques mots l'origine géométrique de ces fonctions.

L'hyperbole équilatère, de demi-axe = 1, peut être représentée par l'ensemble des deux équations



$$x = \text{séc}\,\varphi, \quad y = \text{tang}\,\varphi,$$

φ étant l'angle $\text{NO}x$, que fait avec l'axe des x l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés $\text{OA} = 1$, $\text{NO} = x$, $\text{AN} = y$.

D'autre part, le double de l'aire du secteur hyperbolique OAM étant désigné par u, les coordonnées x et y auront pour expressions

$$x = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad y = \frac{e^u - e^{-u}}{2}.$$

Par analogie avec les expressions des coordonnées du cercle de rayon 1, en fonctions de l'arc ou du double secteur circulaire t,

$$x = \cos t = \frac{e^{t\sqrt{-1}} + e^{-t\sqrt{-1}}}{2}, \quad y = \sin t = \frac{e^{t\sqrt{-1}} - e^{-t\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

on désigne les coordonnées de l'hyperbole, considérées comme fonctions du double secteur hyperbolique u, sous les noms de *cosinus hyperbolique* et de *sinus hyperbolique*. Nous représenterons ces quantités par les notations

$$\text{Ch}\,u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad \text{Sh}\,u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}.$$

Le rapport $\frac{\text{Sh}\,u}{\text{Ch}\,u}$ s'appelle la *tangente hyperbolique*,

$$\text{Th}\,u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}.$$

Les fonctions circulaires et les fonctions hyperboliques forment les deux cas extrêmes des fonctions elliptiques $\cos \text{am}\,u$, $\sin \text{am}\,u$, $\text{tang}\,\text{am}\,u$, correspondants aux valeurs 0 et 1 du module. L'angle φ des formules précédentes étant ce que devient l'*amplitude* des fonctions elliptiques lorsque le module devient égal à l'unité, nous proposons de donner à cet angle le nom d'*amplitude hyperbolique* de l'*argument* u, et nous le désignerons par la notation $\text{Amh}\,u$.

L'amplitude φ est liée à l'argument u par les relations

$$\text{Sh}\,u = \text{tang}\,\varphi, \quad \text{Ch}\,u = \text{séc}\,\varphi, \quad \text{Th}\,u = \sin\varphi, \quad du = \frac{d\varphi}{\cos\varphi}.$$

Voyez le *Recueil de formules relatives aux fonctions hyperboliques*, page XXX.

20. D'après cela, chaque fonction circulaire de l'arc φ est en même temps une certaine fonction hyperbolique de l'argument u. Cette correspondance est indiquée par un double *en-tête*, placé en haut comme en bas de chaque colonne.

L'interpolation se fait comme pour les fonctions trigonométriques, en tenant compte de ce que l'argument ne varie pas par intervalles constants.

Exemples. — 1°. Pour $u = 0,3284$, on a (pages 44 et 45)

$$\text{Sh}\,u = \text{Sh}\,(0,3277 + 7) = 0,3336 + 18 \times \frac{7}{17} = 0,3343,$$

$$\log \text{Th}\,u = \log \text{Th}\,(0,3277 + 7) = \bar{1},5003 + 21 \times \frac{7}{17} = \bar{1},5012.$$

2° Pour $\text{M}u = 0,08605$, on a (pages 40 et 41)

$$\text{Ch}\,u = \text{Ch}\,\frac{0,08583 + 22}{\text{M}} = 1,0196 + 3 \times \frac{22}{69} = 1,0197,$$

$$\log \text{Sh}\,u = \bar{1},2987 + 35 \times \frac{22}{69} = \bar{1},2998.$$

3° Pour $\text{Th}\,u = 0,2613$, on a (pages 42 et 43)

$$u = \text{Arg Th}\,(0,2608 + 5) = 0,2670 + 16 \times \frac{5}{16} = 0,2675,$$

$$\text{M}u = 0,11596 + 71 \times \frac{5}{16} = 0,11619.$$

21. Pour les petites valeurs de l'arc $\text{Amh}\,u$ ou de l'argument hyperbolique u, on obtiendra les logarithmes des sinus et des tangentes hyperboliques en se servant de la remarque faite au sujet de la Table X (n° **12**).

Ainsi, on prendra $\text{Sh}\,(0,000307) = \frac{1}{100}\,\text{Sh}\,(0,0307)$,

$$\log \text{Sh}\,(0,0307) = \bar{2},4875, \quad \text{d'où} \quad \log (0,000307) = \bar{4},4875.$$

Autrement, on prend approximativement

$$\text{Sh}\,u = \text{Th}\,u = u.$$

22. Pour de grandes valeurs de u, au contraire, on a sensiblement

$$\text{Sh}\,u = \text{Ch}\,u = \frac{1}{2}e^u, \quad \text{Th}\,u = 1,$$

d'où l'on conclut

$$\log \text{vulg}\,\text{Sh}\,u = \log \text{vulg}\,\text{Ch}\,u = \text{M}u - \log \text{vulg}\,2.$$

Ainsi, pour $\text{M}u = 2,7172$,

$$\log \text{Sh}\,u = \log \text{Ch}\,u = 2,7172 - 0,3010 = 2,4162.$$

Si u n'est pas assez grand pour que cette égalité soit suffisamment approchée, la différence entre $\log \text{Sh}\,u$ et $\text{M}u - \log 2$ sera très-petite, et variera très-peu dans l'intervalle de deux termes consécutifs de la Table. Étant donné, par exemple, $\log \text{Ch}\,u = 1,2811$, on voit que, pour le nombre tabulaire voisin $\log \text{Ch}\,u = 1,2726$, la différence en question est

$$1,2726 - 1,2723 = 3.$$

Donc, pour $\log \text{Ch}\,u = 1,2811$, on a

$$\text{M}u = 1,2811 + \log 2 - 3 = 1,5818.$$

De même, on a, dans le voisinage de cette valeur, $\log \text{Ch}\,u - \log \text{Sh}\,u = 6$. Donc, pour cette valeur même,

$$\log \text{Sh}\,u = \log \text{Ch}\,u - 6 = 1,2805.$$

On aurait u en multipliant $\text{M}u$ par $\frac{1}{\text{M}}$, au moyen de la Table de conversion VIII.

---

23. Nous allons maintenant indiquer quelques exemples de l'application des fonctions hyperboliques.

I. Pour calculer la surface d'un sphéroïde aplati, engendré par la révolution de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

autour de son petit axe $2b$, et dont l'excentricité est $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, on posera

$$\operatorname{Sh} u=\frac{ae}{b^2}y,$$

et l'on aura la formule

$$\text{surface}=\frac{\pi b^2}{e}\left(u+\frac{1}{2}\operatorname{Sh}2u\right),$$

cette surface étant comprise entre l'équateur et un parallèle donné. Si l'on veut la surface totale du sphéroïde, on n'aura qu'à faire $y=b$, d'où

$$\operatorname{Sh} u=\frac{ae}{b}=\frac{e}{\sqrt{1-e^2}},$$

et à doubler le résultat.

S'il s'agit, par exemple, du sphéroïde terrestre, dont l'aplatissement

$$\alpha=1-\sqrt{1-e^2}=\frac{1}{299,15},$$

on prendra alors

$$\operatorname{Sh} u=\frac{\sqrt{\alpha(2-\alpha)}}{1-\alpha}=\frac{\sqrt{2\alpha\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)}}{1-\alpha},$$

valeur que l'on calculera aisément au moyen des logarithmes de soustraction

α	$\bar{3},52411$
2α	$\bar{3},82514$
$\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}$	$0,00073$
$2\alpha\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$	$\bar{3},82441$
$e=\sqrt{\alpha(2-\alpha)}$	$\bar{2},91221$
$\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{1}{1-\alpha}$ . . .	$0,00145$
$\operatorname{Sh} u$	$\bar{2},91366$

$u =$	$0,0819$
$\frac{1}{2}\operatorname{Sh}2u =$	$0,0822$
somme $=$	$0,1641$
log.	$\bar{1},2151$
$\frac{1}{2e}$	$0,7868$
	$0,0019$
nombre $=$	$1,0044$

Donc la surface totale du sphéroïde est à la surface $4\pi b^2$ de la sphère ayant pour diamètre l'axe polaire, dans le rapport de $1,0044$ à l'unité.

II. En supposant la résistance du milieu proportionnelle au carré de la vitesse, les temps de l'ascension et de la chute d'un mobile pesant, lancé verticalement, sont donnés par les formules

$$t_1=\frac{k}{g}\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{k},\quad t_2=\frac{k}{g}\operatorname{Arg\,Sh}\frac{a}{k},$$

a étant la vitesse initiale, k un coefficient constant. Soient, par exemple,

$$a=340 \text{ mètres},\qquad \log\frac{k}{g}=1,0792,\qquad \text{d'où}\qquad \log\frac{a}{k}=0,4607.$$

Voici le calcul des deux formules (pages 45 et 44) :

$\log\frac{a}{k} = 0,4607$	$\text{arc tang}\,\frac{a}{k}$ (en quadr.).	$\bar{1},8964$		
$\text{arc tang}\,\frac{a}{k} = 0^q,7878$	$\frac{\pi}{2}$.	$0,1961$	$\text{Arg Sh}\,\frac{a}{k}$ . . .	$0,2511$
$\text{Arg Sh}\,\frac{a}{k} = 1,7825$	$\frac{k}{g}$.	$1,0792$	$\frac{k}{g}$.	$1,0792$
	t_1.	$1,1717$	t_2.	$1,3303$

Donc $t_1 = 14^s,85$, $t_2 = 21^s,39$.

III. Pour déterminer les éléments d'une chaînette, étant donnée la corde horizontale $2b$ d'un arc et la flèche h de cet arc, on a l'équation (*)

$$\frac{b}{h} = \frac{u}{\text{Ch}\,u - 1},$$

u étant l'argument dont l'amplitude hyperbolique est égale à l'angle φ, que fait avec l'horizon la tangente à l'une des extrémités de l'arc.

Prenons les données de l'exemple traité par Gudermann,

$$b = 100, \quad h = 79,$$

d'où

$$\frac{b}{h} = 1,26\ldots, \quad \log\frac{b}{h} = 0,10237.$$

Après quelques essais, qui se font très-rapidement en s'aidant de la règle à calcul, on trouve que u est compris entre

$$u_1 = 1,3434 \quad \text{et} \quad u_2 = 1,3760.$$

Or

$$\log\frac{u_1}{\text{Ch}\,u_1 - 1} = 0,10843, \quad \log\frac{u_2}{\text{Ch}\,u_2 - 1} = 0,09490,$$

$$\text{Différence} = +\ 606, \qquad \text{Différence} = -\ 747.$$

Donc

$$u = 1,3434 + \frac{606}{606 + 747} \times 326 = 1,3580,$$

d'où

$$\varphi = \text{Amh}\,u = 0^q,6795 = 61^\circ\,9'\,18'',$$

valeur exacte à 2 ou 3 secondes près.

IV. L'anomalie vraie v d'une comète, dans le mouvement parabolique, est donnée par l'équation (**)

$$\text{tang}^3\frac{v}{2} + 3\,\text{tang}\,\frac{v}{2} = \frac{3kt}{\sqrt{2q^3}},$$

où l'on a

$$\log\frac{3k}{\sqrt{2}} = \bar{2},5621877.$$

Soient donnés, par exemple,

$$\log q = \bar{1},76565, \quad t = 49^j,2528, \quad \text{d'où} \quad \log\frac{3kt}{\sqrt{2q^3}} = 0,6061.$$

(*) GUDERMANN, *Theorie der Potenzial-Functionen*, §§ 79 et suiv.

(**) GAUSS, *Theoria motus corporum cœlestium*, art. 20.

II. *Pour* $\theta = 0^q,9542$, *calculer* $\log K$.

On cherchera $\log K'$ pour l'angle complémentaire $\theta = 0^q,0458$, pour lequel

$$\log \frac{4}{k'} = \log(4 \operatorname{coséc} \theta) = 1,7454.$$

On aura alors

$$\begin{aligned} \log\log \frac{4}{k'} &= 0,2419 \\ \log \frac{1}{M} &= 0,3622 \\ \beta &= 0,0004 \\ \hline \text{d'où} \quad \log K &= 0,6045 \end{aligned}$$

26. La seconde Table (page 58) fait connaître, pour les diverses valeurs de l'amplitude et de l'angle du module, les valeurs, tant naturelles que logarithmiques, des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce.

Pour les petites valeurs de l'amplitude et du module, l'interpolation est plus facile en se servant des valeurs naturelles. C'est le contraire qui a lieu pour les grandes valeurs de ces deux arguments, surtout lorsqu'il s'agit des intégrales de première espèce. Aussi avons-nous, pour ces dernières, donné à la Table de leurs valeurs logarithmiques une plus grande extension, en la calculant pour chaque centième du quadrant à partir de la valeur $0^q,90$ des deux arguments φ et θ.

Nos Tables étant à deux arguments, et les intervalles étant trop considérables pour qu'on puisse négliger les différences secondes, on fera les calculs d'interpolation comme il suit.

Soit $u_{\varphi\theta}$ la valeur cherchée, correspondante aux arguments

$$\varphi = \varphi_0 + h, \quad \theta = \theta_0 + k.$$

Prenons dans la Table les valeurs

$$\begin{matrix} u_{\varphi_0\theta_0}, & u_{\varphi_0\theta_1}, & u_{\varphi_0\theta_2}, \\ u_{\varphi_1\theta_0}, & u_{\varphi_1\theta_1}, & \\ u_{\varphi_2\theta_0}. & & \end{matrix}$$

Désignons par Δ'_φ, $\Delta''_{\varphi\varphi}$ les différences première et seconde, relatives à la variation de φ dans la première ligne verticale; par Δ'_θ, $\Delta''_{\theta\theta}$ les différences première et seconde, relatives à la variation de θ dans la première ligne horizontale, et enfin par

$$\Delta''_{\varphi\theta} = \Delta_\varphi u_{\varphi_1\theta_1} - \Delta_\varphi u_{\varphi_0\theta_0} = \Delta_\theta u_{\varphi_1\theta_0} - \Delta_\theta u_{\varphi_0\theta_0} = u_{\varphi_1\theta_1} - u_{\varphi_1\theta_0} - u_{\varphi_0\theta_1} + u_{\varphi_0\theta_0}$$

la différence seconde relative à la variation simultanée des deux arguments. La valeur de $u_{\varphi\theta}$ sera

$$\begin{aligned} u_{\varphi\theta} = u_{\varphi_0\theta_0} &+ h\left(\Delta'_\varphi - \frac{1-h}{2}\Delta''_{\varphi\varphi} + k\Delta''_{\varphi\theta}\right) \\ &+ k\left(\Delta'_\theta - \frac{1-k}{2}\Delta''_{\theta\theta}\right). \end{aligned}$$

Pour résoudre le problème inverse de trouver l'un des arguments, connaissant l'autre et la valeur correspondante de la fonction, on se servira de la formule ci-dessus, que l'on résoudra par approximations successives.

Exemples. — I. *Calculer* $F(\varphi)$ *pour* $\varphi = 0^q,74444$, $\theta = 0^q,67778$.

En prenant $\varphi_0 = 0^q,7$, $\theta_0 = 0^q,6$, on formera le Tableau suivant des valeurs et

de leurs différences :

	1,2575	1,3118	1,3664	Δ'_φ	2364	$u_{\varphi_0\theta_0}$	1,2575
	1,4939	1,5886		$-\frac{1}{2}(1-h)\Delta''_{\varphi\varphi}$ —	49	Δ'_φ corr. $\times h$	1168
	1,7481			$k\Delta''_{\varphi\theta}$	314	Δ'_θ corr. $\times k$	422
Diff. 1res	2364	543	546	Δ'_φ corrigé . .	2629	$u_{\varphi\theta}$	1,4165
	2542	947		Δ'_θ	543	Les Tables de Legendre donnent	
Diff. 2^{es}	$\Delta''_{\varphi\varphi} = 178$,	$\Delta''_{\varphi\theta} = 404$,	$\Delta''_{\theta\theta} =$ 3	$-\frac{1}{2}(1-k)\Delta''_{\theta\theta}$ —	0		
$h = 0,4444$,	$k = 0,7778$			Δ'_θ corrigé . .	543	$u_{\varphi\theta} = 1,4140.$	

En calculant de même log F (φ), on trouverait pour valeur 0,1509, au lieu de 0,1504, que l'on conclurait des Tables de Legendre.

II. *Étant donnés* $\theta = 0^q,56209$, $\log E(\varphi) = \bar{1},8065$, *trouver* φ.
Ici $\varphi_0 = 0^q,4$, $\theta_0 = 0^q,5$, $k = 0,6209$: il s'agit de trouver h.

Valeurs :	$\bar{1}$,7844	7799	7757	Δ'_φ	896	$u_{\varphi\theta}$	$\bar{1}$,8065
	8740	8669		$k\Delta''_{\varphi\theta}$ .... —	16	$-u_{\varphi_0\theta_0}$	$-\bar{1}$,7844
	9448			δ_φ	880	$-\Delta'_\theta$ corr. $\times k$ +	27
Diff. 1res.	896	— 45	— 42	Δ'_θ .... —	42	Reste = R......	248
	708	— 71		$-\frac{1-k}{2}\Delta''_{\theta\theta}$. —	1	$\frac{R}{\delta_\varphi} = 0,2818\ldots.$	
Diff. 2es.	—188	— 26	+ 3	Δ'_θ corr... —	43		

L'inconnue h sera déterminée par l'équation

$$h = \frac{R}{\delta_\varphi} + \frac{h(1-h)}{2}\,\frac{\Delta''_{\varphi\varphi}}{\delta_\varphi},$$

qui donne pour première approximation $h = \frac{R}{\delta_\varphi} = 0,2818$, d'où

$$\frac{h(1-h)}{2}\cdot\frac{\Delta''_{\varphi\varphi}}{\delta_\varphi} = -0,28 \times 0,36 \times \frac{188}{880} = -0,101 \times 0,214 = -0,0216;$$

et par suite

$$h = 0,2818 - 0,0216 = 0,2602.$$

Une nouvelle approximation donnerait $h = 0,2608$, d'où

$$\varphi = 0^q,,42608.$$

Les Tables de Legendre donneraient $\varphi = 0^q,42571$.

27. On interpolerait de la même manière les Tables de la page 59, quoique ces Tables aient en général plutôt pour but de montrer la marche de ces fonctions que de servir à leur calcul numérique. Ce calcul se fait d'ailleurs très-simplement à l'aide des séries très-convergentes qui représentent ces fonctions.

XVII.

(Pages 60-61.)

Tables de diverses transcendantes.

28. I. *Table des intégrales eulériennes de seconde espèce.*

Cette Table contient d'abord les valeurs logarithmiques à 5 décimales de la fonction

$$\Gamma(1+x)=\int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^x\,d\alpha,$$

pour les valeurs de x depuis 0,00 jusqu'à 1,00, ou, ce qui revient au même, les valeurs logarithmiques de la fonction

$$\Gamma(y)=\int_0^\infty e^{-\alpha}x^{y-1}\,d\alpha,$$

pour y compris entre 1 et 2.

Au moyen de la formule

$$(1)\qquad \Gamma(1+x)=x(x-1)\ldots(x-n)\Gamma(1+x-n),$$

n étant le plus grand entier contenu dans x, lorsque x est >1, et au moyen de la formule

$$(2)\qquad \Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(1+x),$$

lorsque x est compris entre 0 et l'unité, on pourra toujours ramener le calcul d'une valeur quelconque de la fonction $\Gamma(x)$ au cas où son argument est compris entre les limites de la Table.

Ainsi, on a

$$\Gamma(4,82719)=3,82719\times 2,82719\times 1,82719\times\Gamma(1,82719),$$

	3,82719......	0,58288
	2,82719......	0,45136
	1,82719......	0,26179
	Γ(1,82719)...	$\bar{1}$,97261
d'où	Γ(4,82719)...	1,26864

De même,

$$\Gamma(0,1)=\frac{1}{0,1}\Gamma(1,1)=(0,97834).$$

Pour

$$0<x<1,$$

$$(3)\qquad \Gamma(1+x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi x}{\sin\pi x},\quad \Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

En particulier, n étant entier, on a

$$(4)\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}=(0,24857),\quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

29. Lorsque x est entier, $\Gamma(1+x)$ se change dans la factorielle

$$x!=1.2.3\ldots x.$$

Nous donnons les logarithmes à 8 décimales des valeurs de cette factorielle jusqu'à $x=100$.

On peut, à l'aide de ces valeurs, calculer très-simplement diverses expressions qui se rencontrent dans le calcul des séries, telles que

$$1.3.5\ldots(2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n \times n!} = \frac{\Gamma(2n-1)}{2^n\Gamma(n-1)},$$

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\quad 2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\Gamma(2n-1)}{2^{2n}[\Gamma(n-1)]^2},$$

etc.

C'est ainsi qu'on a formé le tableau suivant :

Logarithmes des coefficients $\left[\frac{1}{2}\right]_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\quad 2n}$ *du développement de* $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$.

n	$\log\left[\frac{1}{2}\right]_n$	n	$\log\left[\frac{1}{2}\right]_n$	n	$\log\left[\frac{1}{2}\right]_n$	n	$\log\left[\frac{1}{2}\right]_n$	n	$\log\left[\frac{1}{2}\right]_n$
1	$\bar{1}$,6989 7000	**6**	$\bar{1}$,3533 1202	**11**	$\bar{1}$,2257 9525	**16**	$\bar{1}$,1459 7270	**21**	$\bar{1}$,0877 3057
2	$\bar{1}$,5740 3127	**7**	$\bar{1}$,3211 2734	**12**	$\bar{1}$,2073 1185	**17**	$\bar{1}$,1330 0772	**22**	$\bar{1}$,0777 4635
3	$\bar{1}$,4948 5002	**8**	$\bar{1}$,2930 9862	**13**	$\bar{1}$,1902 7851	**18**	$\bar{1}$,1207 7326	**23**	$\bar{1}$,0682 0104
4	$\bar{1}$,4368 5807	**9**	$\bar{1}$,2682 7503	**14**	$\bar{1}$,1744 8424	**19**	$\bar{1}$,1091 9139	**24**	$\bar{1}$,0590 5766
5	$\bar{1}$,3911 0058	**10**	$\bar{1}$,2459 9864	**15**	$\bar{1}$,1597 6098	**20**	$\bar{1}$,0981 9601	**25**	$\bar{1}$,0502 8373

Nous donnons à la suite de ces Tables les valeurs des coefficients des développements en séries de $\log\Gamma(1+x)$, et les logarithmes des 31 premiers nombres de Bernoulli, d'après les valeurs de ces nombres calculées par Ohm (*Journal de Crelle*, tome XX, page 11).

30. II. *Table des valeurs du logarithme intégral*

$$\text{li}\, x = \int_0^x \frac{dx}{\log x},$$

ou

$$\text{li}\, e^y = \int_{-\infty}^{y} \frac{e^y}{y}\, dy.$$

Nous avons extrait cette Table d'un Mémoire de Bretschneider, publié dans le *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, tome VI, pages 127 et suiv.

L'argument de cette Table est $\log x = y$. La série qui donne la valeur de $\text{li}\, e^y$ est la suivante

$$\text{li}\, e^y = C + \log y + \frac{y}{1} + \frac{1}{2}\frac{y^2}{2!} + \frac{1}{3}\frac{y^3}{3!} + \frac{1}{4}\frac{y^4}{4!} + \ldots,$$

la constante C ayant pour valeur

$$C = 0,5772\ 1566\ 4901\ 5328\ 6060\ldots.$$

Pour trouver le logarithme intégral d'un nombre e^{a+z}, correspondant à un argument $a+z$ compris entre deux arguments a et $a+1$ de la Table, on se servira de la formule

$$\text{li}\, e^{a+z} = \text{li}\, e^a + \log\left(1+\frac{z}{a}\right) + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots,$$

les coefficients de cette série étant donnés par les relations

$$A_1 = \frac{1}{a}\left(e^a - 1\right), \quad (n+1)A_{n+1} = \frac{1}{a}\left(\frac{e^a}{1.2\ldots n} - nA_n\right).$$

Proposons-nous, par exemple, de calculer la valeur de li x pour $x = 20000$. Comme log nat $x = 9,903487$ est compris entre 9 et 10, mais plus voisin de 10, nous prendrons

$$a = 10, \quad z = -0,096513, \quad \text{d'où} \quad e^a = 22026,$$

et l'on en conclura, pour les valeurs des coefficients,

$$A_1 = 2202,5, \quad A_2 = 991,2, \quad A_3 = 301,0, \quad A_4 = 69,2, \ldots.$$

Par conséquent,

$$\begin{array}{lcr} \text{li}\, e^a & = & 2492,23 \\ \log\text{nat}\left(1+\dfrac{z}{a}\right) & = - & 0,01 \\ A_1 z & = - & 212,57 \\ A_2 z^2 & = & 9,23 \\ A_3 z^3 & = - & 0,27 \\ A_4 z^4 & = & 0,01 \\ \hline \text{li}\, x & = & 2288,62 \end{array}$$

On a ainsi une expression approchée du nombre des nombres premiers inférieurs à 20000, lequel est égal à 2260.

31. III. *Table des valeurs de l'intégrale*

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx.$$

Cette Table est extraite de la Table plus étendue que Kramp a publiée dans son *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres.*

Nous y avons joint les valeurs logarithmiques des coefficients des séries qui peuvent servir à calculer cette transcendante pour des valeurs très-petites ou très-grandes de l'argument.

XVIII.

(Pages 62-63.)

Table des carrés, à 4 décimales, des nombres depuis 0,000 jusqu'à 1,200.

32. Cette Table est destinée à faciliter les calculs de la méthode des moindres carrés.

Elle peut servir de Table de multiplication, au moyen de la formule

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Ainsi, pour multiplier 0,1387 par 1,7135, on aura

$$\begin{array}{lr} \left(\dfrac{a+b}{2}\right) = (0,9261)^2 = 0,8577 \\ \left(\dfrac{a-b}{2}\right) = (0,7874)^2 = 0,6200 \\ \hline \text{d'où} \qquad ab = 0,2377 \end{array}$$

XIX.

(Page 64.)

Table de puissances.

33. I. *Puissances fractionnaires de* 10, *ou Table abrégée d'antilogarithmes à* 10 *décimales.*

Cette Table a été donnée par Long (*) avec 9 décimales, et son usage est expliqué dans l'*Algèbre* de Lacroix, n° 243 (note).

Elle peut servir à trouver par de simples multiplications le nombre correspondant à un logarithme donné, et par de simples divisions le logarithme correspondant à un nombre donné.

Ainsi, si l'on représente par $0{,}abcd\ldots$ la partie décimale d'un logarithme, le nombre correspondant sera

$$10^{0,abcd\ldots} = 10^{0,a} . 10^{0,0b} . 10^{0,00c} . 10^{0,000d} \ldots,$$

les facteurs de ce produit étant donnés par la Table.

Si le nombre est donné, en le divisant par le plus grand nombre de la Table qu'il contienne, et opérant de même sur les quotients successifs, on obtiendra les divers chiffres de la partie décimale de son logarithme.

II. Les autres tableaux de cette page n'ont besoin d'aucune explication.

(*) *Philosophical Transactions*, 1724, n° 339.

FORMULES RELATIVES
AUX FONCTIONS HYPERBOLIQUES.

$$\mathrm{Sh}\,u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \qquad \mathrm{Ch}\,u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \qquad \mathrm{Th}\,u = \frac{\mathrm{Sh}\,u}{\mathrm{Ch}\,u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}.$$

$$\mathrm{Cos\acute{e}ch}\,u = \frac{1}{\mathrm{Sh}\,u}, \qquad \mathrm{S\acute{e}ch}\,u = \frac{1}{\mathrm{Ch}\,u}, \qquad \mathrm{Coth}\,u = \frac{1}{\mathrm{Th}\,u}.$$

$e^{\pm u} = \mathrm{Ch}\,u \pm \mathrm{Sh}\,u$, $\quad (\mathrm{Ch}\,u \pm \mathrm{Sh}\,u)^n = \mathrm{Ch}\,nu \pm \mathrm{Sh}\,nu$.

$\sin(iu) = i\,\mathrm{Sh}\,u$, $\quad \cos(iu) = \mathrm{Ch}\,u$, $\quad \mathrm{tang}(iu) = i\,\mathrm{Th}\,u$.

$\mathrm{Sh}\,(iu) = i \sin u$, $\quad \mathrm{Ch}\,(iu) = \cos u$, $\quad \mathrm{Th}\,(iu) = i\,\mathrm{tang}\,u$.

$\mathrm{Sh}\,0 = 0$, $\quad \mathrm{Ch}\,0 = 1$, $\quad \mathrm{Th}\,0 = 0$,

$\mathrm{Sh}\,\infty = \infty$, $\quad \mathrm{Ch}\,\infty = \infty$, $\quad \mathrm{Th}\,\infty = 1$.

$\mathrm{Sh}(-u) = -\mathrm{Sh}\,u$, $\quad \mathrm{Ch}(-u) = \mathrm{Ch}\,u$, $\quad \mathrm{Th}(-u) = -\mathrm{Th}\,u$.

$$d\,\mathrm{Sh}\,u = \mathrm{Ch}\,u\,du, \qquad d\,\mathrm{Ch}\,u = \mathrm{Sh}\,u\,du, \qquad d\,\mathrm{Th}\,u = \frac{du}{\mathrm{Ch}^2 u}.$$

$$d.\mathrm{Sh}^2 u = d.\mathrm{Ch}^2 u = 2\,\mathrm{Sh}\,u\,\mathrm{Ch}\,u.du = \mathrm{Sh}\,2u.du.$$

$$d.\log \mathrm{Sh}\,u = \mathrm{Coth}\,u\,du, \qquad d.\log \mathrm{Ch}\,u = \mathrm{Th}\,u\,du, \qquad d.\log \mathrm{Th}\,u = \frac{2\,du}{\mathrm{Sh}\,2u}.$$

$$\mathrm{Sh}\,u = \frac{u}{1} + \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^5}{1.2.3.4.5} + \ldots.$$

$$\mathrm{Ch}\,u = 1 + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^4}{1.2.3.4} + \frac{u^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

$$\mathrm{Arg\,Sh}\,x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots.$$

$$\mathrm{Arg\,Ch}\,x = \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

$$\mathrm{Arg\,Th}\,x = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad [x < 1].$$

$$\mathrm{Arg\,Coth}\,x = \mathrm{Arg\,Th}\,\frac{1}{x} = \int_x^\infty \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots, \quad [x > 1].$$

$$\mathrm{Arg\,Sh}\,x = \mathrm{Arg\,Ch}\sqrt{x^2+1} = \mathrm{Arg\,Th}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\mathrm{Arg\,Ch}\,x = \mathrm{Arg\,Sh}\sqrt{x^2-1} = \mathrm{Arg\,Th}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 2\,\mathrm{Arg\,Ch}\sqrt{\frac{x+1}{2}} = 2\,\mathrm{Arg\,Sh}\sqrt{\frac{x-1}{2}}.$$

Pour u très-petit, $\begin{cases} \mathrm{Sh}\,u = u.(\mathrm{Ch}\,u)^{\frac{1}{3}}, \qquad \mathrm{Th}\,u = u.(\mathrm{Ch}\,u)^{-\frac{2}{3}}, \\ u = \mathrm{Sh}\,u.(\mathrm{Ch}\,u)^{-\frac{1}{3}} = \mathrm{Th}\,u.(\mathrm{Ch}\,u)^{\frac{2}{3}}. \end{cases}$

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \log\,\mathrm{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\mathrm{Amh}\,u = \varphi = 2\,\mathrm{arc\,tang}\,e^u - \frac{\pi}{2}.$$

$\mathrm{Sh}\,u = \mathrm{tang}\,\varphi$, $\quad \mathrm{Ch}\,u = \mathrm{s\acute{e}c}\,\varphi$, $\quad \mathrm{Th}\,u = \sin\varphi$.

$\mathrm{Ch}^2 u - \mathrm{Sh}^2 u = 1.$

$\mathrm{Th}\, u = \dfrac{\mathrm{Sh}\, u}{\mathrm{Ch}\, u}.$

$\mathrm{Coth}\, u = \dfrac{\mathrm{Ch}\, u}{\mathrm{Sh}\, u}.$

$\mathrm{Th}\, u\, \mathrm{Coth}\, u = 1.$

$\mathrm{Ch}\, u\, \mathrm{Séch}\, u = 1.$

$\mathrm{Sh}\, u\, \mathrm{Coséch}\, u = 1.$

$\mathrm{Séch}^2 u = 1 - \mathrm{Th}^2 u.$

$\mathrm{Coséch}^2 u = \mathrm{Coth}^2 u - 1.$

$\mathrm{Sh}\, u = \dfrac{\mathrm{Th}\, u}{\sqrt{1 - \mathrm{Th}^2 u}}.$

$\mathrm{Ch}\, u = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{Th}^2 u}}.$

$\mathrm{Th}\, u = \dfrac{1}{\mathrm{Coth}\, u} = \dfrac{\mathrm{Sh}\, u}{\sqrt{1 + \mathrm{Sh}^2 u}} = \dfrac{\sqrt{\mathrm{Ch}^2 u - 1}}{\mathrm{Ch}\, u}$

$\mathrm{Sh}\, 2u = 2\mathrm{Sh}\, u\, \mathrm{Ch}\, u.$

$\mathrm{Ch}\, 2u = 2\mathrm{Ch}^2 u - 1 = \mathrm{Ch}^2 u + \mathrm{Sh}^2 u = 1 + 2\mathrm{Sh}^2 u.$

$\mathrm{Th}\, 2u = \dfrac{2\mathrm{Th}\, u}{1 + \mathrm{Th}^2 u} = \dfrac{2}{\mathrm{Coth}\, u + \mathrm{Th}\, u}.$

$\mathrm{Coth}\, 2u = \dfrac{\mathrm{Coth}^2 u + 1}{2\mathrm{Coth}\, u} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Coth}\, u + \tfrac{1}{2}\mathrm{Th}\, u.$

$\dfrac{\mathrm{Ch}\, u + \mathrm{Sh}\, u}{\mathrm{Ch}\, u - \mathrm{Sh}\, u} = \dfrac{1 + \mathrm{Th}\, u}{1 - \mathrm{Th}\, u} = \dfrac{\mathrm{Coth}\, u + 1}{\mathrm{Coth}\, u - 1} = e^{2u}.$

$\mathrm{Sh}(u \pm v) = \mathrm{Sh}\, u\, \mathrm{Ch}\, v \pm \mathrm{Ch}\, u\, \mathrm{Sh}\, v.$

$\mathrm{Ch}(u \pm v) = \mathrm{Ch}\, u\, \mathrm{Ch}\, v \pm \mathrm{Sh}\, u\, \mathrm{Sh}\, v.$

$\mathrm{Sh}\, u\, \mathrm{Ch}\, v = \tfrac{1}{2}\mathrm{Sh}(u + v) + \tfrac{1}{2}\mathrm{Sh}(u - v).$

$\mathrm{Ch}\, u\, \mathrm{Sh}\, v = \tfrac{1}{2}\mathrm{Sh}(u + v) - \tfrac{1}{2}\mathrm{Sh}(u - v).$

$\mathrm{Ch}\, u\, \mathrm{Ch}\, v = \tfrac{1}{2}\mathrm{Ch}(u + v) + \tfrac{1}{2}\mathrm{Ch}(u - v).$

$\mathrm{Sh}\, u\, \mathrm{Sh}\, v = \tfrac{1}{2}\mathrm{Ch}(u + v) - \tfrac{1}{2}\mathrm{Ch}(u - v).$

$\mathrm{Sh}\, u + \mathrm{Sh}\, v = 2\mathrm{Sh}\, \tfrac{1}{2}(u + v)\, \mathrm{Ch}\, \tfrac{1}{2}(u - v).$

$\mathrm{Sh}\, u - \mathrm{Sh}\, v = 2\mathrm{Ch}\, \tfrac{1}{2}(u + v)\, \mathrm{Sh}\, \tfrac{1}{2}(u - v).$

$\mathrm{Ch}\, u + \mathrm{Ch}\, v = 2\mathrm{Ch}\, \tfrac{1}{2}(u + v)\, \mathrm{Ch}\, \tfrac{1}{2}(u - v).$

$\mathrm{Ch}\, u - \mathrm{Ch}\, v = 2\mathrm{Sh}\, \tfrac{1}{2}(u + v)\, \mathrm{Sh}\, \tfrac{1}{2}(u - v).$

$\dfrac{\mathrm{Sh}\, u + \mathrm{Sh}\, v}{\mathrm{Sh}\, u - \mathrm{Sh}\, v} = \dfrac{\mathrm{Th}\, \frac{1}{2}(u + v)}{\mathrm{Th}\, \frac{1}{2}(u - v)}.$

$\dfrac{\mathrm{Ch}\, u + \mathrm{Ch}\, v}{\mathrm{Ch}\, u - \mathrm{Ch}\, v} = \dfrac{1}{\mathrm{Th}\, \frac{1}{2}(u + v)\, \mathrm{Th}\, \frac{1}{2}(u - v)}.$

$\dfrac{\mathrm{Sh}\, u \pm \mathrm{Sh}\, v}{\mathrm{Ch}\, u + \mathrm{Ch}\, v} = \dfrac{\mathrm{Ch}\, u - \mathrm{Ch}\, v}{\mathrm{Sh}\, u \mp \mathrm{Sh}\, v} = \mathrm{Th}\, \tfrac{1}{2}(u \pm v).$

$\mathrm{Th}(u \pm v) = \dfrac{\mathrm{Th}\, u \pm \mathrm{Th}\, v}{1 \pm \mathrm{Th}\, u\, \mathrm{Th}\, v}.$

$\mathrm{Coth}(u \pm v) = \dfrac{\mathrm{Coth}\, u\, \mathrm{Coth}\, v \pm 1}{\mathrm{Coth}\, v \pm \mathrm{Coth}\, u}.$

$\mathrm{Th}\, u \pm \mathrm{Th}\, v = \dfrac{\mathrm{Sh}(u \pm v)}{\mathrm{Ch}\, u\, \mathrm{Ch}\, v}.$

$\mathrm{Coth}\, u \pm \mathrm{Coth}\, v = \dfrac{\mathrm{Sh}(u \pm v)}{\mathrm{Sh}\, u\, \mathrm{Sh}\, v}.$

$\mathrm{Coth}\, u \pm \mathrm{Th}\, v = \dfrac{\mathrm{Ch}(u \pm v)}{\mathrm{Sh}\, u\, \mathrm{Ch}\, v}.$

$\mathrm{Sh}^2 u - \mathrm{Sh}^2 v = \mathrm{Ch}^2 u - \mathrm{Ch}^2 v = \mathrm{Sh}(u + v)\, \mathrm{Sh}(u - v).$

$\mathrm{Ch}^2 u + \mathrm{Sh}^2 v = \mathrm{Sh}^2 u + \mathrm{Ch}^2 v = \mathrm{Ch}(u + v)\, \mathrm{Ch}(u - v).$

$\mathrm{Ch}\, u + 1 = 2\mathrm{Ch}^2 \tfrac{1}{2}u, \qquad \mathrm{Ch}\, u - 1 = 2\mathrm{Sh}^2 \tfrac{1}{2}u.$

$\mathrm{Th}\, \tfrac{1}{2}u = \dfrac{1}{\mathrm{Coth}\, \frac{1}{2}u} = \dfrac{\mathrm{Sh}\, u}{\mathrm{Ch}\, u + 1} = \dfrac{\mathrm{Ch}\, u - 1}{\mathrm{Sh}\, u} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{Ch}\, u - 1}{\mathrm{Ch}\, u + 1}}.$

$\mathrm{Ch}\, u = \dfrac{1 + \mathrm{Th}^2 \frac{1}{2}u}{1 - \mathrm{Th}^2 \frac{1}{2}u}.$

$\mathrm{Sh}\, 3u = 4\mathrm{Sh}^3 u + 3\mathrm{Sh}\, u = \mathrm{Sh}\, u\, (4\mathrm{Ch}^2 u - 1),$

$\mathrm{Ch}\, 3u = 4\mathrm{Ch}^3 u - 3\mathrm{Ch}\, u = \mathrm{Ch}\, u\, (4\mathrm{Sh}^2 u + 1).$

$\mathrm{Th}\, 3u = \dfrac{\mathrm{Th}^3 u + 3\mathrm{Th}\, u}{3\mathrm{Th}^2 u + 1}, \quad \mathrm{Coth}\, 3u = \dfrac{\mathrm{Coth}\, u + 3\mathrm{Th}\, u}{3 + \mathrm{Th}\, u}.$

$\mathrm{Sh}\, (n + 1)\, u = 2\mathrm{Ch}\, u . \mathrm{Sh}\, nu - \mathrm{Sh}\, (n - 1)\, u,$

$\mathrm{Ch}\, (n + 1)\, u = 2\mathrm{Ch}\, u . \mathrm{Ch}\, nu - \mathrm{Ch}\, (n - 1)\, u.$

Des formules de la page XXXVII des *T.* à 5*D.* il est aisé d'en déduire d'autres relatives aux fonctions hyperboliques, en remplaçant $\sin a$, $\sin na$, $\cos a$, $\cos na$ par $i\mathrm{Sh}\, a$, $i\mathrm{Sh}\, na$, $\mathrm{Ch}\, a$, $\mathrm{Ch}\, na$.

Résolution des équations du second et du troisième degré.

p positif ou négatif,
q positif.

I. $x^2+px+q=0, \quad \left(\frac{p^2}{4}>q\right).$

$$\text{Th}\,u=\frac{2}{p}\sqrt{q},$$

$$x'=-\sqrt{q}\,\text{Coth}\,\tfrac{1}{2}u,$$

$$x''=-\sqrt{q}\,\text{Th}\,\tfrac{1}{2}u.$$

II. $x^2+px+q=0, \quad \left(\frac{p^2}{4}<q\right).$

$$\text{Ch}\,u=\pm\frac{2}{p}\sqrt{q}, \quad (\pm p>0),$$

$$\left.\begin{matrix}x'\\x''\end{matrix}\right\}=-\frac{p}{2}\pm i\sqrt{q}.\text{Th}\,u.$$

III. $x^2+px-q=0.$

$$\text{Sh}\,u=\frac{2}{p}\sqrt{q},$$

$$x'=\sqrt{q}.\text{Th}\,\tfrac{1}{2}u,$$

$$x''=-\sqrt{q}.\text{Coth}\,\tfrac{1}{2}u.$$

p positif,
q positif ou négatif.

I. $x^3+px+q=0.$

$$\text{Sh}\,u=-\frac{q}{2}\left(\frac{3}{p}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$x'=2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\text{Sh}\,\tfrac{1}{3}u,$$

$$\left.\begin{matrix}x''\\x'''\end{matrix}\right\}=-\tfrac{1}{2}x'\pm i\sqrt{p}.\text{Ch}\,\tfrac{1}{3}u.$$

II. $x^3-px+q=0, \quad \left(\frac{p^3}{27}>\frac{q^2}{4}\right).$

$$\text{Ch}\,u=\mp\frac{q}{2}\left(\frac{3}{p}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad (\mp q>0),$$

$$x'=\pm 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\text{Ch}\,\tfrac{1}{3}u,$$

$$\left.\begin{matrix}x''\\x'''\end{matrix}\right\}=-\tfrac{1}{2}x'\pm i\sqrt{p}.\text{Sh}\,\tfrac{1}{3}u.$$

III. $x^3-px+q=0, \quad \left(\frac{p^3}{27}<\frac{q^2}{4}\right).$

$$\cos u=\frac{q}{2}\left(\frac{3}{p}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$x'=-2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\cos\tfrac{1}{3}u,$$

$$\left.\begin{matrix}x''\\x'''\end{matrix}\right\}=2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\cos\tfrac{1}{3}(\pi\pm u).$$

FORMULES RELATIVES AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES.

§ Ier.

Des fonctions ϑ.

Soit ρ un nombre positif, et posons

(1) $$q = e^{-2\rho}, \quad \rho = \frac{1}{2} \log \text{nat.}\, q.$$

Les fonctions ϑ sont définies par les équations (*)

(2) $$\begin{cases} \vartheta\, x = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + - \ldots, \\ \vartheta_1 x = 2q^{\frac{1}{4}}\sin x - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3x + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5x - + \ldots, \\ \vartheta_2 x = 2q^{\frac{1}{4}}\cos x + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3x + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 5x + \ldots, \\ \vartheta_3 x = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots. \end{cases}$$

Lorsque la constante q se trouve remplacée par une autre lettre, q' par exemple, on la mettra en évidence, et l'on écrira

$$\vartheta(x, q'), \quad \vartheta_1(x, q'), \quad \vartheta_2(x, q'), \quad \vartheta_3(x, q').$$

On a d'abord les relations

(3) $$\vartheta(-x) = \vartheta x, \quad \vartheta_1(-x) = -\vartheta_1 x, \quad \vartheta_2(-x) = \vartheta_2 x, \quad \vartheta_3(-x) = \vartheta_3 x.$$

En faisant, pour abréger,

$$q^{\frac{1}{4}} e^{-xi} = g,$$

(*) Pour comparer nos notations avec celles de Jacobi, si l'on pose (n° 11)

$$u = \frac{2K}{\pi} x, \quad \rho = \frac{\pi K'}{2K}, \quad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

on aura

$$\Theta(u) = \vartheta x, \quad H(u) = \vartheta_1 x, \quad H_1(u) = \vartheta_2 x, \quad \Theta_1(u) = \vartheta_3 x,$$

et les relations (4) deviendront

$$g = q^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi u}{2K} i},$$

$$\Theta(u) = \Theta_1(K - u) = ig\, H(u - K'i) = -ig\, H_1(u + K - K'i),$$
$$H(u) = H_1(K - u) = ig\, \Theta(u - K'i) = ig\, \Theta_1(u + K - K'i),$$
etc.

On en tire (*voyez* § XI)

$$\Theta(0) = \Theta_1(K), \quad H(0) = H_1(K) = 0, \quad H_1(0) = H(K), \quad \Theta_1(0) = \Theta(K),$$
etc.

on a entre les quatre fonctions ϑ les relations

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
\vartheta\, x &= \vartheta_3\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = ig\vartheta_1(x-\rho i) = -ig\vartheta_2\left(x+\frac{\pi}{2}-\rho i\right),\\
\vartheta_1 x &= \vartheta_2\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = ig\vartheta\,(x-\rho i) = \quad ig\vartheta_3\left(x+\frac{\pi}{2}-\rho i\right),\\
\vartheta_2 x &= \vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = g\vartheta_3(x-\rho i) = \quad g\vartheta\left(x+\frac{\pi}{2}-\rho i\right),\\
\vartheta_3 x &= \vartheta\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = g\vartheta_2(x-\rho i) = \quad g\vartheta_1\left(x+\frac{\pi}{2}-\rho i\right).
\end{aligned}\right.
$$

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
\vartheta\,(0) &= \vartheta_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1-2q+2q^4-2q^9+-\ldots,\\
\vartheta_1(0) &= \vartheta_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\\
\vartheta_2(0) &= \vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2q^{\frac{1}{4}}+2q^{\frac{9}{4}}+2q^{\frac{25}{4}}+\ldots,\\
\vartheta_3(0) &= \vartheta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1+2q+2q^4+2q^9+\ldots.
\end{aligned}\right.
$$

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\text{Pour}\left\{\begin{aligned} x &= \alpha+m\pi+2n\rho i,\\ X_n &= q^{-n^2}e^{-2nxi},\end{aligned}\right.\\
&\text{on a}\left\{\begin{aligned}
\vartheta\, x &= (-1)^n\, X_n.\vartheta\,\alpha,\\
\vartheta_1 x &= (-1)^{m+n} X_n.\vartheta_1\alpha,\\
\vartheta_2 x &= (-1)^m\, X_n.\vartheta_2\alpha,\\
\vartheta_3 x &= \qquad\quad X_n.\vartheta_3\alpha.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.
\qquad
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\text{Pour}\left\{\begin{aligned} x &= \alpha+m\pi+(2n+1)\rho i\\ X_n &= q^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{-(2n+1)xi},\end{aligned}\right.\\
&\text{on a}\left\{\begin{aligned}
\vartheta\, x &= (-1)^{n+\frac{1}{2}}\, X_n.\vartheta\,\alpha,\\
\vartheta_1 x &= (-1)^{m+n+\frac{1}{2}} X_n.\vartheta_1\alpha,\\
\vartheta_2 x &= (-1)^m\, X_n.\vartheta_2\alpha,\\
\vartheta_3 x &= \qquad\quad X_n.\vartheta_3\alpha.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.
$$

---

§ II.

Soient

(8) $$\rho' = \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{\rho},\quad x' = x\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}} = \frac{\pi x}{2\rho} = \frac{2\rho' x}{\pi},$$

d'où

(9) $$\rho\rho' = \frac{\pi^2}{4},\quad \frac{x'}{x} = \frac{\sqrt{\rho'}}{\sqrt{\rho}} = \frac{\pi}{2\rho} = \frac{2\rho'}{\pi} = \gamma,$$

(10) $$q' = e^{-2\rho'},\quad \rho' = \frac{1}{2}\log\text{nat.}\,\frac{1}{q'}.$$

En faisant, pour abréger (*),

$$V = \sqrt{\gamma}.e^{\frac{x^2}{2\rho}} = \sqrt{\gamma}.e^{\frac{x'^2}{2\rho'}} = \sqrt{\gamma}.q'^{\frac{x^2}{\pi^2}} = \sqrt{\gamma}.q^{\frac{x'^2}{\pi^2}},$$

on aura

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
\vartheta\,(xi) &= V.\vartheta_3(x', q'),\\
\frac{1}{i}\vartheta_1(xi) &= V.\vartheta_1(x', q'),\\
\vartheta_2(xi) &= V.\vartheta\,(x', q'),\\
\vartheta_3(xi) &= V.\vartheta_2(x', q').
\end{aligned}\right.
$$

(*) D'après la notation de Jacobi,

$$\rho' = \frac{\pi K}{2K'},\quad q' = e^{-\frac{\pi K}{K'}},\quad x' = \frac{\pi u}{2K'},\quad \vartheta(x', q') = \Theta(u, k'),\quad \text{etc.}$$

Pour q voisin de l'unité, q' très-petit, on emploiera les formules

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
\vartheta\, x &= \mathrm{V}\left(2q'^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{Ch}\,x' + 2q'^{\frac{9}{4}}\,\mathrm{Ch}\,3x' + 2q'^{\frac{25}{4}}\,\mathrm{Ch}\,5x' + \ldots\ldots\right),\\
\vartheta_1 x &= \mathrm{V}\left(2q'^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{Sh}\,x' - 2q'^{\frac{9}{4}}\,\mathrm{Sh}\,3x' + 2q'^{\frac{25}{4}}\,\mathrm{Sh}\,5x' - + \ldots\right),\\
\vartheta_2 x &= \mathrm{V}\,(1 - 2q'\,\mathrm{Ch}\,2x' + 2q'^4\,\mathrm{Ch}\,4x' - 2q'^9\,\mathrm{Ch}\,6x' + - \ldots),\\
\vartheta_3 x &= \mathrm{V}\,(1 + 2q'\,\mathrm{Ch}\,2x' + 2q'^4\,\mathrm{Ch}\,4x' + 2q'^9\,\mathrm{Ch}\,6x' + \ldots\ldots);
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
\vartheta\,(0) &= \sqrt{\gamma}\left(\quad 2q'^{\frac{1}{4}} + 2q'^{\frac{9}{4}} + 2q'^{\frac{25}{4}} + \ldots\ldots\right),\\
\vartheta_2(0) &= \sqrt{\gamma}\,(1 - 2q' + 2q'^4 - 2q'^9 + - \ldots),\\
\vartheta_3(0) &= \sqrt{\gamma}\,(1 + 2q' + 2q'^4 + 2q'^9 + \ldots\ldots).
\end{aligned}
\right.
$$

§ III.

Soient, pour abréger,

$$
(14)\quad \Gamma = \sqrt{\gamma}\cdot e^{\frac{y^2 - x^2}{2\rho}} = \sqrt{\gamma}\cdot e^{\frac{y'^2 - x'^2}{2\rho'}},\qquad y' = y\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}},
$$

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
\lambda'(x, yi, q) &= 1 - 2q\cos 2x\,\mathrm{Ch}\,2y + 2q^4\cos 4x\,\mathrm{Ch}\,4y - + \ldots,\\
\lambda''(x, yi, q) &= 2q\sin 2x\,\mathrm{Sh}\,2y - 2q^4\sin 4x\,\mathrm{Sh}\,4y + - \ldots,\\
\lambda'_1(x, yi, q) &= 2q^{\frac{1}{4}}\sin x\,\mathrm{Ch}\,y - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3x\,\mathrm{Ch}\,3y + - \ldots,\\
\lambda''_1(x, yi, q) &= 2q^{\frac{1}{4}}\cos x\,\mathrm{Sh}\,y - 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3x\,\mathrm{Sh}\,3y + - \ldots,\\
\lambda'_2(x, yi, q) &= 2q^{\frac{1}{4}}\cos x\,\mathrm{Ch}\,y + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3x\,\mathrm{Ch}\,3y + \ldots,\\
\lambda''_2(x, yi, q) &= 2q^{\frac{1}{4}}\sin x\,\mathrm{Sh}\,y + 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3x\,\mathrm{Sh}\,3y + \ldots,\\
\lambda'_3(x, yi, q) &= 1 + 2q\cos 2x\,\mathrm{Ch}\,2y + 2q^4\cos 4x\,\mathrm{Ch}\,4y + \ldots,\\
\lambda''_3(x, yi, q) &= 2q\sin 2x\,\mathrm{Sh}\,2y + 2q^4\sin 4x\,\mathrm{Sh}\,4y + \ldots.
\end{aligned}
\right.
$$

On a

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\vartheta(x+yi) - \vartheta(x-yi)}{2} &= \lambda'(x, yi, q) = \Gamma\cos\frac{x'y'}{\rho'}\lambda'_2(y', x'i, q') + \Gamma\sin\frac{x'y'}{\rho'}\lambda''_2(y', x'i, q'),\\
\frac{\vartheta(x+yi) - \vartheta(x-yi)}{2i} &= \lambda''(x, yi, q) = -\Gamma\sin\frac{x'y'}{\rho'}\lambda'_2(y', x'i, q') + \Gamma\cos\frac{x'y'}{\rho'}\lambda''_2(y', x'i, q'),\\
\frac{\vartheta_1(x+yi) + \vartheta_1(x-yi)}{2} &= \lambda'_1(x, yi, q) = \Gamma\sin\frac{x'y'}{\rho'}\lambda'_1(y', x'i, q') + \Gamma\cos\frac{x'y'}{\rho'}\lambda''_1(y', x'i, q'),\\
\frac{\vartheta_1(x+yi) - \vartheta_1(x-yi)}{2i} &= \lambda''_1(x, yi, q) = \Gamma\cos\frac{x'y'}{\rho'}\lambda'_1(y', x'i, q') - \Gamma\sin\frac{x'y'}{\rho'}\lambda''_1(y', x'i, q'),\\
\frac{\vartheta_2(x-yi) + \vartheta_2(x+yi)}{2} &= \lambda'_2(x, yi, q) = \Gamma\cos\frac{x'y'}{\rho'}\lambda'(y', x'i, q') - \Gamma\sin\frac{x'y'}{\rho'}\lambda''(y', x'i, q'),\\
\frac{\vartheta_2(x-yi) - \vartheta_2(x+yi)}{2i} &= \lambda''_2(x, yi, q) = \Gamma\sin\frac{x'y'}{\rho'}\lambda'(y', x'i, q') + \Gamma\cos\frac{x'y'}{\rho'}\lambda''(y', x'i, q'),\\
\frac{\vartheta_3(x-yi) + \vartheta_3(x+yi)}{2} &= \lambda'_3(x, yi, q) = \Gamma\cos\frac{x'y'}{\rho'}\lambda'_3(y, x'i, q') + \Gamma\sin\frac{x'y'}{\rho'}\lambda''_3(y', x'i, q'),\\
\frac{\vartheta_3(x-yi) - \vartheta_3(x+yi)}{2i} &= \lambda''_3(x, yi, q) = \Gamma\sin\frac{x'y'}{\rho'}\lambda'_3(y', x'i, q') - \Gamma\cos\frac{x'y'}{\rho'}\lambda''_3(y', x'i, q').
\end{aligned}
\right.
$$

§ IV.

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned}
\log\frac{\vartheta x}{\vartheta 0} &= \frac{2\sin^2 x}{\mathrm{Sh}\,2\rho}+\frac{2\sin^2 2x}{2\,\mathrm{Sh}\,4\rho}+\frac{2\sin^2 3x}{3\,\mathrm{Sh}\,6\rho}+\ldots,\\
\log\frac{\vartheta_1 x}{\vartheta_1 0} &= \log\sin x-\frac{2q\cos^2 x}{\mathrm{Sh}\,2\rho}+\frac{2q^2\sin^2 2x}{2\,\mathrm{Sh}\,4\rho}-\frac{2q^3\cos^2 3x}{3\,\mathrm{Sh}\,6\rho}+-\ldots,\\
\log\frac{\vartheta_2 x}{\vartheta_2 0} &= \log\cos x-\frac{2q\sin^2 x}{\mathrm{Sh}\,2\rho}+\frac{2q^2\sin^2 2x}{2\,\mathrm{Sh}\,4\rho}-\frac{2q^3\sin^2 3x}{3\,\mathrm{Sh}\,6\rho}+-\ldots,\\
\log\frac{\vartheta_3 x}{\vartheta_3 0} &= -\frac{2\sin^2 x}{\mathrm{Sh}\,2\rho}+\frac{2\sin^2 2x}{2\,\mathrm{Sh}\,4\rho}-\frac{2\sin^2 3x}{3\,\mathrm{Sh}\,6\rho}+-\ldots.
\end{aligned}\right.$$

$$(18)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(x+y)}{\vartheta(x-y)} &= \frac{\sin 2x\sin 2y}{\mathrm{Sh}\,2\rho}+\frac{\sin 4x\sin 4y}{2\,\mathrm{Sh}\,4\rho}+\frac{\sin 6x\sin 6y}{3\,\mathrm{Sh}\,6\rho}+\ldots,\\
\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_1(x+y)}{\vartheta_1(x-y)} &= \frac{1}{2}\log\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}+\frac{q\sin 2x\sin 2y}{\mathrm{Sh}\,2\rho}+\frac{q^2\sin 4x\sin 4y}{2\,\mathrm{Sh}\,4\rho}+\frac{q^3\sin 6x\sin 6y}{3\,\mathrm{Sh}\,6\rho}+\ldots,\\
\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_2(x+y)}{\vartheta_2(x-y)} &= \frac{1}{2}\log\frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)}-\frac{q\sin 2x\sin 2y}{\mathrm{Sh}\,2\rho}+\frac{q^2\sin 4x\sin 4y}{2\,\mathrm{Sh}\,4\rho}-\frac{q^3\sin 6x\sin 6y}{3\,\mathrm{Sh}\,6\rho}+-\ldots,\\
\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_3(x+y)}{\vartheta_3(x-y)} &= -\frac{\sin 2x\sin 2y}{\mathrm{Sh}\,2\rho}+\frac{\sin 4x\sin 4y}{2\,\mathrm{Sh}\,4\rho}-\frac{\sin 6x\sin 6y}{3\,\mathrm{Sh}\,6\rho}+-\ldots.
\end{aligned}\right.$$

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{2i}\log\frac{\vartheta(x+yi)}{\vartheta(x-yi)} &= \text{arc tang}\,\frac{\lambda''(x,yi,q)}{\lambda'(x,yi,q)}, \qquad [\textit{Voyez}\ \text{form. (15).}]\\
\frac{1}{2i}\log\frac{\vartheta_1(yi-x)}{\vartheta_1(yi+x)} &= x+\text{arc tang}\,\frac{\lambda''[x,(\rho-y)i,q]}{\lambda'[x,(\rho-y)i,q]},\\
\frac{1}{2i}\log\frac{\vartheta_2(x-yi)}{\vartheta_2(x+yi)} &= x-\text{arc tang}\,\frac{\lambda''_3[x,(\rho-y)i,q]}{\lambda'_3[x,(\rho-y)i,q]},\\
\frac{1}{2i}\log\frac{\vartheta_3(x-yi)}{\vartheta_3(x+yi)} &= \text{arc tang}\,\frac{\lambda''_3(x,yi,q)}{\lambda'_3(x,yi,q)}.
\end{aligned}\right.$$

§ V.

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned}
D_x\log\vartheta x &= \frac{2}{\vartheta x}\left(2q\sin 2x-4q^4\sin 4x+6q^9\sin 6x-+\ldots\right)\ (^*),\\
D_x\log\vartheta_1 x &= \frac{2}{\vartheta_1 x}\left(q^{\frac{1}{4}}\cos x-3q^{\frac{9}{4}}\cos 3x+5q^{\frac{25}{4}}\cos 5x-+\ldots\right),\\
D_x\log\vartheta_2 x &= -\frac{2}{\vartheta_2 x}\left(q^{\frac{1}{4}}\sin x+3q^{\frac{9}{4}}\sin 3x+5q^{\frac{25}{4}}\sin 5x+\ldots\ldots\right),\\
D_x\log\vartheta_3 x &= -\frac{2}{\vartheta_3 x}\left(2q\sin 2x+4q^4\sin 4x+6q^9\sin 6x+\ldots\ldots\right).
\end{aligned}\right.$$

$$(21)\quad\left\{\begin{aligned}
D_x\log\vartheta x &= 2\frac{\sin 2x}{\mathrm{Sh}\,2\rho}+2\frac{\sin 4x}{\mathrm{Sh}\,4\rho}+2\frac{\sin 6x}{\mathrm{Sh}\,6\rho}+\ldots,\\
D_x\log\vartheta_1 x &= \cot x+2q\frac{\sin 2x}{\mathrm{Sh}\,2\rho}+2q^2\frac{\sin 4x}{\mathrm{Sh}\,4\rho}+2q^3\frac{\sin 6x}{\mathrm{Sh}\,6\rho}+\ldots,\\
D_x\log\vartheta_2 x &= -\text{tang}\,x-2q\frac{\sin 2x}{\mathrm{Sh}\,2\rho}+2q^2\frac{\sin 4x}{\mathrm{Sh}\,4\rho}-2q^3\frac{\sin 6x}{\mathrm{Sh}\,6\rho}+-\ldots,\\
D_x\log\vartheta_3 x &= -2\frac{\sin 2x}{\mathrm{Sh}\,2\rho}+2\frac{\sin 4x}{\mathrm{Sh}\,4\rho}-2\frac{\sin 6x}{\mathrm{Sh}\,6\rho}+-\ldots.
\end{aligned}\right.$$

(*) $D_x\log\vartheta x=\frac{2K}{\pi}\cdot D_u\log\Theta(u)=\frac{2K}{\pi}\cdot Z(u)$ (JACOBI).

$$(22)\quad\begin{cases} D_x \log \vartheta\ x = -\dfrac{2x'}{\pi} + \sqrt{\dfrac{\rho'}{\rho}}\left(\operatorname{Th} x' + 2q'\dfrac{\operatorname{Sh} 2x'}{\operatorname{Sh} 2\rho'} - 2q'^2\dfrac{\operatorname{Sh} 4x'}{\operatorname{Sh} 4\rho'} + - \ldots\right), \\ D_x \log \vartheta_1 x = -\dfrac{2x'}{\pi} + \sqrt{\dfrac{\rho'}{\rho}}\left(\dfrac{1}{\operatorname{Th} x'} - 2q'\dfrac{\operatorname{Sh} 2x'}{\operatorname{Sh} 2\rho'} - 2q'^2\dfrac{\operatorname{Sh} 4x'}{\operatorname{Sh} 4\rho'} - \ldots\ldots\right), \\ D_x \log \vartheta_2 x = -\dfrac{2x'}{\pi} - 2\sqrt{\dfrac{\rho'}{\rho}}\left(\dfrac{\operatorname{Sh} 2x'}{\operatorname{Sh} 2\rho'} + \dfrac{\operatorname{Sh} 4x'}{\operatorname{Sh} 4\rho'} + \ldots\ldots\right), \\ D_x \log \vartheta_3 x = -\dfrac{2x'}{\pi} + 2\sqrt{\dfrac{\rho'}{\rho}}\left(\dfrac{\operatorname{Sh} 2x'}{\operatorname{Sh} 2\rho'} - \dfrac{\operatorname{Sh} 4x'}{\operatorname{Sh} 4\rho'} + - \ldots\right). \end{cases}$$

$$(23)\quad\begin{cases} D_x \log \vartheta\,(xi) = -\dfrac{2}{\vartheta\,(xi)}\left(2q \operatorname{Sh} 2x - 4q^4 \operatorname{Sh} 4x + 6q^9 \operatorname{Sh} 6x - + \ldots\right), \\ D_x \log \vartheta_1(xi) = \dfrac{2i}{\vartheta_1(xi)}\left(q^{\frac{1}{4}} \operatorname{Ch} x - 3q^{\frac{9}{4}} \operatorname{Ch} 3x + 5q^{\frac{25}{4}} \operatorname{Ch} 5x - + \ldots\right), \\ D_x \log \vartheta_2(xi) = \dfrac{2}{\vartheta_2(xi)}\left(q^{\frac{1}{4}} \operatorname{Sh} x + 3q^{\frac{9}{4}} \operatorname{Sh} 3x + 5q^{\frac{25}{4}} \operatorname{Sh} 5x + \ldots\ldots\right), \\ D_x \log \vartheta_3(xi) = \dfrac{2}{\vartheta_3(xi)}\left(2q \operatorname{Sh} 2x + 4q^4 \operatorname{Sh} 4x + 6q^9 \operatorname{Sh} 6x + \ldots\ldots\right). \end{cases}$$

$$(24)\quad\begin{cases} D_x \log \vartheta\,(xi) = -\operatorname{Sh} 2x\left[\dfrac{1}{\operatorname{Sh}(\rho - x)\operatorname{Sh}(\rho + x)} + \dfrac{1}{\operatorname{Sh}(3\rho - x)\operatorname{Sh}(3\rho + x)} + \ldots\right], \\ D_x \log \vartheta_1(xi) = 1 + \operatorname{Sh} 2(\rho - x)\left[\dfrac{1}{\operatorname{Sh} x \operatorname{Sh}(2\rho - x)} + \dfrac{1}{\operatorname{Sh}(2\rho + x)\operatorname{Sh}(4\rho - x)} + \ldots\right], \\ D_x \log \vartheta_2(xi) = 1 - \operatorname{Sh} 2(\rho - x)\left[\dfrac{1}{\operatorname{Ch} x \operatorname{Ch}(2\rho - x)} + \dfrac{1}{\operatorname{Ch}(2\rho + x)\operatorname{Ch}(4\rho - x)} + \ldots\right], \\ D_x \log \vartheta_3(xi) = \operatorname{Sh} 2x\left[\dfrac{1}{\operatorname{Ch}(\rho - x)\operatorname{Ch}(\rho + x)} + \dfrac{1}{\operatorname{Ch}(3\rho - x)\operatorname{Ch}(3\rho + x)} + \ldots\right]. \end{cases}$$

§ VI.

Des fonctions elliptiques.

Soient k le *module* positif et < 1, k' le *module complémentaire*, θ l'*angle* du module, φ l'*amplitude* de l'intégrale $F(\varphi)$.

$$(25)\qquad k^2 + k'^2 = 1, \quad k = \sin\theta, \quad k' = \cos\theta.$$

$$(26)\qquad \begin{cases} \Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}, \\ u = F(\varphi) = \arg \operatorname{am} \varphi = \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \varphi = \operatorname{am} u. \end{cases}$$

$$(27)\qquad \begin{cases} \sin \operatorname{am} u = \operatorname{sn} u = \sin\varphi, \\ \cos \operatorname{am} u = \operatorname{cn} u = \cos\varphi, \\ \Delta \operatorname{am} u = \operatorname{dn} u = \Delta\varphi, \\ \operatorname{tang} \operatorname{am} u = \operatorname{tn} u = \operatorname{tang}\varphi. \end{cases} \qquad (28)\qquad \begin{cases} \text{Pour } u \text{ réel}, \\ -1 < \operatorname{sn} u < +1, \\ -1 < \operatorname{cn} u < +1, \\ k' < \operatorname{dn} u < +1, \\ -\infty < \operatorname{tn} u < +\infty. \end{cases}$$

Si le module est représenté par un autre signe que la lettre k, on le met en

évidence, et l'on écrit, par exemple, le module étant λ,

$$\Delta(\varphi, \lambda), \quad F(\varphi, \lambda), \quad \mathrm{am}(u, \lambda), \quad \mathrm{sn}(u, \lambda), \quad \text{etc.}$$

$$(29)\quad \left\{ \begin{array}{l} K = F^1(k) = F^1 = \arg \mathrm{am}\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \\ K' = F^1(k') = \arg \mathrm{am}\left(\dfrac{\pi}{2}, k'\right) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k')}. \end{array} \right.$$

§ VII.

$$(30)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d.\mathrm{am}\,u}{du} = \mathrm{dn}\,u, \\ \dfrac{d.\mathrm{sn}\,u}{du} = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \\ \dfrac{d.\mathrm{cn}\,u}{du} = -\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \\ \dfrac{d.\mathrm{dn}\,u}{du} = -k^2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u, \\ \dfrac{d.\mathrm{tn}\,u}{du} = \dfrac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}^2 u}. \end{array} \right.$$

$$(31)\quad \left\{ \begin{array}{l} \arg \mathrm{am}\,t = \displaystyle\int_0^t \dfrac{dt}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}}, \\ \arg \mathrm{sn}\,t = \displaystyle\int_0^t \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}, \\ \arg \mathrm{cn}\,t = \displaystyle\int_1^t \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{k'^2+k^2t^2}}, \\ \arg \mathrm{dn}\,t = \displaystyle\int_1^t \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{t^2-k'^2}}, \\ \arg \mathrm{tn}\,t = \displaystyle\int_0^t \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+k'^2t^2}}. \end{array} \right.$$

$$(32)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1, \\ k^2\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{dn}^2 u = 1, \\ \mathrm{dn}^2 u - k^2\mathrm{cn}^2 u = 1, \\ \mathrm{tn}\,u = \dfrac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}. \end{array} \right.$$

$$(33)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{am}(-u) = -\mathrm{am}\,u, \\ \mathrm{sn}(-u) = -\mathrm{sn}\,u, \\ \mathrm{cn}(-u) = \mathrm{cn}\,u, \\ \mathrm{dn}(-u) = \mathrm{dn}\,u, \\ \mathrm{tn}(-u) = -\mathrm{tn}\,u. \end{array} \right.$$

$$(34)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{am}\,0 = 0, & \mathrm{am}\,K = \dfrac{\pi}{2}, \\ \mathrm{sn}\,0 = 0, & \mathrm{sn}\,K = 1, \\ \mathrm{cn}\,0 = 1, & \mathrm{cn}\,K = 0, \\ \mathrm{dn}\,0 = 1, & \mathrm{dn}\,K = k', \\ \mathrm{tn}\,0 = 0, & \mathrm{tn}\,K = \infty. \end{array} \right.$$

$$(35)\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } k = 0, \quad k' = 1, \quad \theta = 0, \\ \qquad K = \dfrac{\pi}{2}, \quad K' = \infty, \\ \qquad u = \mathrm{am}\,u = \varphi, \\ \qquad \mathrm{sn}\,u = \sin u, \\ \qquad \mathrm{cn}\,u = \cos u, \\ \qquad \mathrm{dn}\,u = 1, \\ \qquad \mathrm{tn}\,u = \mathrm{tang}\,u. \end{array} \right.$$

$$(36)\quad\left\{\begin{array}{l}
\text{Pour}\quad k = 1,\quad k' = 0,\quad \theta = \dfrac{\pi}{2},\\
\mathrm{K} = \infty,\quad \mathrm{K}' = \dfrac{\pi}{2},\\
u = \log \operatorname{tang}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}\right),\\
\varphi = \operatorname{am}(u, 1) = \operatorname{Amh} u = 2 \operatorname{arc\,tang} e^{u} - \dfrac{\pi}{2},\\
\operatorname{sn} u = \operatorname{Th} u,\\
\operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = \dfrac{1}{\operatorname{Ch} u},\\
\operatorname{tn} u = \operatorname{Sh} u.
\end{array}\right.$$

§ VIII.

$$(37)\quad\left\{\begin{array}{l}
\operatorname{sn}(u+v) = \dfrac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},\\
\operatorname{cn}(u+v) = \dfrac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},\\
\operatorname{dn}(u+v) = \dfrac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},\\
\operatorname{tn}(u+v) = \dfrac{\operatorname{tn} u \operatorname{dn} v + \operatorname{tn} v \operatorname{dn} u}{1 - \operatorname{tn} u \operatorname{dn} v . \operatorname{tn} v \operatorname{dn} u},\\
\operatorname{am}(u+v) = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} u \operatorname{dn} v) + \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} v \operatorname{dn} u).
\end{array}\right.$$

$$(38)\quad\left\{\begin{array}{l}
\text{Pour}\quad u = a + 2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}',\\
\operatorname{am} u = (m \pm n)\pi + (-1)^m \operatorname{am} a,\\
\operatorname{sn} u = (-1)^m \operatorname{sn} a,\qquad \operatorname{dn} u = (-1)^n \operatorname{dn} a,\\
\operatorname{cn} u = (-1)^{m+n} \operatorname{cn} a,\qquad \operatorname{tn} u = (-1)^n \operatorname{tn} a.
\end{array}\right.$$

$$(39)\quad\left\{\begin{array}{lcccc}
\text{Pour} & & & & \\
u = & 2m\mathrm{K}+2ni\mathrm{K}', & (2m+1)\mathrm{K}+2ni\mathrm{K}', & 2m\mathrm{K}+(2n+1)i\mathrm{K}', & (2m+1)\mathrm{K}+(2n+1)i\mathrm{K}',\\
\operatorname{sn} u = & 0, & (-1)^m, & \infty, & \dfrac{(-1)^m}{k},\\
\operatorname{cn} u = & (-1)^{m+n}, & 0, & \infty, & \dfrac{(-1)^{m+n} k'}{ik},\\
\operatorname{dn} u = & (-1)^n, & (-1)^n k', & \infty, & 0,\\
\operatorname{tn} u = & 0, & \infty, & (-1)^n i, & \dfrac{(-1)^n i}{k'}.
\end{array}\right.$$

§ IX.

Désignons par l'indice inférieur 1 les fonctions elliptiques relatives à l'argument $\mathrm{K} - u$, *complément* de u.

$$(40)\quad\left\{\begin{array}{l}
\operatorname{am}_1 u = \operatorname{coam} u = \operatorname{am}(\mathrm{K} - u),\\
\operatorname{sn}_1 u = \sin \operatorname{coam} u = \operatorname{sn}(\mathrm{K} - u),\\
\operatorname{cn}_1 u = \cos \operatorname{coam} u = \operatorname{cn}(\mathrm{K} - u),\\
\operatorname{dn}_1 u = \Delta \operatorname{coam} u = \operatorname{dn}(\mathrm{K} - u),\\
\operatorname{tn}_1 u = \operatorname{tang} \operatorname{coam} u = \operatorname{tn}(\mathrm{K} - u).
\end{array}\right.$$

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{sn}_1 u = \frac{\mathrm{cn}\, u}{\mathrm{dn}\, u}, \quad \mathrm{cn}_1 u = \frac{k'\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{dn}\, u}, \quad \mathrm{dn}_1 u = \frac{k'}{\mathrm{dn}\, u}; \quad \mathrm{tn}_1 u = \frac{1}{k'\mathrm{tn}\, u}, \\ &\mathrm{am}_1 u = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arc\,tang}\,(k'\,\mathrm{tn}\, u). \end{aligned}\right.$$

$$(42)\quad \frac{\mathrm{sn}_1 u\, \mathrm{cn}_1 u}{\mathrm{dn}_1 u} = \frac{\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, u}{\mathrm{dn}\, u}, \quad \mathrm{dn}_1 u\, \mathrm{tn}_1 u = \frac{1}{\mathrm{dn}\, u\, \mathrm{tn}\, u}.$$

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{sn}_1(-u) &= \mathrm{sn}_1 u, \\ \mathrm{cn}_1(-u) &= -\mathrm{cn}_1 u, \\ \mathrm{dn}_1(-u) &= \mathrm{dn}_1 u, \\ \mathrm{tn}_1(-u) &= -\mathrm{tn}_1 u. \end{aligned}\right. \qquad (44)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{sn}_1 0 &= \mathrm{sn}\, K = 1, \\ \mathrm{cn}_1 0 &= \mathrm{cn}\, K = 0, \\ \mathrm{dn}_1 0 &= \mathrm{dn}\, K = k', \\ \mathrm{tn}_1 0 &= \mathrm{tn}\, K = \infty. \end{aligned}\right.$$

$$(45)\quad \left\{\begin{array}{llll} \text{Pour} & u = a + K, & a + iK', & a + K + iK', \\ & \mathrm{sn}\, u = \mathrm{sn}_1 a, & \dfrac{1}{k\,\mathrm{sn}\, a}, & \dfrac{1}{k\,\mathrm{sn}_1 a}, \\ & \mathrm{cn}\, u = -\mathrm{cn}_1 a, & -\dfrac{i\,\mathrm{dn}\, a}{k\,\mathrm{sn}\, a} = -\dfrac{ik'}{k\,\mathrm{cn}_1 a}, & -\dfrac{i\,\mathrm{dn}_1 a}{k\,\mathrm{sn}_1 a} = -\dfrac{ik'}{k\,\mathrm{cn}\, a}, \\ & \mathrm{dn}\, u = \mathrm{dn}_1 a, & -\dfrac{i}{\mathrm{tn}\, a}, & \dfrac{i}{\mathrm{tn}_1 a} = ik'\,\mathrm{tn}\, a, \\ & \mathrm{tn}\, u = -\mathrm{tn}_1 a, & \dfrac{i}{\mathrm{dn}\, a}, & \dfrac{i}{\mathrm{dn}_1 a} = \dfrac{i\,\mathrm{dn}\, a}{k'}. \end{array}\right.$$

§ X.

Désignons par un accent supérieur les fonctions elliptiques relatives au module complémentaire k', et posons

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{am}' u &= \mathrm{am}\,(u, k'), \\ \mathrm{sn}' u &= \mathrm{sn}\,(u, k'), \\ \mathrm{cn}' u &= \mathrm{cn}\,(u, k'), \\ \mathrm{dn}' u &= \mathrm{dn}\,(u, k'), \\ \mathrm{tn}' u &= \mathrm{tn}\,(u, k'). \end{aligned}\right. \qquad (47)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{am}'_1 u &= \mathrm{am}\,(K' - u, k'), \\ \mathrm{sn}'_1 u &= \mathrm{sn}\,(K' - u, k'), \\ \mathrm{cn}'_1 u &= \mathrm{cn}\,(K' - u, k'), \\ \mathrm{dn}'_1 u &= \mathrm{dn}\,(K' - u, k'), \\ \mathrm{tn}'_1 u &= \mathrm{tn}\,(K' - u, k'). \end{aligned}\right.$$

On a

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{sn}\,(ui) &= i\,\mathrm{tn}' u, \\ \mathrm{cn}\,(ui) &= \frac{1}{\mathrm{cn}' u}, \\ \mathrm{dn}\,(ui) &= \frac{\mathrm{dn}' u}{\mathrm{cn}' u} = \frac{1}{\mathrm{sn}'_1 u}, \\ \mathrm{tn}\,(ui) &= i\,\mathrm{sn}' u. \end{aligned}\right. \qquad (49)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{sn}\, u &= \frac{\mathrm{tn}'(ui)}{i}, \\ \mathrm{cn}\, u &= \frac{1}{\mathrm{cn}'(ui)}, \\ \mathrm{dn}\, u &= \frac{\mathrm{dn}'(ui)}{\mathrm{cn}'(ui)} = \frac{i}{\mathrm{sn}'_1(ui)}, \\ \mathrm{tn}\, u &= \frac{\mathrm{sn}'(ui)}{i}. \end{aligned}\right.$$

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{sn}_1(ui) &= \frac{1}{\mathrm{dn}' u} = \frac{\mathrm{dn}'_1 u}{k}, \\ \mathrm{cn}_1(ui) &= \frac{ik'\,\mathrm{sn}' u}{\mathrm{dn}' u} = \frac{ik}{k'}\,\mathrm{cn}'_1 u, \\ \mathrm{dn}_1(ui) &= \frac{k'\,\mathrm{cn}' u}{\mathrm{dn}' u} = k'\,\mathrm{sn}'_1 u, \\ \mathrm{tn}_1(ui) &= \frac{1}{ik'\,\mathrm{sn}' u} = \frac{1}{ik'}\,\frac{\mathrm{dn}'_1 u}{\mathrm{on}'_1 u}. \end{aligned}\right. \qquad (51)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{sn}_1 u &= \frac{1}{\mathrm{dn}'(ui)} = \frac{\mathrm{dn}'_1(ui)}{k}, \\ \mathrm{cn}_1 u &= \frac{k}{ik'}\,\mathrm{cn}'_1(ui), \\ \mathrm{dn}_1 u &= k'\,\mathrm{sn}'_1(ui), \\ \mathrm{tn}_1 u &= \frac{i}{k'\,\mathrm{sn}'(ui)}. \end{aligned}\right.$$

§ XI.

Expression des fonctions elliptiques au moyen des fonctions ϑ.

Posons

$$(52)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2K}u, & \rho = \dfrac{\pi}{2K}K', \quad q = e^{-2\rho} = e^{-\frac{\pi K'}{K}}, \\ x' = \dfrac{\pi}{2K'}u, & \rho' = \dfrac{\pi}{2K'}K, \quad q' = e^{-2\rho'} = e^{-\frac{\pi K}{K'}}. \end{cases}$$

On aura

$$(53)\quad \vartheta 0 = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}, \quad \vartheta_2 0 = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}, \quad \vartheta_3 0 = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}.$$

$$(54)\quad k = \left(\frac{\vartheta_2 0}{\vartheta_3 0}\right)^2, \quad k' = \left(\frac{\vartheta 0}{\vartheta_3 0}\right)^2.$$

$$(55)\quad K = \frac{\pi}{2}(\vartheta_3 0)^2, \quad K' = \frac{\pi}{2}[\vartheta_3(0, q')]^2.$$

$$(56)\quad \begin{cases} \operatorname{sn} u = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \cdot \dfrac{\vartheta_1 x}{\vartheta x}, \\ \operatorname{cn} u = \sqrt{\dfrac{k'}{k}} \cdot \dfrac{\vartheta_2 x}{\vartheta x}, \\ \operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \cdot \dfrac{\vartheta_3 x}{\vartheta x}, \\ \operatorname{tn} u = \dfrac{1}{\sqrt{k'}} \cdot \dfrac{\vartheta_1 x}{\vartheta_2 x}. \end{cases} \qquad (57)\,(*) \begin{cases} \operatorname{sn}_1 u = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \cdot \dfrac{\vartheta_2 x}{\vartheta_3 x}, \\ \operatorname{cn}_1 u = \sqrt{\dfrac{k'}{k}} \cdot \dfrac{\vartheta_1 x}{\vartheta_3 x}, \\ \operatorname{dn}_1 u = \sqrt{k'} \cdot \dfrac{\vartheta x}{\vartheta_3 x}, \\ \operatorname{tn}_1 u = \dfrac{1}{\sqrt{k'}} \cdot \dfrac{\vartheta_2 x}{\vartheta_1 x}. \end{cases}$$

§ XII.

$$(58)\quad \begin{cases} \operatorname{am} u = x + \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{Ch} 2\rho} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin 4x}{\operatorname{Ch} 4\rho} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\sin 6x}{\operatorname{Ch} 6\rho} + \ldots, \\ \dfrac{2kK}{\pi} \operatorname{sn} u = 2\left(\dfrac{\sin x}{\operatorname{Ch}\rho} + \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{Ch} 3\rho} + \dfrac{\sin 5x}{\operatorname{Ch} 5\rho} + \ldots\right), \\ \dfrac{2kK}{\pi} \operatorname{cn} u = 2\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{Ch}\rho} + \dfrac{\cos 3x}{\operatorname{Ch} 3\rho} + \dfrac{\cos 5x}{\operatorname{Ch} 5\rho} + \ldots\right), \\ \dfrac{2K}{\pi} \operatorname{dn} u = 1 + 2\left(\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{Ch} 2\rho} + \dfrac{\cos 4x}{\operatorname{Ch} 4\rho} + \dfrac{\cos 6x}{\operatorname{Ch} 6\rho} + \ldots\right), \\ \dfrac{2k'K}{\pi} \operatorname{tn} u = \operatorname{tang} x - 2q\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{Ch} 2\rho} + 2q^2\dfrac{\sin 4x}{\operatorname{Ch} 4\rho} - 2q^3\dfrac{\sin 6x}{\operatorname{Ch} 6\rho} + - \ldots, \\ \dfrac{2kK}{\pi} \operatorname{sn}_1 u = 2\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{Ch}\rho} - \dfrac{\cos 3x}{\operatorname{Ch} 3\rho} + \dfrac{\cos 5x}{\operatorname{Ch} 5\rho} - + \ldots\right), \\ \dfrac{2kK}{\pi} \operatorname{cn} u = 2\left(\dfrac{\sin x}{\operatorname{Ch}\rho} - \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{Ch} 3\rho} + \dfrac{\sin 5x}{\operatorname{Ch} 5\rho} - + \ldots\right), \end{cases}$$

(*) u se changeant en $K - u$, x se change en $\frac{\pi}{2} - x$.

(58) suite.

$$\frac{2K}{\pi}\,\mathrm{dn}_1 u = \frac{2k'K}{\pi}\frac{1}{\mathrm{dn}\,u} = 1 - 2\frac{\cos 2x}{\mathrm{Ch}\,2\rho} + 2\frac{\cos 4x}{\mathrm{Ch}\,4\rho} - 2\frac{\cos 6x}{\mathrm{Ch}\,6\rho} + - \ldots,$$

$$\frac{2k'K}{\pi}\,\mathrm{tn}_1 u = \frac{2K}{\pi}\frac{1}{\mathrm{tn}\,u} = \cot x - 2q\frac{\sin 2x}{\mathrm{Ch}\,2\rho} - 2q^2\frac{\sin 4x}{\mathrm{Ch}\,4\rho} - 2q^3\frac{\sin 6x}{\mathrm{Ch}\,6\rho} - \ldots,$$

$$\frac{2K}{\pi}\frac{1}{\mathrm{sn}\,u} = \frac{1}{\sin x} + 2q^{\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{\mathrm{Sh}\,\rho} + 2q^{\frac{3}{2}}\frac{\sin 3x}{\mathrm{Sh}\,3\rho} + 2q^{\frac{5}{2}}\frac{\sin 5x}{\mathrm{Sh}\,5\rho} + \ldots,$$

$$\frac{2k'K}{\pi}\frac{1}{\mathrm{cn}\,u} = \frac{1}{\cos x} - 2q^{\frac{1}{2}}\frac{\cos x}{\mathrm{Ch}\,\rho} + 2q^{\frac{3}{2}}\frac{\cos 3x}{\mathrm{Ch}\,3\rho} - 2q^{\frac{5}{2}}\frac{\cos 5x}{\mathrm{Ch}\,5x} + - \ldots,$$

$$\frac{2K}{\pi}\frac{1}{\mathrm{sn}_1 u} = \frac{1}{\cos x} + 2q^{\frac{1}{2}}\frac{\cos x}{\mathrm{Sh}\,\rho} - 2q^{\frac{3}{2}}\frac{\cos 3x}{\mathrm{Sh}\,3\rho} + 2q^{\frac{5}{2}}\frac{\cos 5x}{\mathrm{Sh}\,5\rho} - + \ldots,$$

$$\frac{2k'K}{\pi}\frac{1}{\mathrm{cn}_1 u} = \frac{1}{\sin x} - 2q^{\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{\mathrm{Ch}\,\rho} - 2q^{\frac{3}{2}}\frac{\sin 3x}{\mathrm{Ch}\,3\rho} - 2q^{\frac{5}{2}}\frac{\sin 5x}{\mathrm{Ch}\,5\rho} - \ldots.$$

(59)

$$\mathrm{am}\,u = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arc\,tang}\,e^{-x'} + 2q'^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{Sh}\,x'}{\mathrm{Sh}\,\rho'} - \frac{2q'^{\frac{3}{2}}}{3}\frac{\mathrm{Sh}\,3x'}{\mathrm{Sh}\,3\rho'} + \frac{2q'^{\frac{5}{2}}}{5}\frac{\mathrm{Sh}\,5x'}{\mathrm{Sh}\,5\rho'} - + \ldots$$

$$\frac{2kK'}{\pi}\,\mathrm{sn}\,u = \mathrm{Th}\,x' - 2q'\frac{\mathrm{Sh}\,2x'}{\mathrm{Sh}\,2\rho'} + 2q'^2\frac{\mathrm{Sh}\,4x'}{\mathrm{Sh}\,4\rho'} - 2q'^3\frac{\mathrm{Sh}\,6x'}{\mathrm{Sh}\,6\rho'} + - \ldots,$$

$$\frac{2kK'}{\pi}\,\mathrm{cn}\,u = \frac{1}{\mathrm{Ch}\,x'} - 2q'^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{Ch}\,x'}{\mathrm{Ch}\,\rho'} + 2q'^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{Ch}\,3x'}{\mathrm{Ch}\,3\rho'} - 2q'^{\frac{5}{2}}\frac{\mathrm{Ch}\,5x'}{\mathrm{Ch}\,5\rho'} + - \ldots,$$

$$\frac{2K'}{\pi}\,\mathrm{dn}\,u = \frac{1}{\mathrm{Ch}\,x'} + 2q'^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{Ch}\,x'}{\mathrm{Sh}\,\rho'} - 2q'^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{Ch}\,3x'}{\mathrm{Sh}\,3\rho'} + 2q'^{\frac{5}{2}}\frac{\mathrm{Ch}\,5x'}{\mathrm{Sh}\,5\rho'} - + \ldots,$$

$$\frac{2k'K'}{\pi}\,\mathrm{tn}\,u = 2\left(\frac{\mathrm{Sh}\,x'}{\mathrm{Sh}\,\rho'} + \frac{\mathrm{Sh}\,3x'}{\mathrm{Sh}\,3\rho'} + \frac{\mathrm{Sh}\,5x'}{\mathrm{Sh}\,5\rho'} + \ldots\right),$$

$$\frac{2kK'}{\pi}\,\mathrm{sn}_1 u = 1 - 2\frac{\mathrm{Ch}\,2x'}{\mathrm{Ch}\,2\rho'} + 2\frac{\mathrm{Ch}\,4x'}{\mathrm{Ch}\,4\rho'} - 2\frac{\mathrm{Ch}\,6x'}{\mathrm{Ch}\,6\rho'} + - \ldots,$$

$$\frac{2kK'}{\pi}\,\mathrm{cn}_1 u = 2\left(\frac{\mathrm{Sh}\,x'}{\mathrm{Ch}\,\rho'} - \frac{\mathrm{Sh}\,3x'}{\mathrm{Ch}\,3\rho'} + \frac{\mathrm{Sh}\,5x'}{\mathrm{Ch}\,5\rho'} - + \ldots\right),$$

$$\frac{2K'}{\pi}\,\mathrm{dn}_1 u = \frac{2k'K'}{\pi}\frac{1}{\mathrm{dn}\,u} = 2\left(\frac{\mathrm{Ch}\,x'}{\mathrm{Sh}\,\rho'} - \frac{\mathrm{Ch}\,3x'}{\mathrm{Sh}\,3\rho'} + \frac{\mathrm{Ch}\,5x'}{\mathrm{Sh}\,5\rho'} - + \ldots\right),$$

$$\frac{2k'K'}{\pi}\,\mathrm{tn}_1 u = \frac{1}{\mathrm{Sh}\,x'} - 2q'^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{Sh}\,x'}{\mathrm{Sh}\,\rho'} - 2q'^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{Sh}\,3x'}{\mathrm{Sh}\,3\rho'} - 2q'^{\frac{5}{2}}\frac{\mathrm{Sh}\,5x'}{\mathrm{Sh}\,5\rho'} - \ldots,$$

$$\frac{2K'}{\pi}\frac{1}{\mathrm{sn}\,u} = \frac{1}{\mathrm{Th}\,x'} + 2q'\frac{\mathrm{Sh}\,2x'}{\mathrm{Ch}\,2\rho'} + 2q'^2\frac{\mathrm{Sh}\,4x'}{\mathrm{Ch}\,4\rho'} + 2q'^3\frac{\mathrm{Sh}\,6x'}{\mathrm{Ch}\,6\rho'} + \ldots,$$

$$\frac{2k'K'}{\pi}\frac{1}{\mathrm{cn}\,u} = 2\left(\frac{\mathrm{Ch}\,x'}{\mathrm{Ch}\,\rho'} + \frac{\mathrm{Ch}\,3x'}{\mathrm{Ch}\,3\rho'} + \frac{\mathrm{Ch}\,5x'}{\mathrm{Ch}\,5\rho'} + \ldots\right),$$

$$\frac{2K'}{\pi}\frac{1}{\mathrm{sn}_1 u} = 1 + 2\left(\frac{\mathrm{Ch}\,2x'}{\mathrm{Ch}\,2\rho'} + \frac{\mathrm{Ch}\,4x'}{\mathrm{Ch}\,4\rho'} + \frac{\mathrm{Ch}\,6x'}{\mathrm{Ch}\,6\rho'} + \ldots\right),$$

$$\frac{2k'K'}{\pi}\frac{1}{\mathrm{cn}_1 u} = \frac{1}{\mathrm{Sh}\,x'} + 2q'^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{Sh}\,x'}{\mathrm{Ch}\,\rho'} + 2q'^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{Sh}\,3x'}{\mathrm{Ch}\,3\rho'} + 2q'^{\frac{5}{2}}\frac{\mathrm{Sh}\,5x'}{\mathrm{Ch}\,5\rho'} + \ldots.$$

(60)
$$\mathrm{tang}\frac{1}{2}(\mathrm{am}\,u - x) = \frac{2q^2\,\mathrm{Sh}\,2\rho\sin 2x - 2q^8\,\mathrm{Sh}\,4\rho\sin 4x + 2q^{18}\,\mathrm{Sh}\,6\rho\sin 6x - + \ldots}{1 - 2q^2\,\mathrm{Ch}\,2\rho\cos 2x + 2q^8\,\mathrm{Ch}\,4\rho\cos 4x - 2q^{18}\,\mathrm{Ch}\,6\rho\cos 6x + - \ldots}.$$

§ XIII.

Calcul numérique des intégrales elliptiques de première espèce.

(61)
$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} = k'\sqrt{1 + \frac{k^2}{k'^2}\cos^2\varphi} = \cos\varphi\sqrt{1 - k'^2\,\mathrm{tang}^2\varphi}.$$

1° k voisin de zéro.

(62)
$$6 = \frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}, \quad \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{k'}} = \frac{1+\xi}{1-\xi}, \quad \xi = \frac{\Delta\varphi - \sqrt{k'}}{\Delta\varphi + \sqrt{k'}},$$
$$q = 6 + 26^5 + 156^9 + 1506^{13} + \ldots = \frac{k^2}{16} + \frac{k^4}{32} + \frac{21\,k^6}{1024} + \ldots,$$
$$\frac{2K}{\pi} = (\vartheta_3 0)^2 = (1 + 26)^2(1 + 46^4 + 366^8 + \ldots),$$
$$\rho = \frac{1}{2}\log\text{nat}\,\frac{1}{q}, \quad K' = \frac{2K}{\pi}\rho = \rho(1+26)^2(1+46^4+\ldots) = \rho(1+4q+\ldots),$$
$$\cos 2x = \frac{\xi}{26}[1 - 46^4(1 + 56^4)\sin^2 2x].$$

En résolvant cette équation (par approximations successives, lorsque 6^4 n'est pas négligeable), on a

$$F(\varphi) = \frac{K}{\pi}\cdot 2x.$$

2° k voisin de l'unité.

(63)
$$6' = \frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}, \quad \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{k}.\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{1+k'^2\tang^2\varphi} = \frac{1+\xi'}{1-\xi'}, \quad \xi' = \frac{\Delta\varphi - \sqrt{k}.\cos\varphi}{\Delta\varphi + \sqrt{k}.\cos\varphi}.$$
$$q' = 6' + 26'^5 + 156'^9 + \ldots = \frac{k'^2}{16} + \frac{k'^4}{32} + \frac{21k'^6}{1024} + \ldots,$$
$$\frac{2K'}{\pi} = [\vartheta_3(0, q')]^2 = (1 + 26')^2(1 + 46'^4 + \ldots),$$
$$\rho' = \frac{1}{2}\log\text{nat}\,\frac{1}{q'}, \quad K = \frac{2K'}{\pi}\rho' = \rho'(1+26')^2(1+46'^4+\ldots) = \rho'(1+4q'+\ldots),$$
$$\text{Ch}\,2x' = \frac{\xi'}{26'}[1 + 46'^4(1 + 56'^4)\,\text{Sh}^2 2x'].$$

En résolvant cette équation (par approximations successives, lorsque $6'^4$ n'est pas négligeable), on a

$$F(\varphi) = \frac{K'}{\pi}\cdot 2x'.$$

§ XIV.

Intégrales elliptiques de seconde espèce.

(64)
$$\begin{cases} \text{el}\,u = E(\varphi) = \int_0^u \text{dn}^2 u.du = \int_0^\varphi \Delta\varphi.d\varphi \;(*), \\ E = \text{el}\,K = E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^K \text{dn}^2 u.du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi.d\varphi \;(**). \end{cases}$$

Si le module est représenté par un autre signe que la lettre k, on le met en

(*) $= E(u)$ (Jacobi).
(**) $= E^1(k) = E^1$ (Legendre).

évidence,

(65)
$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{el}(u,\lambda) &= \mathrm{E}(\varphi,\lambda) = \int_0^{\varphi} \Delta(\varphi,\lambda).d\varphi,\\ \mathrm{E}(\lambda) &= \mathrm{E}\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\varphi,\lambda).d\varphi. \end{aligned}\right.$$

Pour le module complémentaire k',

(66)
$$\mathrm{E}' = \mathrm{el}(\mathrm{K}', k') = \mathrm{E}\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) = \int_0^{\mathrm{K}'} \mathrm{dn}'^2 u.du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\varphi, k')\,d\varphi.$$

(67)
$$\mathrm{el}(-u) = -\mathrm{el}\,u, \qquad \mathrm{el}(0) = 0.$$

(68)
$$\left\{\begin{aligned} &\text{Pour } k = 0, \quad \mathrm{el}\,u = u.\\ &\text{Pour } k = 1, \quad \mathrm{el}\,u = \sin u. \end{aligned}\right.$$

(69)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}} &= 2\left(\frac{\pi}{2\mathrm{K}}\right)^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{Ch}^2 2\rho} + \frac{1}{\mathrm{Ch}^2 4\rho} + \frac{1}{\mathrm{Ch}^2 6\rho} + \ldots\right)\\ &= \frac{1+k'^2}{2} - 4\left(\frac{\pi}{2\mathrm{K}}\right)^2\left(\frac{1}{\mathrm{Sh}^2 2\rho} + \frac{1}{\mathrm{Sh}^2 6\rho} + \frac{1}{\mathrm{Sh}^2 10\rho} + \ldots\right). \end{aligned}\right.$$

(70)
$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}} + \frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{K}'} = 1 + \frac{\pi}{2\mathrm{KK}'}.$$

(71)
$$\mathrm{el}\,u = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}u + \frac{\pi}{2\mathrm{K}}\cdot \mathrm{D}_x \log \vartheta x \ (*).$$

(72)
$$\mathrm{el}(u+v) = \mathrm{el}\,u + \mathrm{el}\,v - k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v).$$

(73)
$$\mathrm{el}_1 u = \mathrm{el}(\mathrm{K}-u) = \mathrm{E} - \mathrm{el}\,u + k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}_1 u.$$

(74)
$$\mathrm{el}(u + 2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}') = \mathrm{el}\,u + 2m\mathrm{E} + 2ni(\mathrm{K}' - \mathrm{E}').$$

(75)
$$\frac{1}{i}\mathrm{el}(ui) + \mathrm{el}(u, k') = u + \frac{\mathrm{tn}'u}{\mathrm{dn}'u}.$$

(76)
$$\left\{\begin{aligned} k^2\int_0^u \mathrm{sn}^2 u.du &= k^2\int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi = u - \mathrm{el}\,u,\\ k^2\int_0^u \mathrm{cn}^2 u.du &= k^2\int_0^{\varphi} \frac{\cos^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi = \mathrm{el}\,u - k'^2 u. \end{aligned}\right.$$

(*) $\frac{\pi}{2\mathrm{K}}\mathrm{D}_x \log\vartheta x = \mathrm{D}_u \log\Theta(u) = \mathrm{Z}(u)$ (JACOBI).

§ XV.

Développements en séries des intégrales de première et de seconde espèce.

Soient, pour p entier, $p! = 1.2.3\ldots p$,

$$(77)\quad \left\{ \begin{aligned} & [n]_p = \frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{1.2\ldots p}, \qquad (n)_p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}, \\ & \text{d'où} \\ & \left[\frac{1}{2}\right]_p = \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p}, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)_p = \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}\left[\frac{1}{2}\right]_p, \\ & \frac{(n+p)_p}{(n+2p)_p} = \frac{[(n+p)!]^2}{n!\,(n+2p)!} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{(n+p+1)(n+p+2)\ldots(n+2p)}, \end{aligned} \right.$$

$$(78)\qquad k = \sin\theta, \quad x = \frac{1-k'}{1+k'} = \operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}.$$

On a

$$(79)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2K}{\pi} &= 1 + \left[\frac{1}{2}\right]_1^2 k^2 + \left[\frac{1}{2}\right]_2^2 k^4 + \left[\frac{1}{2}\right]_3^2 k^6 + \ldots \\ &= \frac{2}{1+k'}\left\{1 + \left[\frac{1}{2}\right]_1^2 x^2 + \left[\frac{1}{2}\right]_2^2 x^4 + \left[\frac{1}{2}\right]_3^2 x^6 + \ldots\right\}. \\ \frac{2E}{\pi} &= 1 - \left[\frac{1}{2}\right]_1^2 \frac{k^2}{1} - \left[\frac{1}{2}\right]_2^2 \frac{k^4}{3} - \left[\frac{1}{2}\right]_3^2 \frac{k^6}{5} - \ldots \\ &= \frac{1+k'}{2}\left\{1 + \left[\frac{1}{2}\right]_1^2 \frac{x^2}{1^2} + \left[\frac{1}{2}\right]_2^2 \frac{x^4}{3^2} + \left[\frac{1}{2}\right]_3^2 \frac{x^6}{5^2} + \ldots\right\}. \end{aligned} \right.$$

$$(80)\quad \left\{ \begin{aligned} F(\varphi) &= \frac{2K}{\pi}\varphi + A_1 \sin 2\varphi + A_2 \sin 4\varphi + A_3 \sin 6\varphi + \ldots, \\ E(\varphi) &= \frac{2E}{\pi}\varphi + B_1 \sin 2\varphi + B_2 \sin 4\varphi + B_3 \sin 6\varphi + \ldots, \\ A_p &= \frac{(-1)^p}{p} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(n+p)_p}{(n+2p)_p}\left[\frac{1}{2}\right]_{n+p}^2 k^{2n+2p} \\ &= \frac{(-1)^p}{p} \cdot \frac{2}{1+k'} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[\frac{1}{2}\right]_n \left[\frac{1}{2}\right]_{n+p} x^{2n+p}, \\ B_p &= \frac{(-1)^{p-1}}{p} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(n+p)_p}{(n+2p)_p}\left[\frac{1}{2}\right]_{n+p}^2 \frac{k^{2n+2p}}{2n+2p-1} \\ &= \frac{1}{p} \cdot \frac{1+k'}{2} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_{n+p} x^{2n+p}. \end{aligned} \right.$$

§ XVI.

$$(81)\quad \begin{cases} a_0 = \frac{2K}{\pi} - 1, \quad a_1 = a_0 - \left[\frac{1}{2}\right]_1^2 k^2, \quad a_2 = a_1 - \left[\frac{1}{2}\right]_2^2 k^4, \\ \qquad a_3 = a_2 - \left[\frac{1}{2}\right]_3^2 k^6, \ldots; \\ b_0 = 1 - \frac{2E}{\pi}, \quad b_1 = b_0 - \left[\frac{1}{2}\right]_1^2 \frac{k^2}{1}, \quad b_2 = b_1 - \left[\frac{1}{2}\right]_2^2 \frac{k^4}{3}, \\ \qquad b_3 = b_2 - \left[\frac{1}{2}\right]_3^2 \frac{k^6}{5}, \ldots . \end{cases}$$

1° k voisin de zéro. — On calcule K et E par les formules (79).

$$(82)\quad \begin{cases} K' = \frac{2K}{\pi} \log\left(\frac{4}{k}\right) - 2\left(\frac{a_0}{1.2} + \frac{a_1}{3.4} + \frac{a_2}{5.6} + \ldots\right), \\ E' = \frac{2(K-E)}{\pi} \log\left(\frac{4}{k}\right) + 1 - 2\left(\frac{b_0}{1.2} + \frac{b_1}{3.4} + \frac{b_2}{5.6} + \ldots\right). \end{cases}$$

Pour φ voisin de zéro,

$$(83)\quad \begin{cases} F(\varphi) = \frac{2K}{\pi}\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\left(a_0 + \frac{2}{3}a_1\sin^2\varphi + \frac{2.4}{3.5}a_2\sin^4\varphi + \ldots\right), \\ E(\varphi) = \frac{2E}{\pi}\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\left(b_0 + \frac{2}{3}b_1\sin^2\varphi + \frac{2.4}{3.5}b_2\sin^4\varphi + \ldots\right). \end{cases}$$

Pour φ voisin de $\frac{\pi}{2}$, on calculera $K - u$ au lieu de u, en remplaçant

$$\sin\varphi = \operatorname{sn} u, \qquad \cos\varphi = \operatorname{cn} u, \qquad \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tn} u$$

par

$$\sin\varphi_1 = \operatorname{sn}_1 u = \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \cos\varphi_1 = \operatorname{cn}_1 u = \frac{k'\sin\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \operatorname{tang}\varphi_1 = \operatorname{tn}_1 u = \frac{\cot\varphi}{k'}.$$

Ensuite on calculera $\operatorname{el}(K - u) = E(\varphi_1)$, et l'on en tirera

$$(84)\qquad E(\varphi) = E - E(\varphi_1) + k^2 \sin\varphi \sin\varphi_1.$$

2° k voisin de l'unité. — En changeant k en k', a en a', b en b', les formules (79), (81) et (82) donneront K', E', K, E; puis on aura, pour φ voisin de o,

$$(85)\quad \begin{cases} F(\varphi) = \frac{2K'}{\pi} \log\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ \qquad - \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\cos\varphi}\left(a'_0 - \frac{2}{3}a'_1\operatorname{tang}^2\varphi + \frac{2.4}{3.5}a'_2\operatorname{tang}^4\varphi - + \ldots\right), \\ E(\varphi) = \frac{2E'}{\pi} \log\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ \qquad + \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\cos\varphi}\left(b'_0 - \frac{2}{3}b'_1\operatorname{tang}^2\varphi + \frac{2.4}{3.5}b'_2\operatorname{tang}^4\varphi - + \ldots\right). \end{cases}$$

Pour φ voisin de $\frac{\pi}{2}$, on agira comme dans le cas précédent.

§ XVII.

Calcul des intégrales elliptiques au moyen de la transformation modulaire de Landen.

On calcule la suite des *nombres modulaires*

$$(86)\quad \begin{cases} m = 1, & m_1 = \dfrac{m+n}{2}, & m_2 = \dfrac{m_1+n_1}{2}, & m_3 = \dfrac{m_2+n_2}{2}, \ldots, \\ n = k', & n_1 = \sqrt{mn}, & n_2 = \sqrt{m_1 n_1}, & n_3 = \sqrt{m_2 n_2}, \ldots, \end{cases}$$

jusqu'à ce que l'on ait sensiblement

$$m_p = n_p,$$

et soit

$$(87)\quad \eta = \lim m_p = \lim n_p.$$

On aura d'abord

$$(88)\quad \begin{cases} K = \dfrac{\pi}{2\eta}, \\ q = \dfrac{k^2}{16k'}\left(\dfrac{n_1}{m_1}\right)^{\frac{2}{2}}\left(\dfrac{n_2}{m_2}\right)^{\frac{2}{4}}\left(\dfrac{n_3}{m_3}\right)^{\frac{2}{8}}, \ldots, \\ K' = \dfrac{1}{2\eta \log \operatorname{nat} q} = \dfrac{M}{2\eta \log \operatorname{déc} q}. \end{cases} \quad (M = \text{mod. des log décimaux}).$$

Soit maintenant

$$(89)\quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{k}{4}, \quad \lambda_1 = \dfrac{\lambda^2}{m_1}, \quad \lambda_2 = \dfrac{\lambda_1^2}{m_2}, \quad \lambda_3 = \dfrac{\lambda_2^2}{m_3}, \ldots, \\ A = -\dfrac{1}{\eta}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 2\varphi \, d\varphi}{\Delta\varphi} = \dfrac{1}{\lambda^2}(2\lambda_1^2 + 4\lambda_2^2 + 8\lambda_3^2 + \ldots). \end{cases}$$

On a

$$(90)\quad \frac{E}{K} = \frac{1 + k'^2}{2} - \frac{k^2}{2} A.$$

§ XVIII.

Pour calculer l'intégrale de première espèce $F(\varphi) = u$, correspondante à une amplitude quelconque φ, soit

$$(91)\quad \begin{cases} \nabla = \sqrt{m^2 \cos^2\varphi + n^2 \sin^2\varphi}, \\ \nabla_1 = \sqrt{m_1^2 \cos^2\varphi_1 + n_1^2 \sin^2\varphi_1}, \\ \nabla_2 = \sqrt{m_2^2 \cos^2\varphi_2 + n_2^2 \sin^2\varphi_2}, \\ \text{etc.}, \end{cases}$$

$m, n, m_1, n_1, \ldots$ étant les nombres modulaires du numéro précédent.

Posons, pour abréger,

$$(92)\quad \frac{\nabla_p}{m_p} = \mu_p, \quad \frac{n_p}{\nabla_p} = \nu_p,$$

et calculons, à l'aide des logarithmes d'addition, la suite des nombres

$$(93)\quad \begin{cases} \mu_1 = \sqrt{\dfrac{m\mu}{m_1}}\sqrt{\dfrac{1+\nu}{1+\mu}}, & \nu_1 = \sqrt{\dfrac{m\nu}{m_1}}\sqrt{\dfrac{1+\mu}{1+\nu}}, \\ \mu_2 = \sqrt{\dfrac{m_1\mu_1}{m_2}}\sqrt{\dfrac{1+\nu_1}{1+\mu_1}}, & \nu_2 = \sqrt{\dfrac{m_1\nu_1}{m_2}}\sqrt{\dfrac{1+\mu_1}{1+\nu_1}}, \\ \text{etc.}, & \text{etc.}; \end{cases}$$

à la limite on aura

$$(94)\quad \begin{cases} \lim \nabla_p = \lim m_p = \lim n_p = \eta, \\ \lim \mu_p = \lim \nu_p = 1. \end{cases}$$

Il viendra alors, en posant toujours $\dfrac{\pi}{2K}u = \eta u = x$,

$$(95)\quad \operatorname{tang} x = \operatorname{tang} \eta u = \eta . \mu_1 \mu_2 \mu_3 \ldots \operatorname{tang} \varphi.$$

Connaissant x, on aura

$$(96)\quad u = \frac{x}{\eta} = K \cdot \frac{2x}{\pi} = K \times \text{la valeur de } x \text{ en parties du quadrant.}$$

Les amplitudes successives $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sont liées par les équations

$$(97)\quad \begin{cases} \sin\varphi_1 = 2\dfrac{m_1}{m}\dfrac{\sin\varphi}{1+\mu}, & \cos\varphi_1 = \dfrac{2\cos\varphi}{(1+\mu)\mu_1}, & \operatorname{tang}\varphi_1 = \dfrac{m_1\mu_1}{m}\operatorname{tang}\varphi, \\ \sin\varphi_2 = 2\dfrac{m_2}{m_1}\dfrac{\sin\varphi_1}{1+\mu_1}, & \cos\varphi_2 = \dfrac{2\cos\varphi_1}{(1+\mu_1)\mu_2}, & \operatorname{tang}\varphi_2 = \dfrac{m_2\mu_2}{m_1}\operatorname{tang}\varphi, \\ \text{etc.}, & \text{etc.}, & \text{etc.}; \end{cases}$$

d'où il résulte

$$(98)\quad \frac{d\varphi}{\nabla} = \frac{d\varphi_1}{\nabla_1} = \frac{d\varphi_2}{\nabla_2} = \ldots.$$

On trouve ensuite

$$(99)\quad \begin{cases} E(\varphi) - \dfrac{E}{K}\cdot F(\varphi) = Z(u) \\ \quad = 8\left(\dfrac{\lambda^2}{m_1}\cos\varphi\sin\varphi_1 + \dfrac{2\lambda_1^2}{m_2}\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \dfrac{4\lambda_2^2}{m_3}\cos\varphi_2\sin\varphi_3 + \ldots\right), \\ \dfrac{\vartheta x}{\vartheta 0} = \dfrac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \dfrac{2}{1+\mu}\left(\dfrac{2}{1+\mu_1}\right)^2\left(\dfrac{2}{1+\mu_2}\right)^4\left(\dfrac{2}{1+\mu_3}\right)^8 \ldots \end{cases}$$

§ XIX.

Autrement, on détermine les amplitudes $\varphi_{\circ}, \varphi_{\circ\circ}, \varphi_{\circ\circ\circ}, \ldots$ par les équations

$$(100)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}(\varphi_{\circ} - \varphi\ ) = \dfrac{n}{m}\operatorname{tang}\varphi, \\ \operatorname{tang}(\varphi_{\circ\circ} - \varphi_{\circ}) = \dfrac{n_1}{m_1}\operatorname{tang}\varphi_{\circ}, \\ \operatorname{tang}(\varphi_{\circ\circ\circ} - \varphi_{\circ\circ}) = \dfrac{n_2}{m_2}\operatorname{tang}\varphi_{\circ\circ}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Les angles $\varphi, \dfrac{\varphi_{\circ}}{2}, \dfrac{\varphi_{\circ\circ}}{4}, \dfrac{\varphi_{\circ\circ\circ}}{8}, \ldots$ convergent vers la limite $x = \eta u = \dfrac{\pi}{2K}F(\varphi)$.

Ces angles satisfont à la relation

(101) $$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{2}\frac{d\varphi_{\prime}}{\Delta\varphi_{\prime}} = \frac{1}{4}\frac{d\varphi_{\prime\prime}}{\Delta\varphi_{\prime\prime}} = \ldots,$$

les modules qui entrent respectivement dans $\Delta\varphi$, $\Delta\varphi_{\prime}$, $\Delta\varphi_{\prime\prime}, \ldots$ étant donnés par les formules

(102) $$k' = \frac{n}{m}, \quad k'_{\prime} = \frac{n_1}{m_1}, \quad k'_{\prime\prime} = \frac{n_2}{m_2}, \ldots.$$

On a ensuite

(103) $$\left\{\begin{aligned} &Z(u) = 4(\lambda_1 \sin\varphi_{\prime} + \lambda_2 \sin\varphi_{\prime\prime} + \lambda_3 \sin\varphi_{\prime\prime\prime} + \ldots), \\ &\frac{\vartheta x}{\vartheta 0} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \left(\frac{m}{\Delta\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m_1}{\Delta\varphi_{\prime}}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{m_2}{\Delta\varphi_{\prime\prime}}\right)^{\frac{1}{8}} \ldots \\ &\quad = \sqrt[2]{\operatorname{séc}(2\varphi - \varphi_{\prime})} \,.\, \sqrt[4]{\operatorname{séc}(2\varphi_{\prime} - \varphi_{\prime\prime})} \,.\, \sqrt[8]{\operatorname{séc}(2\varphi_{\prime\prime} - \varphi_{\prime\prime\prime})} \ldots. \end{aligned}\right.$$

§ XX.

Intégrales elliptiques de troisième espèce. Paramètre = n.

(104) $$\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi).\Delta\varphi} = \int_0^u \frac{du}{1 + n\,\mathrm{sn}^2 u}.$$

(105) $$\left\{\begin{aligned} &\int_0^u \frac{\mathrm{sn}^2 u\,du}{1 + n\,\mathrm{sn}^2 u} = \frac{u}{n} - \frac{1}{n}\Pi(\varphi, n), \\ &\int_0^u \frac{\mathrm{cn}^2 u\,du}{1 + n\,\mathrm{sn}^2 u} = -\frac{u}{n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\Pi(\varphi, n), \\ &\int_0^u \frac{\mathrm{dn}^2 u\,du}{1 + n\,\mathrm{sn}^2 u} = -\frac{k^2 u}{n} + \left(1 + \frac{k^2}{n}\right)\Pi(\varphi, n). \end{aligned}\right.$$

Considérons d'abord le cas du paramètre n réel.

Quatre classes : 1° $-\infty < n < -1$,
2° $-1 < n < -k^2$,
3° $-k^2 < n < 0$,
4° $0 < n < +\infty$,

1° et 3°, paramètre logarithmique; 2° et 4°, paramètre circulaire.

§ XXI.

1° $$-\infty < n < -1, \quad n = -\frac{1}{\mathrm{sn}^2 a}.$$

$$x = \frac{\pi}{2K}u, \quad \alpha = \frac{\pi}{2K}a, \quad X = \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_1(x+\alpha)}{\vartheta_1(x-\alpha)},$$
$$K - u = u_1, \quad K - a = a_1, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{sn}\,u_1 = \mathrm{sn}_1 u, \text{ etc.}$$

On peut toujours ramener l'argument a du paramètre à être $< \frac{1}{2}K$, et par suite α à être $< \frac{\pi}{4}$, en prenant l'un ou l'autre des deux systèmes de formules

suivants (A) ou (B) :

(106) (A)

$$\begin{cases}
{}'\mathfrak{C}(u, a_1) = \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \displaystyle\int \frac{du}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}\,\Pi\left(\varphi, -\frac{1}{\operatorname{sn}^2 a}\right) \\
\qquad = -x.D_\alpha \log \vartheta\alpha + X, \\
{}'\mathfrak{S}(u, a_1) = \dfrac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}\displaystyle\int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u\, du}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u} = -x.D_\alpha \log \vartheta_1\alpha + X, \\
{}'\mathfrak{P}(u, a_1) = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \displaystyle\int_0^u \frac{\operatorname{cn}^2 u\, du}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u} = -x.D_\alpha \log \vartheta_2\alpha + X, \\
{}'\mathfrak{D}(u, a_1) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a}\displaystyle\int_0^u \frac{\operatorname{dn}^2 u\, du}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u} = -x.D_\alpha \log \vartheta_3\alpha + X;
\end{cases}$$

(106) (B)

$$\begin{cases}
{}'\mathfrak{D}(u_1, a) = \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \displaystyle\int_u^K \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} = \frac{\operatorname{sn}_1 a \operatorname{cn}_1 a}{\operatorname{dn}_1 a}\int_0^u \frac{\operatorname{dn}^2 u\, du}{\operatorname{sn}_1^2 a - \operatorname{sn}^2 u} \\
\qquad = \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\cdot D_\alpha \log \vartheta\alpha + X, \\
{}'\mathfrak{P}(u_1, a) = \dfrac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}\displaystyle\int_u^K \frac{\operatorname{sn}^2 u\, du}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} = \operatorname{dn}_1 a \operatorname{tn}_1 a \int_0^u \frac{\operatorname{cn}^2 u\, du}{\operatorname{sn}_1^2 a - \operatorname{sn}^2 u} \\
\qquad = \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\cdot D_\alpha \log \vartheta_1\alpha + X, \\
{}'\mathfrak{S}(u_1, a) = \operatorname{dn} a \operatorname{tn} a \displaystyle\int_u^K \frac{\operatorname{cn}^2 u\, du}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} = \frac{\operatorname{dn}_1 a}{\operatorname{tn}_1 a}\int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u\, du}{\operatorname{sn}_1^2 a - \operatorname{sn}^2 u} \\
\qquad = \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\cdot D_\alpha \log \vartheta_2\alpha + X, \\
{}'\mathfrak{C}(u_1, a) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a}\displaystyle\int_u^K \frac{\operatorname{dn}^2 u\, du}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} = \operatorname{sn}_1 a \operatorname{cn}_1 a \operatorname{dn}_1 a \int_0^u \frac{du}{\operatorname{sn}_1^2 a - \operatorname{sn}^2 u} \\
\qquad = \dfrac{\operatorname{dn}_1 a}{\operatorname{tn}_1 a}\,\Pi\left(\operatorname{am}_1 u, -\dfrac{1}{\operatorname{sn}_1^2 a}\right) = \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\cdot D_\alpha \log \vartheta_3\alpha + X.
\end{cases}$$

§ XXII.

2° $-1 < n < -k^2.$

(107) (A)

$$\begin{cases}
\text{Pour} \quad -1 < n < -k, \quad n = -\operatorname{dn}'^2 a = -\dfrac{k^2}{\operatorname{dn}_1'^2 a}. \\
\alpha_1 = \rho - \alpha, \qquad X_1 = \dfrac{1}{2i}\log\dfrac{\vartheta_3(x - \alpha_1 i)}{\vartheta_3(x + \alpha_1 i)}. \\
{}'C(u, a) = \dfrac{k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{cn}' a}{\operatorname{dn}' a}\displaystyle\int_0^u \frac{du}{1 - \operatorname{dn}'^2 a \operatorname{sn}^2 u} = x.D_{\alpha_1} \log \vartheta_2(\alpha_1 i) - X_1, \\
{}'S(u, a) = k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{cn}' a \operatorname{dn}' a \displaystyle\int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u\, du}{1 - \operatorname{dn}'^2 a \operatorname{sn}^2 u} = x.D_{\alpha_1} \log \vartheta_3(\alpha_1 i) - X_1, \\
{}'P(u, a) = -\dfrac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a}\displaystyle\int_0^u \frac{\operatorname{cn}^2 u\, du}{1 - \operatorname{dn}'^2 a \operatorname{sn}^2 u} = x.D_{\alpha_1} \log \vartheta(\alpha_1 i) - X_1, \\
{}'D(u, a) = \operatorname{dn}' a \operatorname{tn}' a \displaystyle\int_0^u \frac{\operatorname{dn}^2 u\, du}{1 - \operatorname{dn}'^2 a \operatorname{sn}^2 u} = x.D_{\alpha_1} \log \vartheta_1(\alpha_1 i) - X_1,
\end{cases}$$

(107) (B)
$$\left\{\begin{aligned}
&\text{Pour}\qquad -k < n < -k^2, \qquad n = -\frac{k^2}{\mathrm{dn}'^2 a} = -\mathrm{dn}_1'^2 a,\\
&\qquad d_1' = \mathrm{K}' - a, \qquad \mathrm{X} = \frac{1}{2i}\log\frac{\vartheta_3(x-\alpha i)}{\vartheta_3(x+\alpha i)}.\\
&{}'\mathrm{C}(u, d_1') = \frac{k^2\,\mathrm{sn}_1'a\,\mathrm{cn}_1'a}{\mathrm{dn}_1'a}\int_0^u \frac{du}{1-\mathrm{dn}_1'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = x.\mathrm{D}_\alpha \log\vartheta_2(\alpha i) - \mathrm{X},\\
&{}'\mathrm{S}(u, d_1') = k^2\,\mathrm{sn}_1'a\,\mathrm{cn}_1'a\,\mathrm{dn}_1'a\int_0^u \frac{\mathrm{sn}^2 u\,du}{1-\mathrm{dn}_1'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = x.\mathrm{D}_\alpha \log\vartheta_3(\alpha i) - \mathrm{X},\\
&{}'\mathrm{P}(u, d_1') = -\frac{\mathrm{dn}_1'a}{\mathrm{tn}_1'a}\int_0^u \frac{\mathrm{cn}^2 u\,du}{1-\mathrm{dn}_1'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = x.\mathrm{D}_\alpha \log\vartheta(\alpha i) - \mathrm{X},\\
&{}'\mathrm{D}(u, d_1') = \mathrm{dn}_1'a\,\mathrm{tn}_1'a\int_0^u \frac{\mathrm{dn}^2 u\,du}{1-\mathrm{dn}_1'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = x.\mathrm{D}_\alpha \log\vartheta_1(\alpha i) - \mathrm{X}.
\end{aligned}\right.$$

Les formules (B) ne diffèrent des formules (A) que par le changement de a en $d_1' = \mathrm{K}' - a$, et de $\alpha_1 = \rho - \alpha$ en α.

§ XXIII.

3° $\qquad -k^2 < n < 0, \quad n = -k^2\,\mathrm{sn}^2 a, \quad \mathrm{X} = \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(x+\alpha)}{\vartheta(x-\alpha)}.$

(108)
$$\left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{P}(u, a) = \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\int_0^u \frac{du}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = x.\mathrm{D}_\alpha \log\vartheta_1\alpha - \mathrm{X},\\
&\mathfrak{S}(u, a) = k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\int_0^u \frac{\mathrm{sn}^2 u\,du}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = x.\mathrm{D}_\alpha \log\vartheta\,\alpha - \mathrm{X}\,(^*),\\
&\mathfrak{C}(u, a) = \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}\int_0^u \frac{\mathrm{cn}^2 u\,du}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = -x.\mathrm{D}_\alpha \log\vartheta_3\alpha + \mathrm{X},\\
&\mathfrak{D}(u, a) = \mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,a\int_0^u \frac{\mathrm{dn}^2 u\,du}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = -x.\mathrm{D}_\alpha \log\vartheta_2\alpha + \mathrm{X}.
\end{aligned}\right.$$

§ XXIV.

4° $\qquad n > 0.$

(109) (A)
$$\left\{\begin{aligned}
&\text{Pour}\quad 0 < n < k, \qquad n = -k^2\,\mathrm{sn}^2(ai) = k^2\,\mathrm{tn}'^2 a = \frac{1}{\mathrm{tn}_1'^2 a},\\
&\qquad \mathrm{X} = \frac{1}{2i}\log\frac{\vartheta(x+\alpha i)}{\vartheta(x-\alpha i)}.\\
&\mathrm{P}(u, a) = \frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{cn}'a}\int_0^u \frac{du}{1+k^2\,\mathrm{tn}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = x.\mathrm{D}_\alpha \log\vartheta_1(\alpha i) + \mathrm{X},\\
&\mathrm{S}(u, a) = \frac{k^2\,\mathrm{dn}'a\,\mathrm{tn}'a}{\mathrm{cn}'^2 a}\int_0^u \frac{\mathrm{sn}^2 u\,du}{1+k^2\,\mathrm{tn}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = -x.\mathrm{D}_\alpha \log\vartheta(\alpha i) - \mathrm{X},\\
&\mathrm{C}(u, a) = \frac{k^2\,\mathrm{tn}'a}{\mathrm{dn}'a}\int_0^u \frac{\mathrm{cn}^2 u\,du}{1+k^2\,\mathrm{tn}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = x.\mathrm{D}_\alpha \log\vartheta_3(\alpha i) + \mathrm{X},\\
&\mathrm{D}(u, a) = \mathrm{dn}'a\,\mathrm{tn}'a\int_0^u \frac{\mathrm{dn}^2 u\,du}{1+k^2\,\mathrm{tn}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = x.\mathrm{D}_\alpha \log\vartheta_2(\alpha i) + \mathrm{X}.
\end{aligned}\right.$$

(*) $= \Pi(u, a)$ (JACOBI).

(109) (B) Pour $k < n < \infty$, $n = -\frac{1}{\mathrm{sn}^2(ai)} = \frac{1}{\mathrm{tn}'^2 a} = k^2 \mathrm{tn}_1'^2 a$,

on changera partout, dans les formules (A), a en $a'_1 = \mathrm{K}' - a$, et par suite α en $\alpha_1 = \rho - \alpha$.

§ XXV.

$$(110)\begin{cases} \mathfrak{P}(u, a) - \mathfrak{S}(u, a) = \frac{\mathrm{dn}\, a}{\mathrm{tn}\, a}\cdot u, & \mathrm{P}(u, a) + \mathrm{S}(u, a) = \frac{\mathrm{dn}' a}{\mathrm{sn}' a\, \mathrm{cn}' a}\cdot u, \\ \mathfrak{C}(u, a) + \mathfrak{S}(u, a) = k^2 \mathrm{sn}\, a\, \mathrm{sn}_1 a.u, & \mathrm{C}(u, a) + \mathrm{S}(u, a) = \frac{k^2 \mathrm{tn}' a}{\mathrm{dn}' a}\cdot u, \\ \mathfrak{D}(u, a) + \mathfrak{S}(u, a) = \mathrm{dn}\, a\, \mathrm{tn}\, a.u, & \mathrm{D}(u, a) + \mathrm{S}(u, a) = k'^2 \mathrm{sn}' a\, \mathrm{sn}_1' a.u. \end{cases}$$

Pour avoir les formules analogues relatives aux autres intégrales P, C, D, changez les signes des seconds membres:

$$(111)\begin{cases} \left.\begin{aligned} \mathfrak{S}(u, ai) &= i.\, \mathrm{S}(u, a), \\ '\mathfrak{S}(u, ai) &= i.\, '\mathrm{S}(u, a), \end{aligned}\right\} \text{pour P;} \\ \left.\begin{aligned} \mathfrak{S}(ui, a) &= -i.\, '\mathrm{S}(u, a, k'), \\ '\mathfrak{S}(ui, a) &= -i.\, \mathrm{S}(u, a, k'), \end{aligned}\right\} \text{pour C et D;} \\ \left.\begin{aligned} '\mathfrak{S}(u, a) &= \mathfrak{S}(ui, ai, k'), \\ '\mathrm{S}(u, a) &= \mathrm{S}(ui, ai, k'), \end{aligned}\right\} \text{pour P, C et D.} \end{cases}$$

$$(112)\begin{cases} '\mathrm{S}(u, a) + \mathrm{C}(u_1, a'_1) = {}'\mathrm{S}(\mathrm{K}, a) = \mathrm{C}(\mathrm{K}, a'_1), \\ u_1 = \mathrm{K} - u, \quad a'_1 = \mathrm{K}' - a. \end{cases}$$

$$(113)\begin{cases} \mathfrak{P}(u, \mathrm{K}) = \mathfrak{S}(u, \mathrm{K}) = \mathfrak{C}(u, \mathrm{K}) = 0, \quad \mathfrak{D}(u, \mathrm{K}) = \infty; \\ \mathrm{P}(u, \mathrm{K}') = \mathrm{C}(u, \mathrm{K}') = \mathrm{D}(u, \mathrm{K}') = \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{S}(u, \mathrm{K}') = \infty. \end{cases}$$

$$(114)\begin{cases} \mathfrak{S}(\mathrm{K}, a) = \mathrm{K}.\mathrm{el}\, a - \mathrm{E}.a, \\ \mathrm{S}(\mathrm{K}, a) = (\mathrm{K} - \mathrm{E})a + \mathrm{K}(\mathrm{tn}' a\, \mathrm{dn}' a - \mathrm{el}' a). \end{cases}$$

$$(115)\quad \mathfrak{S}(a, u) - \mathfrak{S}(u, a) = a.\mathrm{el}\, u - u.\mathrm{el}\, a.$$

§ XXVI.

Des intégrales de troisième espèce à paramètre imaginaire.

Soit le paramètre imaginaire $n = \mu e^{\nu i}$, et posons, pour abréger,

$$(116)\begin{cases} 2\, \Pi_1 = \Pi(\varphi, \mu e^{\nu i}) + \Pi(\varphi, \mu e^{-\nu i}), \\ 2i\Pi_2 = \Pi(\varphi, \mu e^{\nu i}) - \Pi(\varphi, \mu e^{-\nu i}). \end{cases}$$

Π_1 et Π_2 seront donnés par les équations

$$(117)\begin{cases} \mathrm{A}_1\Pi_1 + \mathrm{B}_1\Pi_2 = -\frac{1}{g_1}\mathrm{F}(\varphi) - \mathrm{C}_1\Pi(\varphi, m_1) + \int_0^{z_1} \frac{dz}{1 + h_1 z^2}, \\ \mathrm{A}_2\Pi_1 + \mathrm{B}_2\Pi_2 = -\frac{1}{g_2}\mathrm{F}(\varphi) - \mathrm{C}_2\Pi(\varphi, m_2) + \int_0^{z_2} \frac{dz}{1 + h_2 z^2}, \end{cases}$$

g_1 et g_2 étant les deux racines de l'équation

$$(118)\qquad (\mu^2 + 2k^2\mu\cos\nu + k^2)g^2 + 2k'^2\mu^2 g = (\mu^2 + 2\mu\cos\nu + k^2)\mu^2,$$

et z_1, h_1, $m_1, \ldots$, z_2, h_2, $m_2, \ldots$ étant les deux systèmes, correspondants à ces deux racines, des valeurs des quantités z, h, $m, \ldots$, données par les équations

$$(119)\left\{\begin{array}{l} z = \dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+g\sin^2\varphi)\Delta\varphi}, \\ m = -\dfrac{k^2}{\mu^2}g^2, \\ h = -\dfrac{1}{k^2k'^2}(k^2+m)(k^4+2k^2\mu\cos\nu+\mu^2), \\ Cg(\mu^2 - 2m\mu\cos\nu + m^2) = g[m^2 + (2+g)m + (1+2m)k^2] - \mu^2, \\ A = (1-C)g - 1, \\ Bg\mu\sin\nu = g^2 + (2+\mu\cos\nu+m)g + \mu\cos\nu + Cg(\mu\cos\nu - m). \end{array}\right.$$

Les deux valeurs de g sont réelles et inégales tant que $n = \mu e^{\nu i}$ est imaginaire. Soit $g_1 < g_2$. On a alors

$$-1 < m_1 < -k^2 < m_2 < 0, \qquad h_1 > 0 > h_2.$$

Donc $\Pi(\varphi, m_1)$ appartient à la 2e classe (P), et $\Pi(\varphi, m_2)$ à la 3e classe ($\mathfrak{P}$). De plus,

$$(120)\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{z_1}\frac{dz}{1+h_1z^2} = \frac{1}{\sqrt{h_1}}\operatorname{arc\,tang} z_1 = \frac{1}{\sqrt{h_1}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+g_1\sin^2\varphi)\Delta\varphi} \\ \displaystyle\int_0^{z_2}\frac{dz}{1+h_2z^2} = \frac{1}{\sqrt{-h_2}}\operatorname{Arg\,Th} z_2 = \frac{1}{\sqrt{-h_2}}\operatorname{Arg\,Th}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+g_2\sin^2\varphi)\Delta\varphi} \\ \displaystyle\qquad = \frac{1}{2\sqrt{-h_2}}\log\frac{1+z_2}{1-z_2}. \end{array}\right.$$

Dans le cas particulier où $\mu^2 + 2\mu\cos\nu + k^2 = 0$, et par suite $g_2 = 0$, on a $m_2 = 0$, $h_2 = -\mu^2$, et la deuxième équation (117) se trouve remplacée par l'équation

$$(121)\qquad A_2\Pi_1 + B_2\Pi_2 = -\frac{k^2}{\mu^2}F(\varphi) + \frac{1}{\mu}\operatorname{Arg\,Th}\frac{\mu\cos\varphi\sin\varphi}{\Delta\varphi}.$$

---

§ XXVII.

Réduction de la différentielle $\dfrac{dy}{\sqrt{Ay^4+By^3+Cy^2+Dy+E}}$ à la forme normale $\dfrac{1}{m}\dfrac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \dfrac{1}{m}\dfrac{d\varphi}{\Delta\varphi}$.

Désignons par $\pm R$ le polynôme en y sous le radical ; on peut toujours supposer $A = \pm 1$. On distingue divers cas, selon la nature des racines de l'équation $R = 0$.

I. *Quatre racines réelles.*

$$R = (y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)(y-a_4), \qquad (a_1 < a_2 < a_3 < a_4).$$

Posons, pour abréger,

$$a_{12} = a_2 - a_1, \quad a_{13} = a_3 - a_1, \quad a_{14} = a_4 - a_1, \text{ etc.}$$

On aura

$$\frac{dy}{\sqrt{\pm \mathrm{R}}} = \frac{1}{m}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

1° Signe supérieur : $\dfrac{dy}{\sqrt{+\mathrm{R}}}$.

(A). **Transformation du premier ordre.**

$$m' = \sqrt{a_{13}a_{24}}, \quad m'' = \sqrt{a_{12}a_{34}}, \quad m = \frac{m'+m''}{2}, \quad k = \frac{m'-m''}{m'+m''} (*).$$

(α) $$\text{Lim.}\left\{\begin{matrix} y = a_4, & \pm\infty, & a_1 \\ \varphi = -\frac{\pi}{2}, & 0, & +\frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\}.$$

$$n' = \sqrt{a_{12}a_{13}}, \quad n'' = \sqrt{a_{23}a_{24}}, \quad n = \frac{n'+n''}{n'-n''},$$

$$\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{n'}{n''}\frac{y-a_4}{y-a_1}, \quad y = \frac{a_4+a_1}{2} + \frac{a_4-a_1}{2}\cdot\frac{n-\sin\varphi}{1-n\sin\varphi}.$$

(β) $$\text{Lim.}\left\{\begin{matrix} y = a_2, & a_3 \\ \varphi = -\frac{\pi}{2}, & +\frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\}.$$

$$n' = \sqrt{a_{12}a_{14}}, \quad n'' = \sqrt{a_{13}a_{24}}, \quad n = \frac{n''-n'}{n''+n'},$$

$$\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{n''}{n'}\frac{y-a_2}{a_3-y}, \quad y = \frac{a_3+a_2}{2} + \frac{a_3-a_2}{2}\cdot\frac{\sin\varphi-n}{1-n\sin\varphi}.$$

(B). **Transformation du second ordre.**

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{a_{13}a_{24}}, \quad k = \sqrt{\frac{a_{14}a_{23}}{a_{13}a_{24}}}, \quad k' = \sqrt{\frac{a_{12}a_{34}}{a_{13}a_{24}}}.$$

(α) $$\text{Lim.}\left\{\begin{matrix} y = a_4, & \pm\infty, & a_1 \\ \varphi = 0, & \ldots, & \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\}.$$

$$\sin^2\varphi = \frac{a_{13}}{a_{14}}\cdot\frac{y-a_4}{y-a_3}, \quad \cos^2\varphi = \frac{a_{34}}{a_{14}}\cdot\frac{y-a_1}{y-a_3}, \quad y = \frac{a_4 a_{13} - a_3 a_{14}\sin^2\varphi}{a_{13} - a_{14}\sin^2\varphi}.$$

(β) $$\text{Lim.}\left\{\begin{matrix} y = a_2, & a_3 \\ \varphi = 0, & \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\}.$$

$$\sin^2\varphi = \frac{a_{13}}{a_{23}}\cdot\frac{y-a_2}{y-a_1}, \quad \cos^2\varphi = \frac{a_{12}}{a_{23}}\cdot\frac{a_3-y}{y-a_1}, \quad y = \frac{a_2 a_{13} - a_1 a_{23}\sin^2\varphi}{a_{13} - a_{23}\sin^2\varphi}.$$

(*) On en tire $\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \frac{m''}{m'}$.

2° Signe inférieur : $\dfrac{dy}{\sqrt{-R}}$.

(A). Transformation du premier ordre.

$$m' = \sqrt{a_{13}a_{24}}, \quad m'' = \sqrt{a_{14}a_{23}}, \quad m = \frac{m'+m''}{2}, \quad k = \frac{m'-m''}{m'+m''}.$$

(α)

$$\text{Lim.}\left\{\begin{matrix} y = a_1, & a_2 \\ \varphi = -\frac{\pi}{2}, & +\frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\}.$$

$$n' = \sqrt{a_{12}a_{13}}, \quad n'' = \sqrt{a_{23}a_{24}}, \quad n = \frac{n''-n'}{n''+n'},$$

$$\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{n''}{n'}\cdot\frac{y-a_1}{a_2-y}, \quad y = \frac{a_2+a_1}{2} + \frac{a_2-a_1}{2}\cdot\frac{\sin\varphi - n}{1-n\sin\varphi}.$$

(β)

$$\text{Lim.}\left\{\begin{matrix} y = a_3, & a_4 \\ \varphi = -\frac{\pi}{2}, & +\frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\}.$$

$$n' = \sqrt{a_{13}a_{23}}, \quad n'' = \sqrt{a_{14}a_{24}}, \quad n = \frac{n''-n'}{n''+n'},$$

$$\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{n''}{n'}\cdot\frac{y-a_3}{a_4-y}, \quad y = \frac{a_4+a_3}{2} + \frac{a_4-a_3}{2}\cdot\frac{\sin\varphi - n}{1-n\sin\varphi}.$$

(B). Transformation du second ordre.

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{a_{13}a_{24}}, \quad k^2 = \frac{a_{12}a_{34}}{a_{13}a_{24}}, \quad k'^2 = \frac{a_{14}a_{23}}{a_{13}a_{24}}.$$

(α)

$$\text{Lim.}\left\{\begin{matrix} y = a_1, & a_2 \\ \varphi = 0, & \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\}.$$

$$\sin^2\varphi = \frac{a_{24}}{a_{12}}\cdot\frac{y-a_1}{a_4-y}, \quad \cos^2\varphi = \frac{a_{14}}{a_{12}}\cdot\frac{a_2-y}{a_4-y}, \quad y = \frac{a_1a_{24}+a_4a_{12}\sin^2\varphi}{a_{24}+a_{12}\sin^2\varphi}.$$

(β)

$$\text{Lim.}\left\{\begin{matrix} y = a_3, & a_4 \\ \varphi = 0, & \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\}.$$

$$\sin^2\varphi = \frac{a_{24}}{a_{34}}\cdot\frac{y-a_3}{y-a_2}, \quad \cos^2\varphi = \frac{a_{23}}{a_{34}}\cdot\frac{a_4-y}{y-a_2}, \quad y = \frac{a_3a_{24}-a_2a_{34}\sin^2\varphi}{a_{24}-a_{34}\sin^2\varphi}.$$

II. *Trois racines réelles.*

$$R = (y-a_1)(y-a_2)(y-a_3), \quad (a_1 < a_2 < a_3),$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\pm R}} = \frac{1}{m}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

1° Signe supérieur : $\dfrac{dy}{\sqrt{+\mathrm{R}}}$.

(A). Transformation du premier ordre.

$$m' = \sqrt{a_{13}}, \quad m'' = \sqrt{a_{23}}, \quad m = \frac{m'+m''}{2}, \quad k = \frac{m'-m''}{m'+m''}.$$

(α) $$\text{Lim.} \left\{ \begin{array}{ll} y = a_1, & a_2 \\ \varphi = -\frac{\pi}{2}, & +\frac{\pi}{2} \end{array} \right\}.$$

$$\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{m'}{m''} \cdot \frac{a_2 - y}{y - a_1}, \quad y = \frac{a_2 + a_1}{2} + \frac{a_2 - a_1}{2} \cdot \frac{\sin\varphi + k}{1 + k\sin\varphi}.$$

(β) $$\text{Lim.} \left\{ \begin{array}{ll} y = a_3, & \infty \\ \varphi = -\frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}.$$

$$\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = m'm'' \frac{1}{y - a_3}, \quad y = a_3 + m'm'' \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}.$$

(B). Transformation du second ordre.

$$k^2 = \frac{a_{12}}{a_{13}}, \quad k'^2 = \frac{a_{23}}{a_{13}}.$$

(α) $$\text{Lim.} \left\{ \begin{array}{ll} y = a_1, & a_2 \\ \varphi = 0, & \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}.$$

$$\sin^2\varphi = \frac{y - a_1}{a_{12}}, \quad \cos^2\varphi = \frac{a_2 - y}{a_{12}}, \quad y = a_1 + a_{12}\sin^2\varphi.$$

(β) $$\text{Lim.} \left\{ \begin{array}{ll} y = a_3, & \infty \\ \varphi = 0, & \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}.$$

$$\sin^2\varphi = \frac{y - a_3}{y - a_2}, \quad \cos^2\varphi = \frac{a_{23}}{y - a_2}, \quad y = \frac{a_3 - a_2\sin^2\varphi}{1 - \sin^2\varphi}.$$

2° Signe inférieur : $\dfrac{dy}{\sqrt{-\mathrm{R}}}$.

(A). Transformation du premier ordre.

$$m' = \sqrt{a_{13}}, \quad m'' = \sqrt{a_{12}}, \quad m = \frac{m'+m''}{2}, \quad k = \frac{m'-m''}{m'+m''}.$$

(α) $$\text{Lim.} \left\{ \begin{array}{ll} y = -\infty, & a_1 \\ \varphi = -\frac{\pi}{2}, & +\frac{\pi}{2} \end{array} \right\}.$$

$$\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{m'm''}(a_1 - y), \quad y = a_1 - m'm'' \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}.$$

(β) $$\text{Lim.} \left\{ \begin{array}{ll} y = a_2, & a_3 \\ \varphi = -\frac{\pi}{2}, & +\frac{\pi}{2} \end{array} \right\}.$$

$$\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{m''}{m'} \cdot \frac{a_3 - y}{y - a_2}, \quad y = \frac{a_3 + a_2}{2} + \frac{a_3 - a_2}{2} \cdot \frac{\sin\varphi - k}{1 + k\sin\varphi}.$$

(B). Transformation du second ordre.

$$k^2 = \frac{a_{23}}{a_{13}}, \qquad k'^2 = \frac{a_{12}}{a_{13}}.$$

$$(\alpha) \qquad \text{Lim.} \left\{ \begin{array}{ll} y = -\infty, & a_1 \\ \varphi = 0, & \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}.$$

$$\sin^2\varphi = \frac{a_{13}}{a_3 - y}, \qquad \cos^2\varphi = \frac{a_1 - y}{a_3 - y}, \qquad y = a_3 - \frac{a_{13}}{\sin^2\varphi}.$$

$$(\beta) \qquad \text{Lim.} \left\{ \begin{array}{ll} y = a_2, & a_3 \\ \varphi = 0, & \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}.$$

$$\sin^2\varphi = \frac{a_{13}}{a_{23}} \cdot \frac{y - a_2}{y - a_1}, \qquad \cos^2\varphi = \frac{a_{12}}{a_{23}} \cdot \frac{a_3 - y}{y - a_1}, \qquad y = \frac{a_2 a_{13} - a_1 a_{23} \sin^2\varphi}{a_{13} - a_{23} \sin^2\varphi}.$$

III. *Deux racines réelles et deux imaginaires.*

$$R = (y - a_1)(y - a_2)[(y - b)^2 + c^2], \qquad (a_1 < a_2, \ c > 0).$$

$$\operatorname{tang}\theta_1 = \frac{a_1 - b}{c}, \qquad \operatorname{tang}\theta_2 = \frac{a_2 - b}{c}, \qquad \theta = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \qquad \Theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2},$$

$$k = \sin\theta, \qquad n = \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\Theta.$$

$$\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \cdot \frac{a_2 - y}{y - a_1}, \qquad y = \frac{a_2 + a_1}{2} - \frac{a_2 - a_1}{2} \cdot \frac{n - \cos\varphi}{1 - n\cos\varphi}.$$

$$1^\circ \text{ Signe supérieur : Lim.} \left\{ \begin{array}{lll} y = a_2, & \pm\infty, & a_1 \\ \varphi = 0, & \operatorname{arc}\cos\frac{1}{n}, & \pi \end{array} \right\}.$$

θ_1 obtus, θ_2 aigu,

$$\frac{dy}{\sqrt{+R}} = \frac{\sqrt{-\cos\theta_1 \cos\theta_2}}{c} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

$$2^\circ \text{ Signe inférieur : Lim.} \left\{ \begin{array}{ll} y = a_1, & a_2 \\ \varphi = 0, & \pi \end{array} \right\}.$$

θ_1 et θ_2 aigus,

$$\frac{dy}{\sqrt{-R}} = \frac{\sqrt{\cos\theta_1 \cos\theta_2}}{c} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

IV. *Une racine réelle et deux imaginaires.*

$$R = (y - a)[(y - b)^2 + c^2], \qquad (c > 0).$$

$$\operatorname{tang}\theta_1 = \frac{a - b}{c}, \qquad k = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_1}{2}\right),$$

$$\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos\theta_1}{c}(a - y), \qquad y = a - \frac{c}{\cos\theta_1} \cdot \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}.$$

1° Signe supérieur : $\text{Lim.}\left\{\begin{matrix} y = a, & +\infty \\ \varphi = \pi, & 0 \end{matrix}\right\}.$

θ_1 obtus,

$$\frac{dy}{\sqrt{+R}} = -\sqrt{\frac{-\cos\theta_1}{c}} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

2° Signe inférieur : $\text{Lim.}\left\{\begin{matrix} y = -\infty, & a \\ \varphi = \pi, & 0 \end{matrix}\right\}.$

θ_1 aigu,

$$\frac{dy}{\sqrt{-R}} = -\sqrt{\frac{\cos\theta_1}{c}} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

V. *Quatre racines imaginaires.*

$$R = [(y - b_1)^2 + c_1^2]\,[(y - b_2)^2 + c_2^2], \quad (b_1 < b_2,\ c_1 \text{ et } c_2 \text{ positifs}).$$

$$\operatorname{tang}\theta_1 = \frac{c_2 + c_1}{b_2 - b_1}, \quad \operatorname{tang}\theta_2 = \frac{c_2 - c_1}{b_2 - b_1}, \quad \operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2} = \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}, \quad k = \sin\theta,$$

$$\theta_1,\ \theta_2 \text{ et } \frac{1}{2}\theta \text{ aigus.} \qquad \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \theta', \qquad \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \theta''.$$

$$\frac{dy}{\sqrt{R}} = \sqrt{\frac{\cos\theta}{c_1 c_2}} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

1° $\quad \text{Lim.}\left\{\begin{matrix} y = -\infty & b_2, & +\infty \\ \varphi = \frac{\pi}{2} - \theta', & -\theta', & \frac{\pi}{2} - \theta' \end{matrix}\right\}.$

$$\operatorname{tang}(\varphi + \theta') = \frac{y - b_2}{c_2}, \quad y = b_2 + c_2 \frac{\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\theta'}{1 - \operatorname{tang}\theta' \operatorname{tang}\varphi}.$$

2° $\quad \text{Lim.}\left\{\begin{matrix} y = -\infty, & b_1, & +\infty \\ \varphi = \theta'', & \frac{\pi}{2} - \theta'', & \theta'' \end{matrix}\right\}.$

$$\operatorname{tang}(\varphi + \theta'') = \frac{c_1}{b_1 - y}, \quad y = b_1 - c_1 \frac{1 - \operatorname{tang}\theta'' \operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\theta''}.$$

---

§ XXVIII.

Réduction de la différentielle $F(y, \sqrt{R})\,dy$ aux différentielles elliptiques, F désignant une fonction rationnelle, et R un polynôme du troisième ou du quatrième degré en y.

On commencera, à l'aide d'une transformation connue, par mettre $F(y, \sqrt{R})\,dy$ sous la forme

$$\left[\varphi(y) + \frac{\chi(y)}{\sqrt{R}}\right] dy,$$

φ et χ désignant des fonctions rationnelles.

Occupons-nous du second terme $\dfrac{\chi(y)\,dy}{\sqrt{R}}$.

La transformation du second ordre ramène immédiatement cette expression à la forme

$$f(\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

La transformation du premier ordre la ramène à la forme

$$\psi(x)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

x étant une des trois quantités $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\tan\!g\varphi$. Par un artifice connu, on décomposera la fonction $\psi(x)$ en deux autres, l'une paire, l'autre impaire. Celle-ci, multipliée par $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$, donne lieu à une différentielle qui s'intègre par arcs de cercles et par logarithmes, en posant

pour $x = \sin\varphi$, $t = \cos\varphi$, d'où $f(x^2)\frac{x\,d\varphi}{\Delta\varphi} = -F(t^2)\frac{dt}{\sqrt{k'^2+k^2t^2}}$;

pour $x = \cos\varphi$, $t = \sin\varphi$, d'où $f(x^2)\frac{x\,d\varphi}{\Delta\varphi} = F(t^2)\frac{dt}{\sqrt{1-k^2t^2}}$;

pour $x = \tan\!g\varphi$, $t = \cos\varphi$, d'où $f(x^2)\frac{x\,d\varphi}{\Delta\varphi} = -F\left(\frac{1-t^2}{t^2}\right)\frac{dt}{t\sqrt{k'^2+k^2t^2}}$.

La fonction paire de x peut toujours se mettre sous la forme $f(\sin^2\varphi)$, f désignant une fonction rationnelle. On est donc ramené, dans tous les cas, à une différentielle de la forme

$$f(\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Par la décomposition en fractions simples, cette fonction donnera lieu à des termes des formes suivantes :

$$\frac{A\,d\varphi}{\Delta\varphi},\quad \frac{A\,d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta\varphi},\quad \frac{A\sin^{2p}\varphi.d\varphi}{\Delta\varphi},\quad \frac{A\,d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^q\Delta\varphi}.$$

Dans les deux dernières, on peut réduire les exposants p et q à l'unité.

1° Soit

$$V_q = \int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^q\Delta\varphi}.$$

Par la formule de réduction

$$\begin{gathered}(2q-2)\left(1+\frac{1+k^2}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)V_q-(2q-3)\left[1+\frac{2(1+k^2)}{n}+\frac{3k^2}{n^2}\right]V_{q-1}\\ +(2q-4)\left(\frac{1+k^2}{n}+\frac{3k^2}{n^2}\right)V_{q-2}-(2q-5)\frac{k^2}{n^2}V_{q-3}\\ =\frac{\sin\varphi\cos\varphi\Delta\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^{q-1}},\end{gathered}$$

on abaissera l'exposant q jusqu'à la valeur 1, et l'intégrale proposée V_q dépendra alors des intégrales

$$V_1 = \int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta\varphi} = \Pi(\varphi, n),$$

$$V_0 = \int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F(\varphi),$$

et des intégrales V_{-1}, V_{-2}, qui se ramènent à des intégrales de la forme

$$\int\frac{\sin^{2p}\varphi.d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

2° Soit

$$X_p = \int \frac{\sin^{2p}\varphi . d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

La formule de réduction

$$(2p-1)k^2 X_p - (2p-2)(1+k^2) X_{p-1} + (2p-3) X_{p-2} = \sin^{2p-3}\varphi \cos\varphi \Delta\varphi$$

permettra d'abaisser p jusqu'à la valeur 1, ce qui fera dépendre X_p des intégrales

$$X_0 = \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F(\varphi),$$

$$X_1 = \int \frac{\sin^2\varphi . d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{k^2} F(\varphi) - \frac{1}{k^2} E(\varphi).$$

On ramènera donc ainsi l'intégrale proposée aux trois intégrales elliptiques

$$F(\varphi), \quad E(\varphi), \quad \Pi(\varphi, n).$$

APPLICATIONS NUMÉRIQUES

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Nous allons maintenant développer la solution numérique de quelques questions de Géométrie et de Mécanique qui se ramènent aux fonctions elliptiques. On verra que nos petites Tables, lors même qu'elles ne fourniront pas une approximation suffisante, seront néanmoins d'un grand secours, en permettant d'ébaucher rapidement les calculs, et de passer aisément des premières valeurs approchées à des valeurs plus exactes.

I. — Aire de l'ellipsoïde.

Soient a, b, c les demi-axes d'un ellipsoïde, et

$$a < b < c.$$

Si l'on pose (*)

$$k = \frac{c}{b}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{c},$$

l'aire totale de l'ellipsoïde sera donnée par la formule

$$S = 2\pi a^2 + 2\pi ab\,[\cot\varphi\, F(\varphi) + \operatorname{tang}\varphi\, E(\varphi)].$$

Appliquons cette formule au cas où l'on donne

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3.$$

On trouve alors

$$k = \sqrt{\frac{27}{32}}, \quad k' = \sqrt{\frac{5}{32}}; \quad \theta = 0^q{,}741292 = 66^\circ{,}7163,$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \sqrt{8}, \quad \varphi = 0^q{,}783653 = 70^\circ{,}5288.$$

Les petites Tables de la page 58 donnent, pour ces valeurs de θ et de φ,

$$\log F(\varphi) = 0{,}1992, \quad \log E(\varphi) = 0{,}0002,$$

(*) LEGENDRE, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 357.

d'où l'on conclut

$$S = 48,86.$$

Pour obtenir une valeur plus approchée, en se servant des formules (63), (69), (71), (23), on disposera le calcul comme il suit :

$\sqrt{k}$	$\bar{1},98155$
$\frac{1}{2\epsilon'}$ (Table IV).....	$1,6730$
$\log\frac{1}{\epsilon'} = \log\frac{1}{q'} = 2M\rho' =$	$1,9740$
$2\epsilon'$..............	$\bar{2},3270$
$1+2\epsilon'$ (Table III)..	$0,00913$
$\frac{2K'}{\pi} = (1+2\epsilon')^2$...	$0,01826$
$2M\rho'$.............	$0,29535$
$\frac{1}{2M}$..............	$0,06119$
K................	$0,37480$
$M^2\pi^2$.............	$0,26987$
$2M\rho = \frac{M^2\pi^2}{2M\rho'}$.....	$\bar{1},97451$
$2M\rho =$	$0,94300$
$\frac{\pi}{K}$...............	$0,1223$
$\frac{1}{\mathrm{Sh}\,2\rho}$.............	$\bar{1},3637$
$\frac{\pi}{K.\mathrm{Sh}\,2\rho} = \alpha$.......	$\bar{1},4860$
α^2...............	$\bar{2},9740$
$\frac{1+k'^2}{2} = \frac{37}{64}$ =	$0,57812$
$-\alpha^2$ =	$-0,09376$
$\frac{E}{K} =$	$0,48436$

$\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi} = \frac{3}{2}$...	$0,17609$
$\sqrt{k}$.......	$\bar{1},98155$
$\frac{1+\xi'}{1-\xi'}$.....	$0,19454$
ξ' (Table IV).	$\bar{1},3430$
$\frac{1}{2\epsilon'}$........	$1,6730$
$\mathrm{Ch}\,2x'$......	$1,0160$
$2x' = 3,0302$.	$0,48147$
$\frac{K'}{\pi}$.........	$\bar{1},71723$
$F(\varphi) = u$...	$0,19870$
$\frac{E}{K}$.........	$\bar{1},68517$
$\frac{E}{K}u$........	$\bar{1},88387$
$-x'$......	$-0,18047$
K........	$0,37480$
$-\frac{x'}{K}$.....	$-\bar{1},80567$
$\frac{\pi}{2K'}$.......	$\bar{1},98174$
$\mathrm{Th}\,x'$.......	$\bar{1},95801$
$\frac{\pi}{2K'}\mathrm{Th}\,x'$...	$\bar{1},93975$

$\frac{\pi}{2K'}$.......	$\bar{1},981$
$2q'$.......	$\bar{2},327$
$\mathrm{Sh}\,2x'$.....	$1,014$
$\frac{1}{\mathrm{Sh}\,2\rho'}$.....	$\bar{2},327$
β.........	$\bar{3},649$
$\frac{E}{K}u$ =	$0,76537$
$-\frac{x'}{K}$ =	$-0,63925$
$\frac{\pi}{2K'}\mathrm{Th}\,x'$ =	$0,87046$
β =	$0,00446$
$E(\varphi) = \mathrm{el}\,u$ =	$1,00104$
$2\pi ab = 4\pi$.	$1,09921$
$\cot\varphi$......	$\bar{1},54846$
$F(\varphi)$......	$0,19870$
(1)........	$0,84637$
$2\pi ab$ tang φ.	$1,55075$
$E(\varphi)$......	$0,00045$
(2).......	$1,55120$
$2\pi a^2 = 2\pi$ =	$6,283$
(1) =	$7,020$
(2) =	$35,579$
$S =$	$48,882$

On voit que la valeur donnée par nos petites Tables était déjà fort approchée.

II. — Longueur de la ligne géodésique d'un sphéroïde de révolution.

Soient $2a$ l'axe équatorial, $2b$ l'axe polaire, $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ l'excentricité d'un sphéroïde aplati, dont le méridien est déterminé par les équations

$$x = a \cos\omega, \quad y = b \sin\omega.$$

La latitude λ sera donnée par l'une des formules

$$(1) \qquad \operatorname{tang}\lambda = \frac{a}{b}\operatorname{tang}\omega, \quad \operatorname{tang}(\lambda - \omega) = \frac{6 \sin\omega\cos\omega}{1 + 6\sin^2\omega},$$

6 étant l'*aplatissement mécanique* $\frac{a-b}{b}$.

Si l'on désigne par ψ l'*azimut* d'une ligne géodésique du sphéroïde, c'est-à-dire l'angle sous lequel cette ligne coupe le méridien, on aura la relation

$$(2) \qquad \cos\omega \sin\psi = \cos\gamma,$$

γ étant un angle constant pour chaque ligne géodésique.

En calculant maintenant l'angle auxiliaire φ par la formule

$$(3) \qquad \cos\varphi \sin\gamma = \sin\omega,$$

la longueur d'un arc de ligne géodésique, comptée à partir du méridien que cette ligne coupe à angles droits, et pour lequel on a

$$\omega = \gamma, \quad \varphi = 0,$$

sera donnée par la formule (*)

$$(4) \qquad s = \frac{ae\sin\gamma}{k} \cdot \mathrm{E}(\varphi),$$

et la différence des longitudes des deux extrémités de l'arc par la formule

$$(5) \qquad \mathrm{L} = \frac{k}{e\sin\gamma\cos\gamma}\,\Pi(\varphi, \operatorname{tang}^2\gamma) - ke\cot\gamma.\mathrm{F}(\varphi),$$

le module k des intégrales elliptiques étant déterminé par les relations

$$(6) \qquad k = \sin\theta, \quad \operatorname{tang}\theta = \frac{ae\sin\gamma}{b}.$$

Pour calculer la formule (5), posons

$$\operatorname{tang}\chi = \frac{\operatorname{tang}\gamma}{k}, \quad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\alpha = \mathrm{F}(\chi, k').$$

Si l'on applique la première formule (109), où l'on a

$$\frac{\Delta(\chi, k')}{\sin\chi\cos\chi} = \frac{k}{e\sin\gamma\cos\gamma},$$

(*) Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 361.

la formule (5) deviendra, en posant $x = \frac{\pi}{2K} F(\varphi)$,

$$(7) \qquad L = \left[\frac{\pi}{2K} \cdot D_\alpha \log \vartheta_1(\alpha i) - k e \cot \gamma\right] \cdot F(\varphi) + \frac{1}{2i} \log \frac{\vartheta(x + \alpha i)}{\vartheta(x - \alpha i)}.$$

Considérons le sphéroïde terrestre, pour lequel on a

$$\log \frac{a}{b} = 0{,}0014542, \qquad \log e = \bar{2}{,}9122051, \qquad \log 6 = \bar{3}{,}52556,$$

et proposons-nous, par exemple, de calculer où aboutirait l'extrémité d'un arc de 5000 kilomètres, partant d'un point pour lequel $\omega = \omega_1 = 45°$, ce qui correspond à la latitude $\lambda_1 = 45° 5' 45'', 33$, et faisant en ce point un angle $\psi_1 = 45°$ avec la direction nord du méridien.

On conclut d'abord, de ces données,

$$\cos\gamma = \cos\omega_1 \sin\psi_1 = \frac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad \gamma = 60°.$$

On obtiendra maintenant une première approximation du problème en négligeant l'aplatissement terrestre, ce qui donne, par la résolution d'un triangle sphérique dont on connaît l'angle ψ_1 et les deux côtés $\frac{\pi}{2} - \lambda_1$ et $s = 45°$,

$$\lambda_2 = 58° 37' 37'', 66, \qquad L_2 - L_1 = 73° 49' 33'', 61.$$

Si l'on calcule, d'autre part, l'angle du mériden initial avec celui qui est coupé à angles droits par la ligne géodésique, considérée comme un arc de grand cercle, on trouve

$$\cos L = \frac{\tang \omega_1}{\tang \gamma} = \cot 60°, \quad \text{d'où} \quad L = 54° 16' < L_2 - L_1.$$

Donc le point le plus boréal de la ligne géodésique se trouve entre les deux extrémités de l'arc cherché, ce qui montre que cet arc est égal à la *somme* des distances s_1, s_2 du point le plus boréal aux deux extrémités.

D'après cela, en désignant par les indices 1 et 2 les quantités relatives aux deux extrémités de notre arc, nous aurons, pour calculer φ_2, l'équation

$$(8) \qquad s = \frac{ae \sin\gamma}{k} [E(\varphi_1) + E(\varphi_2)].$$

Ensuite on aura la différence des longitudes $L_2 - L_1$, en faisant la *somme* des valeurs du second membre de la formule (7) relatives aux valeurs φ_1 et φ_2 de l'amplitude φ.

Nous allons maintenant ébaucher les calculs de ces formules au moyen de nos petites Tables, ce qui aura pour avantage de préparer les approximations successives que peuvent exiger les calculs faits avec un plus grand nombre de figures au moyen des grandes Tables logarithmiques ou des Tables de Legendre.

On conclut des données du problème

$$\theta = 0^q{,}04511720 = 4°{,}060548, \qquad \log k = \bar{2}{,}8500984, \qquad \log k' = \bar{1}{,}9989085,$$
$$\varphi_1 = 0^q{,}39182654 = 35°{,}264389, \qquad \chi = 0^q{,}97398786 = 87°{,}658907.$$

On a ensuite

s	$3,69897$
$\frac{1}{ae}$	$\bar{3},28315$
coséc γ	$0,06247$
k	$\bar{2},85010$
	$\bar{1},89469$
Nombre	$= 0,7847$
$-\mathrm{E}(\varphi_1)$	$= -0,6153$
$\mathrm{E}(\varphi_2)$	$= 0,1694$
φ_2	$= 0^g,1078$
$\cos\varphi_2$	$\bar{1},9937$
$\sin\gamma$	$\bar{1},9375$
$\sin\omega_2$	$\bar{1},9312$
$\cos\omega_2$	$\bar{1},7170$
β	$\bar{3},5256$
$\beta\sin\omega_2\cos\omega_2$	$\bar{3},1738$
$1+\beta\sin^2\omega_2$	$0,0011$
$\tang(\lambda_2-\omega_2)$	$\bar{3},1727$
$\lambda_2-\omega_2$	$= 0^g,0009$
ω_2	$= 0,6510$
λ_2	$= 0^g,6519$
	$= 58°40'$

$\mathrm{F}(\varphi_1)$	$\bar{1},7893$
$\mathrm{F}(\varphi_2)$	$\bar{1},2288$
K	$0,1967$
$\frac{2}{\pi}x_1$	$\bar{1},5926$
$\frac{2}{\pi}x_2$	$\bar{1},0321$
$1+\frac{x_2}{x_1}$	$0,1055$
$\frac{2}{\pi}(x_1+x_2)$	$\bar{1},6981$
$\mathrm{F}(\chi, k')$	$0,5429$
M	$\bar{1},6378$
$\frac{\pi}{2\mathrm{K}}$	$\bar{1},9994$
$\mathrm{M}\alpha$	$0,1801$
q	$\bar{4},4972$
$2\mathrm{M}\rho = \log \text{vulg} \frac{1}{q}$	$= 3,5028$
$\mathrm{M}\alpha$	$= 1,5139$
$\mathrm{M}(2\rho-\alpha)$	$= 1,9889$
$\mathrm{M}(2\rho-2\alpha)$	$= 0,4750$
$\mathrm{Sh}(2\rho-2\alpha)$	$0,122$
Coséch α	$\bar{2},787$
Coséch $(2\rho-\alpha)$	$\bar{2},312$
$\mathrm{D}_\alpha \log \vartheta_1\alpha - 1$	$\bar{3},221$

$\mathrm{D}_\alpha \log \vartheta_1\alpha$	$0,0007$
$\frac{2}{\pi}(x_1+x_2)$	$\bar{1},6981$
(1)	$\bar{1},6988$
$-ke\cot\gamma$	$-\bar{3},5237$
$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}$	$0,0005$
$\frac{2}{\pi}(x_1+x_2)$	$\bar{1},6981$
(2)	$-\bar{3},2223$
q	$\bar{4},4972$
$2\mathrm{M}\alpha$	$3,0278$
$2x_1$	$= 0^g,7827$
$2x_2$	$= 0^g,2153$
$\sin 2x_1$	$\bar{1},9742$
$2q\,\mathrm{Sh}\,2\alpha$	$\bar{1},5250$
$\sin 2x_2$	$\bar{1},5209$
$\cos 2x_1$	$\bar{1},5247$
$-2q\,\mathrm{Ch}\,2\alpha$	$-\bar{1},5250$
$\cos 2x_2$	$\bar{1},9746$
$2q\,\mathrm{Sh}\,2\alpha\sin 2x_1$	$\bar{1},4992$
$(1-2q\,\mathrm{Ch}\,2\alpha\cos 2x_1)^{-1}$	$0,0517$
$2q\,\mathrm{Sh}\,2\alpha\sin 2x_2$	$\bar{1},0459$
$(1-2q\,\mathrm{Ch}\,2\alpha\cos 2x_2)^{-1}$	$0,1649$

$\tang \mathrm{X}_1$	$\bar{1},5509$
$\tang \mathrm{X}_2$	$\bar{1},2108$
(1)	$0^g,4998$
(2)	$-0,0017$
X_1	$0,2175$
X_2	$0,1025$
$\mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1$	$= 0^g,8181$
	$= 73°38'$

En faisant le calcul avec une plus grande approximation, on aurait trouvé :

$\mathrm{E}(\varphi_1)$	$= 0,6152990$
$\mathrm{E}(\varphi_2)$	$= 0,1693748$
φ_2	$= 9°,704679$
λ_2	$= 58°41'39'',1$
$\mathrm{F}(\varphi_1)$	$= 0,6556604$
$\mathrm{F}(\varphi_2)$	$= 0,1693826$
$2\mathrm{M}\alpha$	$= 3,0264374$
$2\mathrm{M}\rho$	$= 3,5028323$
$\mathrm{D}_\alpha \log \vartheta_1\alpha$	$= 1,001674$
X_1	$= 0^g,2167237$
X_2	$= 0,1020983$
$\mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1$	$= 73°32'14'',9$

III. — Mouvement de rotation d'un corps solide.

Prenons, pour dernier exemple, la mise en nombre des principales formules du Mémoire de Jacobi *Sur la rotation des corps* (*); et supposons que le corps considéré soit un ellipsoïde homogène, dont les trois demi-axes aient pour longueurs

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3.$$

Les trois moments d'inertie principaux seront

$$A = 20,8.\pi, \quad B = 16.\pi, \quad C = 8.\pi,$$

et la masse

$$M = 8\pi.$$

Supposons que les vitesses initiales de rotation autour des trois axes principaux soient

$$p = \frac{1}{4}, \quad q = \frac{1}{2}, \quad r = 1.$$

Les constantes h et l^2 des forces vives et des aires auront pour valeurs

$$h = 13,3.\pi, \quad l^2 = 155,04.\pi^2,$$

d'où résulte

$$Ah - l^2 = 121,60.\pi^2, \quad Bh - l^2 = 57,76.\pi^2, \quad l^2 - Ch = 48,64.\pi^2.$$

On déterminera le module $k = \sin\theta$ par la formule

$$\operatorname{tang}\theta = \sqrt{\frac{A-B}{A-C}}\sqrt{\frac{l^2 - Ch}{Bh - l^2}} = (\bar{1},74970),$$

d'où

$$\theta = 0^q,32593.$$

Pour cette valeur de θ, la Table de la page 57 donne

$$\log K = 0,2254, \quad \log K' = 0,3374, \quad \log q = \bar{2},2342.$$

On calculera ensuite l'intégrale de première espèce

$$a = \int_\beta^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\Delta(\beta, k')} = K' - F(\beta, k'),$$

l'amplitude β étant déterminée par l'équation

$$\operatorname{tang}\beta = \sqrt{\frac{A(B-C)}{C(A-B)}} = (0,31841), \quad \text{d'où} \quad \beta = 0^q,71490.$$

Au moyen de la Table de la page 58, on trouve

$$\log a' = \log(K' - a) = 0,1260, \quad \log a = \bar{1},9235,$$

d'où

$$b = \frac{2}{\pi}\alpha' = \frac{a}{K'} = 0,3855.$$

Pour obtenir des valeurs plus approchées, on peut employer soit les formules (62) ou (63), soit la méthode des transformations modulaires § XVII. Les

(*) *Journal de Crelle*, t. XXXIX, p. 293.

formules de ce dernier paragraphe donnent les valeurs logarithmiques suivantes :

$$\begin{matrix} m = 0{,}00000, & m_1 = \bar{1}{,}87213, & m_2 = \bar{1}{,}85880, & m_3 \\ n = \bar{1}{,}69011, & n_1 = \bar{1}{,}84505, & n_2 = \bar{1}{,}85859, & n_3 \end{matrix} \Bigg\} = \frac{\pi}{2K'} = \bar{1}{,}85870.$$

On a ensuite

$$k'^2 \sin^2\beta = \bar{1}{,}79063, \qquad \text{d'où (Table III)} \quad \frac{1}{\nabla^2} = 0{,}41736,$$

$$\frac{\nabla}{m} = \mu = \bar{1}{,}79132, \qquad \frac{n}{\nabla} = \nu = \bar{1}{,}89879,$$

puis, en opérant au moyen de la Table d'addition (p. 10),

$$\begin{matrix} \mu_1 = \bar{1}{,}98173, & \mu_2 = \bar{1}{,}99986, & \mu_3 \\ \nu_1 = \bar{1}{,}99120, & \nu_2 = \bar{1}{,}99995, & \nu_3 \end{matrix} \Bigg\} = 1,$$

$$\operatorname{tang} \frac{\pi}{2K'}(K' - a) = \cot \alpha' = \frac{\pi}{2K'} \cdot \mu_1 \mu_2 \mu_3 . \operatorname{tang}\beta = (0{,}15869),$$

$$\alpha' = \frac{\pi}{2} b = 0^q{,}38620,$$

$$\frac{1}{q'} = \frac{16k}{k'^2} \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_2}{n_2}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{m_3}{n_3}\right)^{\frac{3}{8}} \cdots = (1{,}05418),$$

$$\log\frac{1}{q} = 2M\rho = \frac{M^2\pi^2}{\log\frac{1}{q'}} = 1{,}76583,$$

$$\frac{2K}{\pi} = \frac{K'}{\rho} = (0{,}02929),$$

$$\vartheta(0) = (\bar{1}{,}98485), \qquad \vartheta_2(0) = (\bar{1}{,}85970), \qquad \vartheta_3(0) = (0{,}01464).$$

$$M\alpha = \frac{K'}{K} \cdot M\alpha' = M\rho . b = 0{,}34098.$$

$$n = \sqrt{\frac{(B - C)(Ah - l^2)}{ABC}} = (\bar{1}{,}78138),$$

$$x = \frac{\pi}{2K} \cdot n(t - t_0) = (\bar{1}{,}75208)(t - t_0).$$

On calculera maintenant $\vartheta_2(\alpha i)$ par l'une des formules

$$\vartheta_2(\alpha i) = 2q^{\frac{1}{4}} \operatorname{Ch}\alpha + 2q^{\frac{9}{4}} \operatorname{Ch} 3\alpha + \ldots,$$

$$\vartheta_2(\alpha i) = e^{\frac{\alpha^2}{2\rho}} (1 - 2q' \cos 2\alpha' + 2q'' \cos 4\alpha' - \ldots),$$

en remarquant que $\log \text{vulg}\, e^{\frac{\alpha^2}{2\rho}} = \frac{(M\alpha)^2}{2M\rho}$. On trouvera ainsi

$$\log \vartheta_2(\alpha i) = \bar{1}{,}98209.$$

On pourrait calculer de même $\vartheta(\alpha i)$, $\vartheta_3(\alpha i)$, $\vartheta_1(\alpha i)$. Mais on opérera plus

directement en calculant les rapports

$$\frac{\vartheta(\alpha i)}{\vartheta_2(\alpha i)}=\sqrt{\frac{A(Bh-l^2)}{(A-B)l^2}},\quad \frac{\vartheta_3(\alpha i)}{\vartheta_2(\alpha i)}=\sqrt{\frac{B(Ah-l^2)}{(A-B)l^2}},\quad \frac{\vartheta_1(\alpha i)}{i\vartheta_2(\alpha i)}=\sqrt{\frac{C(Bh-l^2)}{(B-C)l^2}},$$

dont les valeurs logarithmiques sont

$$\bar{1},97885,\qquad 0,05374,\qquad \bar{1},81539.$$

Nous avons maintenant, pour calculer les diverses inconnues du problème, deux systèmes de formules, les unes sous forme fractionnaire, les autres sous forme entière.

En adoptant les notations des formules (15), et posant, pour abréger,

$$g=\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0),\quad f=n\sqrt{kk'}.\vartheta_3(0)=n.\frac{\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)},$$

$$\frac{\vartheta_3(0)}{g}\frac{\vartheta(\alpha i)}{\vartheta_2(\alpha i)}=\mathcal{A},\quad \frac{\vartheta(0)}{g}\cdot\frac{\vartheta_3(\alpha i)}{\vartheta_2(\alpha i)}=\mathcal{B},\quad \frac{\vartheta_2(0)}{g}\cdot\frac{\vartheta_1(\alpha i)}{i\vartheta_2(\alpha i)}=\mathcal{C},$$

on aura, pour les valeurs des neuf cosinus des angles que font les axes principaux du corps avec trois axes fixes, dont deux sont situés dans le plan invariable et le troisième perpendiculaire à ce plan, et pour les vitesses de rotation ω_x, ω_y, ω_z autour de ces trois axes (*) :

$$\alpha=-\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(\alpha i)}\cdot\frac{\chi'_1(x,\alpha i)}{\vartheta x}$$
$$=-\mathcal{A}.\mathrm{Ch}\alpha\left[\frac{2\,\mathrm{Sh}\rho\sin x}{\mathrm{Sh}(\rho-\alpha)\,\mathrm{Sh}(\rho+\alpha)}+\frac{2\,\mathrm{Sh}3\rho\sin 3x}{\mathrm{Sh}(3\rho-\alpha)\,\mathrm{Sh}(3\rho+\alpha)}+\ldots\right],$$

$$\alpha'=\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(\alpha i)}\cdot\frac{\chi''_1(x,\alpha i)}{\vartheta x}$$
$$=\mathcal{A}.\mathrm{Sh}\alpha\left[\frac{2\,\mathrm{Ch}\rho\cos x}{\mathrm{Sh}(\rho-\alpha)\,\mathrm{Sh}(\rho+\alpha)}+\frac{2\,\mathrm{Ch}3\rho\cos 3x}{\mathrm{Sh}(3\rho-\alpha)\,\mathrm{Sh}(3\rho+\alpha)}+\ldots\right],$$

$$\alpha''=-\frac{\vartheta(\alpha i)}{\vartheta_2(\alpha i)}\cdot\frac{\vartheta_2 x}{\vartheta x}=-\mathcal{A}.2\left(\frac{\cos x}{\mathrm{Ch}\rho}+\frac{\cos 3x}{\mathrm{Ch}3\rho}+\ldots\right);$$

$$\beta=-\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_2(\alpha i)}\cdot\frac{\chi'_2(x,\alpha i)}{\vartheta x}$$
$$=-\mathcal{B}.\mathrm{Ch}\alpha\left[\frac{2\,\mathrm{Ch}\rho\cos x}{\mathrm{Ch}(\rho-\alpha)\,\mathrm{Ch}(\rho+\alpha)}+\frac{2\,\mathrm{Ch}3\rho\cos 3x}{\mathrm{Ch}(3\rho-\alpha)\,\mathrm{Ch}(3\rho+\alpha)}+\ldots\right],$$

$$\beta'=\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_2(\alpha i)}\cdot\frac{\chi''_2(x,\alpha i)}{\vartheta x}$$
$$=\mathcal{B}.\mathrm{Sh}\alpha\left[\frac{2\,\mathrm{Ch}\rho\sin x}{\mathrm{Ch}(\rho-\alpha)\,\mathrm{Ch}(\rho+\alpha)}+\frac{2\,\mathrm{Ch}3\rho\sin 3x}{\mathrm{Ch}(3\rho-\alpha)\,\mathrm{Ch}(3\rho+\alpha)}+\ldots\right],$$

$$\beta''=\frac{\vartheta_3(\alpha i)}{\vartheta_2(\alpha i)}\cdot\frac{\vartheta_1 x}{\vartheta x}=\mathcal{B}.2\left(\frac{\sin x}{\mathrm{Sh}\rho}+\frac{\sin 3x}{\mathrm{Sh}3\rho}+\ldots\right);$$

(*) Les développements des valeurs de α, α', β, β' sont donnés d'une manière incorrecte dans le Mémoire de Jacobi, page 297, formules (3), (4), (5), (6). Dans les numérateurs de ces formules, au lieu de

$$\sqrt{q}(1-q),\quad \sqrt{q^3}(1-q^3),\ldots,\quad \sqrt{q}(1+q),\quad \sqrt{q^3}(1+q^3),\ldots,$$

il faut lire

$$(1-q),\quad (1-q^3),\ldots,\quad (1+q),\quad (1+q^3),\ldots.$$

$$\gamma = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_2(\alpha i)}\cdot\frac{\lambda''(x,\alpha i)}{\vartheta x}$$

$$= \mathcal{C}.\mathrm{Ch}\,\alpha\left[\frac{2\,\mathrm{Sh}\,2\rho\sin 2x}{\mathrm{Sh}(2\rho-\alpha)\,\mathrm{Sh}(2\rho+\alpha)}+\frac{2\,\mathrm{Sh}\,4\rho\sin 4x}{\mathrm{Sh}(4\rho-\alpha)\,\mathrm{Sh}(4\rho+\alpha)}+\ldots\right],$$

$$\gamma' = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_2(\alpha i)}\cdot\frac{\lambda'(x,\alpha i)}{\vartheta x}$$

$$= \mathcal{C}\left\{\frac{1}{\mathrm{Sh}\,\alpha}-\mathrm{Sh}\,\alpha\left[\frac{2\,\mathrm{Ch}\,2\rho\cos 2x}{\mathrm{Sh}(2\rho-\alpha)\,\mathrm{Sh}(2\rho+\alpha)}+\frac{2\,\mathrm{Ch}\,4\rho\cos 4x}{\mathrm{Sh}(4\rho-\alpha)\,\mathrm{Sh}(4\rho+\alpha)}+\ldots\right]\right\},$$

$$\gamma'' = \frac{\vartheta_1(\alpha i)}{i\vartheta_2(\alpha i)}\cdot\frac{\vartheta_3 x}{\vartheta x} = \mathcal{C}\left[1+2\left(\frac{\cos 2x}{\mathrm{Ch}\,2\rho}+\frac{\cos 4x}{\mathrm{Ch}\,4\rho}+\ldots\right)\right];$$

$$\omega_x = \frac{f}{\vartheta_2(\alpha i)}\cdot\frac{\lambda''_3(x,\alpha i)}{\vartheta x}$$

$$= \frac{\pi}{2\mathrm{K}}n.\mathrm{Sh}\,\alpha\left[\frac{2\,\mathrm{Sh}\,2\rho\sin 2x}{\mathrm{Ch}(2\rho-\alpha)\,\mathrm{Ch}(2\rho+\alpha)}+\frac{2\,\mathrm{Sh}\,4\rho\sin 4x}{\mathrm{Ch}(4\rho-\alpha)\,\mathrm{Ch}(4\rho+\alpha)}+\ldots\right],$$

$$\omega_y = -\frac{f}{\vartheta_2(\alpha i)}\cdot\frac{\lambda'_3(x,\alpha i)}{\vartheta x}$$

$$= -\frac{\pi}{2\mathrm{K}}\cdot n\left\{\frac{1}{\mathrm{Ch}\,\alpha}+\mathrm{Ch}\,\alpha\left[\frac{2\,\mathrm{Ch}\,2\rho\cos 2x}{\mathrm{Ch}(2\rho-\alpha)\,\mathrm{Ch}(2\rho+\alpha)}+\frac{2\,\mathrm{Ch}\,4\rho\cos 4x}{\mathrm{Ch}(4\rho-\alpha)\,\mathrm{Ch}(4\rho+\alpha)}+\ldots\right]\right\},$$

$$\omega_z = \frac{h}{l}.$$

Les vitesses de rotation autour des axes principaux sont

$$p = \frac{l}{\mathrm{A}}\alpha'', \quad q = \frac{l}{\mathrm{B}}\beta'', \quad r = \frac{l}{\mathrm{C}}\gamma''.$$

Les angles θ, φ, ψ', qui déterminent à chaque instant les positions des axes principaux, par rapport aux axes fixes, sont donnés par les formules

$$\cos\theta = \gamma'',$$

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{\vartheta(\alpha i)}{\vartheta_3(\alpha i)}\cdot\frac{\vartheta_2 x}{\vartheta_1 x} = -\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\left(\cot x - 2q\frac{\sin 2x}{\mathrm{Ch}\,2\rho} - 2q^2\frac{\sin 4x}{\mathrm{Ch}\,4\rho} - \ldots\right),$$

$$\operatorname{tang}\psi' = \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\lambda''(x,\alpha i)}{\lambda'(x,\alpha i)}.$$

Enfin, la vitesse angulaire moyenne Ψ de la droite (x) (Mémoire de Jacobi, p. 305) a pour valeur

$$\Psi = \frac{\pi}{2\mathrm{K}}n\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}-\mathrm{C}}\cdot \mathrm{D}_\alpha\log\vartheta_1(\alpha i) - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}-\mathrm{C}}\cdot\mathrm{D}_\alpha\log\vartheta(\alpha i)\right],$$

ce qui donne la partie non périodique de $\psi' = \psi + \Psi(t - t_0)$.

Voici, par exemple, le calcul numérique de γ :

$\dfrac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_2(\alpha i)}$	$\bar{1},8776$
$2q$..........	$\bar{2},5352$
$\mathrm{Sh}\,2\alpha$.......	$0,3617$
(1)..........	$\bar{2},7745$
	$\bar{1},88$
$-2q^4$......	$-\bar{7},24$
$\mathrm{Sh}\,4\alpha$......	$1,06$
2).........	$-\bar{6},18$

Θ..........	$\bar{1},8159$
$\mathrm{Ch}\,\alpha$.........	$0,1220$
	$\bar{1},9379$
$2\,\mathrm{Sh}\,2\rho$......	$1,7657$
$\dfrac{1}{\mathrm{Sh}(2\rho-\alpha)}$..	$\bar{2},8768$
$\dfrac{1}{\mathrm{Sh}(2\rho+\alpha)}$..	$\bar{2},1942$
(a)..........	$\bar{2},7746$

	$\bar{1},938$ (*)
4..........	$0,602$
$-4\mathrm{M}\rho$.....	$\bar{4},468$
(b).........	$\bar{3},008$
	$0,54$
$-6\mathrm{M}\rho$.....	$\bar{6},70$
(c).........	$\bar{5},24$
	$0,5$
$-8\mathrm{M}\rho$.....	$\bar{8},8$
(d)........	$\bar{7},3$

Donc

$$\gamma = \frac{(\bar{2},7745)\sin 2x - (\bar{6},18)\sin 4x + - \ldots}{1 - (\bar{2},5352)\cos 2x + (\bar{7},24)\cos 4x - + \ldots}$$
$$= (\bar{2},7746)\sin 2x + (\bar{3},008)\sin 4x + (\bar{5},24)\sin 6x + (\bar{7},3)\sin 8x + \ldots.$$

On trouvera de même

$$\gamma' = (\bar{1},87761)\,\frac{1 - (\bar{2},9345)\cos 2x + (\bar{6},30)\cos 4x - + \ldots}{1 - (\bar{2},5352)\cos 2x + (\bar{7},24)\cos 4x - + \ldots}$$
$$= (\bar{1},87722) - (\bar{2},5916)\cos 2x - (\bar{4},825)\cos 4x$$
$$- (\bar{5},06)\cos 6x - (\bar{7},1)\cos 8x - \ldots.$$

On en tire immédiatement

$$\operatorname{tang}\psi' = \frac{(\bar{2},8969)\sin 2x - (\bar{6},30)\sin 4x + - \ldots}{1 - (\bar{2},9345)\cos 2x + (\bar{6},30)\cos 4x - + \ldots}.$$

Ensuite, au moyen de la Table XIV, qui donne immédiatement les valeurs de $\dfrac{1}{\mathrm{Ch}\,2\rho}$, $\dfrac{1}{\mathrm{Ch}\,4\rho}$, etc., on trouve

$$\gamma'' = \cos\theta = (\bar{1},81539)\,\frac{1 + (\bar{2},5352)\cos 2x + (\bar{7},24)\cos 4x + \ldots}{1 - (\bar{2},5352)\cos 2x + (\bar{7},24)\cos 4x - + \ldots}$$
$$= (\bar{1},81590) + (\bar{2},6520)\cos 2x + (\bar{4},886)\cos 4x$$
$$+ (\bar{5},12)\cos 6x + (\bar{7},4)\cos 8x + \ldots,$$

$$\operatorname{tang}\varphi = -(\bar{1},92521)\,\frac{\cos x + (\bar{4},468)\cos 3x + \ldots}{\sin x - (\bar{4},468)\sin 3x + - \ldots}$$
$$= -(\bar{1},92572)\cot x + (\bar{2},7618)\sin 2x + (\bar{4},996)\sin 4x$$
$$+ (\bar{5},23)\sin 6x + (\bar{7},5)\sin 8x + \ldots.$$

(*) Pour une valeur assez grande de u, on a sensiblement

$$\log(2\,\mathrm{Sh}\,u) = \log(2\,\mathrm{Ch}\,u) = \mathrm{M}u,$$

d'où, pour n assez grand,

$$\log\frac{2\,\mathrm{Sh}\,n\rho}{\mathrm{Sh}(n\rho-\alpha)\,\mathrm{Sh}(n\rho+\alpha)} = \mathrm{M}n\rho - [\mathrm{M}(n\rho-\alpha) - \log 2] - [\mathrm{M}(n\rho+\alpha) - \log 2] = \log 4 - \mathrm{M}n\rho,$$

et de même pour les cosinus hyperboliques.

Calculons enfin la vitesse angulaire Ψ, en déterminant $D_\alpha \log \vartheta_1(\alpha i)$, $D_\alpha \log \vartheta(\alpha i)$ par les formules (23) ou (24). On trouve, par les formules (23) :

$\frac{\pi n}{2K}\frac{C}{A-C}$ …	$\bar{1},54797$	$-\frac{\pi n}{2K}\frac{A}{A-C}$.	$-\bar{1},96294$	(1)........	0,53960
$\frac{i}{\vartheta_1(\alpha i)}$	0,20252	$-\frac{i}{\vartheta(\alpha i)}$ …	$-0,03906$	(2)........	0,15846
$2q^{\frac{1}{4}}$	$\bar{1},85957$	$4q$	$\bar{2},83621$	(3)........	$-$ 191
				(4)........	$-$ 1
	$\bar{1},61006$		$\bar{2},83821$	$\Psi =$	0,69614
Ch α	0,12201	Sh 2α	0,36172	$\log \Psi =$	$\bar{1},84270$
(1).........	$\bar{1},73207$	(2).........	1,19993		
	$\bar{1},610$		$\bar{2},838$		
$-3q^2$	$-\bar{4},945$	$-2q^3$	$-\bar{5},003$		
Ch 3α	0,726	Sh 4α	1,062		
(3)........	$-\bar{3},281$	(4)........	$-\bar{6},903$		

TABLES NUMÉRIQUES.

I. — LOGARITHMES VULGAIRES

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
0	»	000	301	477	602	699	778	845	903	954	
1	000	041	079	114	146	176	204	230	255	279	22
2	301	322	342	362	380	398	415	431	447	462	15
3	477	491	505	519	531	544	556	568	580	591	11
4	602	613	623	633	643	653	663	672	681	690	9
5	699	708	716	724	732	740	748	756	763	771	7
6	778	785	792	799	806	813	820	826	833	839	6
7	845	851	857	863	869	875	881	886	892	898	5
8	903	908	914	919	924	929	934	940	944	949	5
9	954	959	964	968	973	978	982	987	991	996	4
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	40
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	37
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	33
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	31
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	29
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	27
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	25
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	24
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	23
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	21
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	21
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	20
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	19
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	18
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	17
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	17
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	16
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	16
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	15
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	14
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	14
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	13
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	13
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	13
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	13
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	12
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	12
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	12
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	12
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	11
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	11
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	10
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	10
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	10
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	10
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	10
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	9
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	9
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	9
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	9

Nombres.	Log.	Nombres.	Log.	Nombres.	Log.
$e = 2{,}7183$	0,4343	$\pi = 3{,}1416$	0,4971	$R^{o} = 57^{o}{,}30$	1,7581
$M = 0{,}4343$	$\bar{1}{,}6378$	$\frac{2}{\pi} = 0{,}6366$	$\bar{1}{,}8039$	$R' = 3437'{,}7$	3,5363
$\frac{1}{M} = 2{,}3026$	0,3622	$g = 9{,}809$	0,9916	$R'' = 206265''$	5,3144

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	9
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	8
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	8
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	8
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	8
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	8
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	8
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	8
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	7
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	7
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	7
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	7
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	7
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	6
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	6
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	6
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	6
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	6
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	6
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	6
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	6
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	6
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	5
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	5
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	5
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	5
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	5
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	5
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	4

Nombres.	Log.	Arc.	Sin : Arc.	Tg : Arc.	Arc.	Sin : Arc.	Tg : Arc.
R		q			q		
$1^\circ = 0,01745$	$\bar{2},2419$	0,00	0,1961	0,1961	0,03	0,1960	0,1964
$1' = 0,0^3 2909$	$\bar{4},4637$	0,01	0,1961	0,1962	0,04	0,1958	0,1967
$1'' = 0,0^5 4848$	$\bar{6},6856$	0,02	0,1960	0,1963	0,05	0,1957	0,1970

I. (Suite.) — LOGARITHMES VULGAIRES

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039	4
101	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082	4
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124	4
103	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166	4
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208	4
105	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249	4
106	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290	4
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330	4
108	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370	4
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410	4
110	0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449	4
111	0453	0457	0461	0465	0469	0473	0477	0481	0484	0488	4
112	0492	0496	0500	0504	0508	0512	0515	0519	0523	0527	4
113	0531	0535	0538	0542	0546	0550	0554	0558	0561	0565	4
114	0569	0573	0577	0580	0584	0588	0592	0596	0599	0603	4
115	0607	0611	0615	0618	0622	0626	0630	0633	0637	0641	4
116	0645	0648	0652	0656	0660	0663	0667	0671	0674	0678	4
117	0682	0686	0689	0693	0697	0700	0704	0708	0711	0715	4
118	0719	0722	0726	0730	0734	0737	0741	0745	0748	0752	3
119	0755	0759	0763	0766	0770	0774	0777	0781	0785	0788	4
120	0792	0795	0799	0803	0806	0810	0813	0817	0821	0824	4
121	0828	0831	0835	0839	0842	0846	0849	0853	0856	0860	4
122	0864	0867	0871	0874	0878	0881	0885	0888	0892	0896	3
123	0899	0903	0906	0910	0913	0917	0920	0924	0927	0931	3
124	0934	0938	0941	0945	0948	0952	0955	0959	0962	0966	3
125	0969	0973	0976	0980	0983	0986	0989	0993	0997	1000	4
126	1004	1007	1011	1014	1017	1021	1024	1028	1031	1035	3
127	1038	1041	1045	1048	1052	1055	1059	1062	1065	1069	3
128	1072	1075	1079	1082	1086	1089	1092	1096	1099	1103	3
129	1106	1109	1113	1116	1119	1123	1126	1129	1133	1136	3
130	1139	1143	1146	1149	1153	1156	1159	1163	1166	1169	4
131	1173	1176	1179	1183	1186	1189	1193	1196	1199	1202	4
132	1206	1209	1212	1216	1219	1222	1225	1229	1232	1235	4
133	1239	1242	1245	1248	1252	1255	1258	1261	1265	1268	3
134	1271	1274	1278	1281	1284	1287	1290	1294	1297	1300	3
135	1303	1307	1310	1313	1316	1319	1323	1326	1329	1332	3
136	1335	1339	1342	1345	1348	1351	1355	1358	1361	1364	3
137	1367	1370	1374	1377	1380	1383	1386	1389	1392	1396	3
138	1399	1402	1405	1408	1411	1414	1418	1421	1424	1427	3
139	1430	1433	1436	1440	1443	1446	1449	1452	1455	1458	3
140	1461	1464	1467	1471	1474	1477	1480	1483	1486	1489	3
141	1492	1495	1498	1501	1504	1508	1511	1514	1517	1520	3
142	1523	1526	1529	1532	1535	1538	1541	1544	1547	1550	3
143	1553	1556	1559	1562	1565	1569	1572	1575	1578	1581	3
144	1584	1587	1590	1593	1596	1599	1602	1605	1608	1611	3
145	1614	1617	1620	1623	1626	1629	1632	1635	1638	1641	3
146	1644	1647	1649	1652	1655	1658	1661	1664	1667	1670	3
147	1673	1676	1679	1682	1685	1688	1691	1694	1697	1700	3
148	1703	1706	1708	1711	1714	1717	1720	1723	1726	1729	3
149	1732	1735	1738	1741	1744	1746	1749	1752	1755	1758	3

Nombres.	Log.	Nombres.	Log.	Nombres.	Log.
$e = 2,7183$	0,4343	$\pi = 3,1416$	0,4971	$R^o = 57^o,30$	1,7581
$M = 0,4343$	$\bar{1},6378$	$\frac{2}{\pi} = 0,6366$	$\bar{1},8039$	$R' = 3437',7$	3,5363
$\frac{1}{M} = 2,3026$	0,3622	$g = 9,809$	0,9916	$R'' = 206265''$	5,3144

OU DÉCIMAUX.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
150	1761	1764	1767	1770	1772	1775	1778	1781	1784	1787	3
151	1790	1793	1796	1798	1801	1804	1807	1810	1813	1816	2
152	1818	1821	1824	1827	1830	1833	1836	1838	1841	1844	3
153	1847	1850	1853	1855	1858	1861	1864	1867	1870	1872	3
154	1875	1878	1881	1884	1886	1889	1892	1895	1898	1901	2
155	1903	1906	1909	1912	1915	1917	1920	1923	1926	1928	3
156	1931	1934	1937	1940	1942	1945	1948	1951	1953	1956	3
157	1959	1962	1965	1967	1970	1973	1976	1978	1981	1984	3
158	1987	1989	1992	1995	1998	2000	2003	2006	2009	2011	3
159	2014	2017	2019	2022	2025	2028	2030	2033	2036	2038	3
160	2041	2044	2047	2049	2052	2055	2057	2060	2063	2066	2
161	2068	2071	2074	2076	2079	2082	2084	2087	2090	2092	3
162	2095	2098	2101	2103	2106	2109	2111	2114	2117	2119	3
163	2122	2125	2127	2130	2133	2135	2138	2140	2143	2146	2
164	2148	2151	2154	2156	2159	2162	2164	2167	2170	2172	3
165	2175	2177	2180	2183	2185	2188	2191	2193	2196	2198	3
166	2201	2204	2206	2209	2212	2214	2217	2219	2222	2225	2
167	2227	2230	2232	2235	2238	2240	2243	2245	2248	2251	2
168	2253	2256	2258	2261	2263	2266	2269	2271	2274	2276	3
169	2279	2281	2284	2287	2289	2292	2294	2297	2299	2302	2
170	2304	2307	2310	2312	2315	2317	2320	2322	2325	2327	3
171	2330	2333	2335	2338	2340	2343	2345	2348	2350	2353	2
172	2355	2358	2360	2363	2365	2368	2370	2373	2375	2378	2
173	2380	2383	2385	2388	2390	2393	2395	2398	2400	2403	2
174	2405	2408	2410	2413	2415	2418	2420	2423	2425	2428	2
175	2430	2433	2435	2438	2440	2443	2445	2448	2450	2453	2
176	2455	2458	2460	2463	2465	2467	2470	2472	2475	2477	3
177	2480	2482	2485	2487	2490	2492	2494	2497	2499	2502	2
178	2504	2507	2509	2512	2514	2516	2519	2521	2524	2526	3
179	2529	2531	2533	2536	2538	2541	2543	2545	2548	2550	3
180	2553	2555	2558	2560	2562	2565	2567	2570	2572	2574	3
181	2577	2579	2582	2584	2586	2589	2591	2594	2596	2598	3
182	2601	2603	2605	2608	2610	2613	2615	2617	2620	2622	3
183	2625	2627	2629	2632	2634	2636	2639	2641	2643	2646	2
184	2648	2651	2653	2655	2658	2660	2662	2665	2667	2669	3
185	2672	2674	2676	2679	2681	2683	2686	2688	2690	2693	2
186	2695	2697	2700	2702	2704	2707	2709	2711	2714	2716	2
187	2718	2721	2723	2725	2728	2730	2732	2735	2737	2739	3
188	2742	2744	2746	2749	2751	2753	2755	2758	2760	2762	3
189	2765	2767	2769	2772	2774	2776	2778	2781	2783	2785	3
190	2788	2790	2792	2794	2797	2799	2801	2804	2806	2808	2
191	2810	2813	2815	2817	2819	2822	2824	2826	2828	2831	2
192	2833	2835	2838	2840	2842	2844	2847	2849	2851	2853	3
193	2856	2858	2860	2862	2865	2867	2869	2871	2874	2876	2
194	2878	2880	2882	2885	2887	2889	2891	2894	2896	2898	2
195	2900	2903	2905	2907	2909	2911	2914	2916	2918	2920	3
196	2923	2925	2927	2929	2931	2934	2936	2938	2940	2942	3
197	2945	2947	2949	2951	2953	2956	2958	2960	2962	2964	3
198	2967	2969	2971	2973	2975	2978	2980	2982	2984	2986	3
199	2989	2991	2993	2995	2997	2999	3002	3004	3006	3008	2

Nombres.	Log.	Arc.	Sin : Arc.	Tg : Arc.	Arc.	Sin : Arc.	Tg : Arc.
R		q			q		
$1^{o} = 0{,}01745$	$\bar{2},2419$	0,00	0,1961	0,1961	0,03	0,1960	0,1964
$1' = 0{,}0^{3}2909$	$\bar{4},4637$	0,01	0,1961	0,1962	0,04	0,1958	0,1967
$1'' = 0{,}0^{5}4848$	$\bar{6},6856$	0,02	0,1960	0,1963	0,05	0,1957	0,1970

II. — ANTILOGARITHMES.

L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	2
01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	2
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	3
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	2
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	3
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	2
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	3
07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	3
08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	3
09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	3
10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	3
11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	3
12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	3
13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	3
14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	4
15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	3
16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	3
17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	4
18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	4
19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	4
20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	4
21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	4
22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	4
23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	4
24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	4
25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	4
26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	4
27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	4
28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	5
29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	4
30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	5
31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	5
32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	5
33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	5
34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	5
35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	5
36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	5
37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	6
38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	6
39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	6
40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	6
41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	6
42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	7
43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	6
44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	6
45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	7
46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	7
47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	7
48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	7
49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	7
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	8
L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

ANTILOGARITHMES.

L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	8
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	7
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	7
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	8
54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	8
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	9
56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	8
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	9
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	8
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	9
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	10
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	10
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	10
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	10
64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	10
65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	11
66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	10
67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	11
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	11
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	12
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	12
71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	12
72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	12
73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	12
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	13
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	13
76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	13
77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	14
78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	14
79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	15
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	15
81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	15
82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	16
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	16
84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	16
85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	16
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	17
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	18
88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	17
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	18
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	18
91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	19
92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	19
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	20
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	21
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	21
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	22
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	22
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	22
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	23
00	10000	10023	10046	10069	10093	10116	10139	10162	10186	10209	24
L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

III. (Suite.) — LOGARITHMES D'ADDITION

$\mathrm{Log}\,(1 + x)$.

$\mathrm{Log}\,x$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d
$\bar{1}$,40	0,0	9732	9752	9773	9793	9813	9833	9853	9874	9894	9914	21
41		9935	9955	9976	9996	*0017	*0038	*0058	*0079	*0100	*0120	21
42	0,1	0141	0162	0183	0204	0225	0246	0267	0288	0309	0330	21
43		0351	0373	0394	0415	0437	0458	0479	0501	0522	0544	21
44		0565	0587	0609	0630	0652	0674	0696	0718	0739	0761	22
$\bar{1}$,45	0,1	9783	0805	0827	0849	0872	0894	0916	0938	0960	0983	22
46		1005	1028	1050	1073	1095	1118	1140	1163	1186	1208	23
47		1231	1254	1277	1300	1323	1345	1368	1392	1415	1438	23
48		1461	1484	1507	1531	1554	1577	1601	1624	1648	1671	24
49		1695	1719	1742	1766	1790	1814	1837	1861	1885	1909	24
$\bar{1}$,50	0,1	1933	1957	1981	2005	2030	2054	2078	2102	2127	2151	24
51		2175	2200	2224	2249	2274	2298	2323	2348	2372	2397	25
52		2422	2447	2472	2497	2522	2547	2572	2597	2622	2648	25
53		2673	2698	2724	2749	2775	2800	2826	2851	2877	2903	25
54		2928	2954	2980	3006	3032	3058	3084	3110	3136	3162	26
$\bar{1}$,55	0,1	3188	3214	3240	3267	3293	3319	3346	3372	3399	3425	27
56		3452	3479	3505	3532	3559	3586	3613	3640	3667	3694	27
57		3721	3748	3775	3802	3829	3857	3884	3911	3939	3966	28
58		3994	4021	4049	4077	4104	4132	4160	4188	4216	4244	28
59		4272	4300	4328	4356	4384	4412	4441	4469	4497	4526	28
$\bar{1}$,60	0,1	4554	4583	4611	4640	4668	4697	4726	4755	4783	4812	29
61		4841	4870	4899	4928	4957	4986	5016	5045	5074	5104	29
62		5133	5162	5192	5221	5251	5281	5310	5340	5370	5400	30
63		5430	5460	5489	5520	5550	5580	5610	5640	5670	5701	30
64		5731	5761	5792	5822	5853	5884	5914	5945	5976	6007	30
$\bar{1}$,65	0,1	6037	6068	6099	6130	6161	6192	6224	6255	6286	6317	31
66		6349	6380	6411	6443	6474	6506	6538	6569	6601	6633	32
67		6665	6697	6729	6761	6793	6825	6857	6889	6921	6954	32
68		6986	7018	7051	7083	7116	7148	7181	7214	7247	7279	33
69		7312	7345	7378	7411	7444	7477	7510	7544	7577	7610	33
$\bar{1}$,70	0,1	7643	7677	7710	7744	7777	7811	7845	7878	7912	7946	34
71		7980	8014	8048	8082	8116	8150	8184	8218	8253	8287	34
72		8322	8356	8390	8425	8460	8494	8529	8564	8599	8633	35
73		8668	8703	8738	8773	8808	8844	8879	8914	8949	8985	35
74		9020	9056	9091	9127	9163	9198	9234	9270	9306	9342	36
$\bar{1}$,75	0,1	9378	9414	9450	9486	9522	9558	9595	9631	9667	9704	36
76		9740	9777	9813	9850	9887	9923	9960	9997	*0034	*0071	37
77	0,2	0108	0145	0182	0220	0257	0294	0331	0369	0406	0444	37
78		0481	0519	0557	0594	0632	0670	0708	0746	0784	0822	38
79		0860	0898	0937	0975	1013	1052	1090	1128	1167	1206	38
$\bar{1}$,80	0,2	1244	1283	1322	1361	1399	1438	1477	1516	1556	1595	39
81		1634	1673	1712	1752	1791	1831	1870	1910	1949	1989	40
82		2029	2069	2109	2149	2189	2229	2269	2309	2349	2389	41
83		2430	2470	2510	2551	2591	2632	2673	2713	2754	2795	41
84		2836	2877	2918	2959	3000	3041	3082	3123	3165	3206	41
$\bar{1}$,85	0,2	3247	3289	3330	3372	3414	3455	3497	3539	3581	3623	42
86		3665	3707	3749	3791	3833	3875	3918	3960	4003	4045	43
87		4088	4130	4173	4216	4258	4301	4344	4387	4430	4473	43
88		4516	4559	4603	4646	4689	4733	4776	4819	4863	4907	43
89		4950	4994	5038	5082	5126	5170	5214	5258	5302	5346	44
$\bar{1}$,90	0,2	5390	5434	5479	5523	5568	5612	5657	5701	5746	5791	45
91		5836	5881	5926	5970	6016	6061	6106	6151	6196	6242	46
92		6287	6332	6378	6423	6469	6515	6560	6606	6652	6698	46
93		6744	6790	6836	6882	6928	6974	7021	7067	7114	7160	47
94		7207	7253	7300	7346	7393	7440	7487	7534	7581	7628	47
$\bar{1}$,95	0,2	7675	7722	7769	7817	7864	7911	7959	8006	8054	8101	48
96		8149	8197	8245	8292	8340	8388	8436	8484	8532	8581	48
97		8629	8677	8726	8774	8822	8871	8920	8968	9017	9066	49
98		9115	9163	9212	9261	9310	9359	9409	9458	9507	9556	50
99		9606	9655	9705	9754	9804	9854	9903	9953	*0003	*0053	50
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d

ET DE SOUSTRACTION.

$$\text{Log}\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Log x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d
$\bar{1}$,40	0,1 2563	2596	2630	2664	2698	2732	2766	2800	2834	2869	34
41	2903	2938	2973	3008	3043	3078	3113	3148	3184	3219	35
42	3255	3291	3326	3362	3398	3435	3471	3507	3544	3581	36
43	3617	3654	3691	3728	3766	3803	3840	3878	3916	3954	38
44	3992	4030	4068	4106	4145	4183	4222	4261	4300	4339	39
$\bar{1}$,45	0,1 4378	4417	4457	4496	4536	4576	4616	4656	4696	4736	41
46	4777	4817	4858	4899	4940	4981	5022	5064	5105	5147	42
47	5189	5230	5273	5315	5357	5400	5442	5485	5528	5571	43
48	5614	5657	5701	5745	5788	5832	5876	5921	5965	6009	45
49	6054	6099	6144	6189	6234	6280	6325	6371	6417	6463	46
$\bar{1}$,50	0,1 6509	6555	6602	6648	6695	6742	6789	6836	6884	6931	48
51	6979	7027	7075	7123	7172	7220	7269	7318	7367	7416	50
52	7466	7515	7565	7615	7665	7716	7766	7817	7867	7918	52
53	7970	8021	8072	8124	8176	8228	8280	8333	8385	8438	53
54	8491	8544	8598	8651	8705	8759	8813	8867	8922	8977	54
$\bar{1}$,55	0,1 9031	9087	9142	9197	9253	9309	9365	9421	9478	9534	57
56	0,1 9591	9648	9706	9763	9821	9879	9937	9996	*0054	*0113	59
57	0,2 0172	0231	0291	0350	0410	0470	0531	0591	0652	0713	61
58	0774	0836	0897	0959	1021	1084	1146	1209	1272	1336	63
59	1399	1463	1527	1591	1656	1721	1786	1851	1916	1982	66
$\bar{1}$,60	0,2 2048	2114	2181	2248	2315	2382	2450	2517	2585	2654	68
61	2722	2791	2860	2930	3000	3069	3140	3210	3281	3352	71
62	3423	3495	3567	3639	3712	3784	3857	3931	4004	4078	73
63	4153	4227	4302	4377	4453	4528	4604	4681	4758	4835	77
64	4912	4989	5067	5146	5224	5303	5382	5462	5542	5622	81
$\bar{1}$,65	0,2 5703	5784	5865	5946	6028	6111	6193	6276	6359	6443	84
66	6527	6611	6696	6781	6867	6953	7039	7125	7212	7300	87
67	7387	7475	7564	7653	7742	7831	7921	8012	8103	8194	91
68	8285	8377	8470	8563	8656	8750	8844	8938	9033	9128	93
69	0,2 9224	9320	9417	9514	9612	9710	9808	9907	*0006	*0106	100
$\bar{1}$,70	0,3 0206	0307	0408	0510	0612	0714	0818	0921	1025	1130	105
71	1235	1340	1446	1553	1660	1767	1876	1984	2093	2203	110
72	2313	2424	2535	2647	2759	2872	2985	3099	3214	3329	116
73	3445	3561	3678	3795	3914	4032	4151	4271	4392	4513	121
74	4634	4757	4880	5003	5127	5252	5378	5504	5631	5758	128
$\bar{1}$,75	0,3 5886	6015	6145	6275	6406	6537	6670	6803	6936	7071	135
76	7206	7342	7479	7616	7754	7893	8033	8173	8314	8456	143
77	0,3 8599	8743	8887	9033	9179	9326	9473	9622	9771	9922	151
78	0,4 0073	0225	0378	0532	0686	0842	0999	1156	1315	1474	160
79	1634	1796	1958	2121	2285	2451	2617	2784	2953	3122	170
$\bar{1}$,80	0,4 3292	3464	3636	3810	3985	4161	4338	4516	4695	4876	181
81	5057	5240	5424	5609	5796	5983	6172	6362	6554	6747	194
82	6941	7136	7333	7531	7730	7931	8133	8337	8542	8749	208
83	0,4 8957	9166	9377	9590	9804	*0019	*0236	*0455	*0675	*0897	224
84	0,5 1121	1346	1573	1802	2033	2265	2499	2735	2973	3212	242
$\bar{1}$,85	0,5 3454	3697	3942	4190	4439	4690	4943	5199	5456	5716	262
86	5978	6242	6508	6776	7047	7320	7596	7874	8154	8437	285
87	0,5 8722	9010	9300	9593	9889	*0188	*0489	*0793	*1100	*1410	312
88	0,6 1722	2038	2357	2679	3004	3332	3663	3998	4336	4678	345
89	5023	5372	5724	6080	6440	6804	7171	7543	7919	8298	385
$\bar{1}$,90	0,6 8683	9071	9464	9861	*0263	*0670	*1081	*1497	*1918	*2345	431
91	0,7 2776	3213	3656	4104	4558	5017	5483	5955	6433	6917	491
92	7408	7906	8411	8922	9442	9968	*0503	*1045	*1595	*2154	568
93	0,8 2722	3298	3883	4478	5082	5697	6321	6956	7602	8260	669
94	8929	9610	*0303	*1010	*1730	*2463	*3211	*3974	*4752	*5546	811
$\bar{1}$,95	0, 9636	9719	9803	9890	9978	*0069	*0161	*0256	*0354	*0453	103
96	1, 0556	0661	0769	0880	0994	1111	1232	1357	1485	1618	138
97	1756	1898	2046	2199	2357	2523	2695	2875	3063	3260	207
98	3467	3685	3915	4158	4416	4692	4986	5303	5646	6019	409
$\bar{1}$,99	6428	6880	7387	7962	8626	9413	*0377	*1622	*3378	*6383	»
$\bar{1}$,999	2,638	2,684	2,735	2,793	2,860	2,939	3,036	3,161	3,337	3,638	
$\bar{1}$,9999	3,638	3,684	3,735	3,793	3,860	3,939	4,036	4,161	4,337	4,638	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d

IV. — $y=\frac{1+x}{1-x}$, $x=\frac{y-1}{y+1}$.

Log x.	Log y.										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d
$\bar{5}$,	0,00	001	001	001	002	002	003	003	004	005	007	2
$\bar{4}$,		009	011	014	017	022	027	035	044	055	069	18
$\bar{3}$, 0	0,00	087	089	091	093	095	097	100	102	104	107	2
1		109	112	115	117	120	123	126	128	131	135	3
2		138	141	144	148	151	154	158	162	166	169	4
3		173	177	181	186	190	194	199	204	208	213	5
4		218	223	228	234	239	245	251	256	262	268	7
$\bar{3}$, 5	0,00	275	281	288	294	301	308	315	323	330	338	8
6		346	354	362	371	379	388	397	406	416	425	10
7		435	445	455	466	477	488	500	511	523	536	12
8		548	561	574	587	601	615	629	644	659	674	16
9		690	706	722	739	757	774	792	811	830	849	20
$\bar{2}$, 0	0,0	0869	0889	0910	0931	0952	0975	0997	1021	1044	1069	26
1		1094	1119	1145	1172	1199	1227	1256	1285	1315	1345	32
2		1377	1409	1442	1475	1510	1545	1581	1618	1655	1694	36
3		1733	1774	1815	1857	1901	1945	1990	2037	2084	2133	40
4		2182	2233	2285	2338	2393	2449	2506	2564	2624	2685	56
$\bar{2}$, 5	0,0	2748	2812	2877	2944	3013	3083	3155	3229	3304	3381	73
6		3460	3540	3623	3707	3794	3882	3973	4066	4161	4258	90
7		4357	4459	4563	4669	4778	4890	5004	5121	5240	5362	126
8		5488	5616	5747	5881	6019	6159	6303	6451	6602	6756	150
9		6914	7076	7241	7411	7584	7762	7944	8130	8320	8515	200
$\bar{1}$,00	0,3	8715	8735	8756	8776	8796	8817	8837	8858	8878	8899	20
01		8919	8940	8961	8982	9003	9023	9044	9065	9086	9108	21
02		9129	9150	9171	9192	9214	9235	9257	9278	9300	9321	22
03		9343	9365	9386	9408	9430	9452	9474	9496	9518	9540	22
04		9562	9585	9607	9629	9652	9674	9696	9719	9742	9764	23
$\bar{1}$,05	0,0	9787	9810	9832	9855	9878	9901	9924	9947	9970	9994	23
06	0,1	0017	0040	0064	0087	0110	0134	0158	0181	0205	0229	23
07		0252	0276	0300	0324	0348	0372	0396	0421	0445	0469	24
08		0493	0518	0542	0567	0592	0616	0641	0666	0691	0715	24
09		0740	0765	0790	0816	0841	0866	0891	0917	0942	0968	25
$\bar{1}$,10	0,1	0993	1019	1045	1070	1096	1122	1148	1174	1200	1226	26
11		1252	1278	1305	1331	1357	1384	1410	1437	1464	1490	27
12		1517	1544	1571	1598	1625	1652	1679	1707	1734	1761	28
13		1789	1816	1844	1872	1899	1927	1955	1983	2011	2039	28
14		2067	2095	2123	2152	2180	2208	2237	2266	2294	2323	29
$\bar{1}$,15	0,1	2352	2381	2410	2439	2468	2497	2526	2555	2585	2614	29
16		2643	2673	2703	2732	2762	2792	2822	2852	2882	2912	30
17		2942	2973	3003	3033	3064	3094	3125	3156	3187	3217	31
18		3248	3279	3311	3342	3373	3404	3436	3467	3499	3530	31
19		3562	3594	3626	3658	3690	3722	3754	3786	3818	3851	32
$\bar{1}$,20	0,1	3883	3916	3948	3981	4014	4047	4080	4113	4146	4179	33
21		4212	4246	4279	4313	4346	4380	4414	4448	4481	4515	34
22		4550	4584	4618	4652	4687	4721	4756	4791	4825	4860	35
23		4895	4930	4965	5000	5036	5071	5106	5142	5178	5213	36
24		5249	5285	5321	5357	5393	5429	5466	5502	5539	5575	37
$\bar{1}$,25	0,1	5612	5649	5686	5723	5760	5797	5834	5871	5909	5946	38
26		5984	6021	6059	6097	6135	6173	6211	6249	6288	6326	38
27		6365	6403	6442	6481	6520	6559	6598	6637	6677	6716	39
28		6755	6795	6835	6874	6914	6954	6994	7035	7075	7115	41
29		7156	7196	7237	7278	7319	7360	7401	7442	7483	7525	41
$\bar{1}$,30	0,1	7566	7608	7650	7691	7733	7775	7817	7860	7902	7945	42
31		7987	8030	8073	8115	8158	8201	8245	8288	8331	8375	44
32		8419	8462	8506	8550	8594	8638	8683	8727	8772	8816	45
33		8861	8906	8951	8996	9041	9087	9132	9178	9223	9269	46
34		9315	9361	9407	9453	9500	9546	9593	9639	9686	9733	47
$\bar{1}$,35	0,1	9780	9827	9875	9922	9970	*0017	*0065	*0113	*0161	*0209	48
36	0,2	0258	0306	0355	0403	0452	0501	0550	0599	0649	0698	50
37		0748	0797	0847	0897	0947	0997	1047	1098	1149	1199	51
38		1250	1301	1352	1403	1455	1506	1558	1610	1662	1714	52
39		1766	1818	1871	1923	1976	2029	2082	2135	2188	2241	54
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d

ET DE SOUSTRACTION.

$\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

Log x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d
$\bar{1}$,40	0,1 2563	2596	2630	2664	2698	2732	2766	2800	2834	2869	34
41	2903	2938	2973	3008	3043	3078	3113	3148	3184	3219	35
42	3255	3291	3326	3362	3398	3435	3471	3507	3544	3581	36
43	3617	3654	3691	3728	3766	3803	3840	3878	3916	3954	38
44	3992	4030	4068	4106	4145	4183	4222	4261	4300	4339	39
$\bar{1}$,45	0,1 4378	4417	4457	4496	4536	4576	4616	4656	4696	4736	41
46	4777	4817	4858	4899	4940	4981	5022	5064	5105	5147	42
47	5189	5230	5273	5315	5357	5400	5442	5485	5528	5571	43
48	5614	5657	5701	5745	5788	5832	5876	5921	5965	6009	45
49	6054	6099	6144	6189	6234	6280	6325	6371	6417	6463	46
$\bar{1}$,50	0,1 6509	6555	6602	6648	6695	6742	6789	6836	6884	6931	48
51	6979	7027	7075	7123	7172	7220	7269	7318	7367	7416	50
52	7466	7515	7565	7615	7665	7716	7766	7817	7867	7918	52
53	7970	8021	8072	8124	8176	8228	8280	8333	8385	8438	53
54	8491	8544	8598	8651	8705	8759	8813	8867	8922	8977	54
$\bar{1}$,55	0,1 9031	9087	9142	9197	9253	9309	9365	9421	9478	9534	57
56	0,1 9591	9648	9706	9763	9821	9879	9937	9996	*0054	*0113	59
57	0,2 0172	0231	0291	0350	0410	0470	0531	0591	0652	0713	61
58	0774	0836	0897	0959	1021	1084	1146	1209	1272	1336	63
59	1399	1463	1527	1591	1656	1721	1786	1851	1916	1982	66
$\bar{1}$,60	0,2 2048	2114	2181	2248	2315	2382	2450	2517	2585	2654	68
61	2722	2791	2860	2930	3000	3069	3140	3210	3281	3352	71
62	3423	3495	3567	3639	3712	3784	3857	3931	4004	4078	75
63	4153	4227	4302	4377	4453	4528	4604	4681	4758	4835	77
64	4912	4989	5067	5146	5224	5303	5382	5462	5542	5622	81
$\bar{1}$,65	0,2 5703	5784	5865	5946	6028	6111	6193	6276	6359	6443	84
66	6527	6611	6696	6781	6867	6953	7039	7125	7212	7300	87
67	7387	7475	7564	7653	7742	7831	7921	8012	8103	8194	91
68	8285	8377	8470	8563	8656	8750	8844	8938	9033	9128	96
69	0,2 9224	9320	9417	9514	9612	9710	9808	9907	*0006	*0106	100
$\bar{1}$,70	0,3 0206	0307	0408	0510	0612	0714	0818	0921	1025	1130	105
71	1235	1340	1446	1553	1660	1767	1876	1984	2093	2203	110
72	2313	2424	2535	2647	2759	2872	2985	3099	3214	3329	116
73	3445	3561	3678	3795	3914	4032	4151	4271	4392	4513	121
74	4634	4757	4880	5003	5127	5252	5378	5504	5631	5758	128
$\bar{1}$,75	0,3 5886	6015	6145	6275	6406	6537	6670	6803	6936	7071	135
76	7206	7342	7479	7616	7754	7893	8033	8173	8314	8456	143
77	0,3 8599	8743	8887	9033	9179	9326	9473	9622	9771	9922	151
78	0,4 0073	0225	0378	0532	0686	0842	0999	1156	1315	1474	160
79	1634	1796	1958	2121	2285	2451	2617	2784	2953	3122	170
$\bar{1}$,80	0,4 3292	3464	3636	3810	3985	4161	4338	4516	4695	4876	181
81	5057	5240	5424	5609	5798	5983	6172	6362	6554	6747	194
82	6941	7136	7333	7531	7730	7931	8133	8337	8542	8749	208
83	0,4 8957	9166	9377	9590	9804	*0019	*0236	*0455	*0675	*0897	224
84	0,5 1121	1346	1573	1802	2033	2265	2499	2735	2973	3212	242
$\bar{1}$,85	0,5 3454	3697	3942	4190	4439	4690	4943	5199	5456	5718	260
86	5978	6242	6508	6776	7047	7320	7596	7874	8154	8437	285
87	0,5 8722	9010	9300	9593	9889	*0188	*0489	*0793	*1100	*1410	312
88	0,6 1722	2038	2357	2679	3004	3332	3663	3998	4336	4678	345
89	5023	5372	5724	6080	6440	6804	7171	7543	7919	8298	385
$\bar{1}$,90	0,6 8683	9071	9464	9861	*0263	*0670	*1081	*1497	*1918	*2345	431
91	0,7 2776	3213	3656	4104	4558	5017	5483	5955	6433	6917	491
92	7408	7906	8411	8922	9442	9968	*0503	*1045	*1595	*2154	568
93	0,8 2722	3298	3883	4478	5082	5697	6321	6956	7602	8260	669
94	8929	9610	*0303	*1010	*1730	*2463	*3211	*3974	*4752	*5546	811
$\bar{1}$,95	0, 9636	9719	9803	9890	9978	*0069	*0161	*0256	*0354	*0453	103
96	1, 0556	0661	0769	0880	0994	1111	1232	1357	1485	1618	138
97	1756	1898	2046	2199	2357	2523	2695	2875	3063	3260	207
98	3467	3685	3915	4158	4416	4692	4986	5303	5646	6019	409
$\bar{1}$,99	6428	6880	7387	7962	8626	9413	*0377	*1622	*3378	*6383	•
$\bar{1}$,999	2,638	2,684	2,735	2,793	2,860	2,939	3,036	3,161	3,337	3,638	
$\bar{1}$,9999	3,638	3,684	3,735	3,793	3,860	3,939	4,036	4,161	4,337	4,638	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d

IV. — $y=\frac{1+x}{1-x}$, $x=\frac{y-1}{y+1}$.

Log x.	Log y. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d
$\bar{5}$,	0,00 001	001	001	002	002	003	003	004	005	007	2
$\bar{4}$,	009	011	014	017	022	027	035	044	055	069	18
$\bar{3}$, 0	0,00 087	089	091	093	095	097	100	102	104	107	2
1	109	112	115	117	120	123	126	128	131	135	3
2	138	141	144	148	151	154	158	162	166	169	4
3	173	177	181	186	190	194	199	204	208	213	5
4	218	223	228	234	239	245	251	256	262	268	7
$\bar{3}$, 5	0,00 275	281	288	294	301	308	315	323	330	338	8
6	346	354	362	371	379	388	397	406	416	425	10
7	435	445	455	466	477	488	500	511	523	536	12
8	548	561	574	587	601	615	629	644	659	674	14
9	690	706	722	739	757	774	792	811	830	849	20
$\bar{2}$, 0	0,0 0869	0889	0910	0931	0952	0975	0997	1021	1044	1069	23
1	1094	1119	1145	1172	1199	1227	1256	1285	1315	1345	32
2	1377	1409	1442	1475	1510	1545	1581	1618	1655	1694	36
3	1733	1774	1815	1857	1901	1945	1990	2037	2084	2133	40
4	2182	2233	2285	2338	2393	2449	2506	2564	2624	2685	63
$\bar{2}$, 5	0,0 2748	2812	2877	2944	3013	3083	3155	3229	3304	3381	73
6	3460	3540	3623	3707	3794	3882	3973	4066	4161	4258	90
7	4357	4459	4563	4669	4778	4890	5004	5121	5240	5362	122
8	5488	5616	5747	5881	6019	6159	6303	6451	6602	6756	158
9	6914	7076	7241	7411	7584	7762	7944	8130	8320	8515	200
$\bar{1}$,00	0,3 8715	8735	8756	8776	8796	8817	8837	8858	8878	8899	20
01	8919	8940	8961	8982	9003	9023	9044	9065	9086	9108	21
02	9129	9150	9171	9192	9214	9235	9257	9278	9300	9321	22
03	9343	9365	9386	9408	9430	9452	9474	9496	9518	9540	22
04	9562	9585	9607	9629	9652	9674	9696	9719	9742	9764	23
$\bar{1}$,05	0,0 9787	9810	9832	9855	9878	9901	9924	9947	9970	9994	23
06	0,1 0017	0040	0064	0087	0110	0134	0158	0181	0205	0229	23
07	0252	0276	0300	0324	0348	0372	0396	0421	0445	0469	24
08	0493	0518	0542	0567	0592	0616	0641	0666	0691	0715	25
09	0740	0765	0790	0816	0841	0866	0891	0917	0942	0968	26
$\bar{1}$,10	0,1 0993	1019	1045	1070	1096	1122	1148	1174	1200	1226	26
11	1252	1278	1305	1331	1357	1384	1410	1437	1464	1490	27
12	1517	1544	1571	1598	1625	1652	1679	1707	1734	1761	28
13	1789	1816	1844	1872	1899	1927	1955	1983	2011	2039	28
14	2067	2095	2123	2152	2180	2208	2237	2266	2294	2323	29
$\bar{1}$,15	0,1 2352	2381	2410	2439	2468	2497	2526	2555	2585	2614	29
16	2643	2673	2703	2732	2762	2792	2822	2852	2882	2912	30
17	2942	2973	3003	3033	3064	3094	3125	3156	3187	3217	31
18	3248	3279	3311	3342	3373	3404	3436	3467	3499	3530	32
19	3562	3594	3626	3658	3690	3722	3754	3786	3818	3851	32
$\bar{1}$,20	0,1 3883	3916	3948	3981	4014	4047	4080	4113	4146	4179	33
21	4212	4246	4279	4313	4346	4380	4414	4448	4481	4515	35
22	4550	4584	4618	4652	4687	4721	4756	4791	4825	4860	35
23	4895	4930	4965	5000	5036	5071	5106	5142	5178	5213	36
24	5249	5285	5321	5357	5393	5429	5466	5502	5539	5575	37
$\bar{1}$,25	0,1 5612	5649	5686	5723	5760	5797	5834	5871	5909	5946	38
26	5984	6021	6059	6097	6135	6173	6211	6249	6288	6326	39
27	6365	6403	6442	6481	6520	6559	6598	6637	6677	6716	39
28	6755	6795	6835	6874	6914	6954	6994	7035	7075	7115	41
29	7156	7196	7237	7278	7319	7360	7401	7442	7483	7525	41
$\bar{1}$,30	0,1 7566	7608	7650	7691	7733	7775	7817	7860	7902	7945	42
31	7987	8030	8073	8115	8158	8201	8245	8288	8331	8375	44
32	8419	8462	8506	8550	8594	8638	8683	8727	8772	8816	45
33	8861	8906	8951	8996	9041	9087	9132	9178	9223	9269	46
34	9315	9361	9407	9453	9500	9546	9593	9639	9686	9733	47
$\bar{1}$,35	0,1 9780	9827	9875	9922	9970	*0017	*0065	*0113	*0161	*0209	48
36	0,2 0258	0306	0355	0403	0452	0501	0550	0599	0649	0698	50
37	0748	0797	0847	0897	0947	0997	1047	1098	1149	1199	51
38	1250	1301	1352	1403	1455	1506	1558	1610	1662	1714	52
39	1766	1818	1871	1923	1976	2029	2082	2135	2188	2241	54
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d

$$y = \frac{1+x}{1-x}, \qquad x = \frac{y-1}{y+1}.$$

Log *x*.	Log *y*.											
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d
$\bar{1}$,40	0,2	2295	2349	2403	2457	2511	2565	2619	2674	2729	2783	55
41		2838	2893	2949	3004	3060	3115	3171	3227	3283	3340	56
42		3396	3453	3509	3566	3623	3681	3738	3795	3853	3911	58
43		3969	4027	4085	4144	4202	4261	4320	4379	4438	4497	60
44		4557	4617	4676	4736	4797	4857	4917	4978	5039	5100	61
$\bar{1}$,45	0,2	5161	5222	5284	5346	5407	5469	5531	5594	5656	5719	63
46		5782	5845	5908	5971	6035	6098	6162	6226	6291	6355	65
47		6420	6484	6549	6614	6680	6745	6811	6877	6943	7009	66
48		7075	7142	7208	7275	7342	7410	7477	7545	7613	7681	68
49		7749	7817	7886	7955	8024	8093	8162	8232	8302	8372	70
$\bar{1}$,50	0,2	8442	8512	8583	8654	8725	8796	8867	8939	9011	9083	72
51		9155	9227	9300	9372	9446	9519	9592	9666	9740	9814	74
52	0,2	9888	9962	*0037	*0112	*0187	*0263	*0338	*0414	*0490	*0566	77
53	0,3	0643	0719	0796	0873	0951	1028	1106	1184	1262	1341	78
54		1419	1498	1578	1657	1737	1816	1897	1977	2058	2138	81
$\bar{1}$,55	0,3	2219	2301	2382	2464	2546	2628	2711	2794	2877	2960	83
56		3043	3127	3211	3296	3380	3465	3550	3635	3721	3807	86
57		3893	3979	4066	4152	4240	4327	4415	4503	4591	4679	89
58		4768	4857	4946	5036	5126	5216	5306	5397	5488	5579	92
59		5671	5763	5855	5947	6040	6133	6226	6320	6413	6508	94
$\bar{1}$,60	0,3	6602	6697	6792	6887	6983	7079	7175	7272	7369	7466	98
61		7564	7661	7760	7858	7957	8056	8155	8255	8355	8456	100
62		8556	8657	8759	8861	8963	9065	9168	9271	9374	9478	104
63	0,3	9582	9687	9792	9897	*0002	*0108	*0214	*0321	*0428	*0535	108
64	0,4	0643	0751	0859	0968	1077	1187	1297	1407	1518	1629	111
$\bar{1}$,65	0,4	1740	1852	1964	2077	2190	2303	2417	2531	2645	2760	116
66		2876	2991	3108	3224	3341	3459	3576	3695	3813	3932	120
67		4052	4172	4292	4413	4534	4656	4778	4901	5024	5147	124
68		5271	5396	5521	5646	5772	5898	6025	6152	6280	6408	128
69		6536	6665	6795	6925	7056	7187	7318	7450	7583	7716	134
$\bar{1}$,70	0,4	7850	7984	8118	8254	8389	8526	8662	8800	8937	9076	139
71	0,4	9215	9354	9494	9635	9776	9918	*0060	*0203	*0346	*0490	145
72	0,5	0635	0780	0925	1072	1219	1366	1514	1663	1813	1963	150
73		2113	2264	2416	2569	2722	2876	3030	3185	3341	3498	157
74		3655	3813	3971	4130	4290	4451	4612	4774	4937	5100	164
$\bar{1}$,75	0,5	5264	5429	5594	5761	5928	6096	6264	6434	6604	6775	171
76		6946	7119	7292	7466	7641	7817	7993	8170	8349	8528	179
77	0,5	8707	8888	9070	9252	9435	9620	9805	9991	*0178	*0365	189
78	0,6	0554	0744	0935	1126	1319	1512	1707	1902	2098	2296	198
79		2494	2694	2894	3096	3298	3502	3707	3913	4120	4328	209
$\bar{1}$,80	0,6	4537	4747	4958	5171	5384	5599	5815	6032	6251	6470	221
81		6691	6913	7137	7361	7587	7814	8043	8272	8503	8736	234
82	0,6	8970	9205	9442	9679	9919	*0160	*0402	*0646	*0891	*1138	248
83	0,7	1386	1636	1887	2140	2395	2651	2909	3168	3429	3692	265
84		3957	4223	4491	4761	5032	5306	5581	5858	6137	6418	283
$\bar{1}$,85	0,7	6701	6986	7273	7562	7852	8145	8441	8738	9037	9339	303
86	0,7	9642	9948	*0257	*0567	*0880	*1196	*1514	*1834	*2157	*2482	328
87	0,8	2810	3140	3473	3809	4148	4489	4833	5180	5530	5883	355
88		6238	6597	6959	7324	7693	8064	8439	8818	9199	9585	388
89		9973	*0366	*0762	*1162	*1566	*1973	*2385	*2801	*3220	*3644	429
$\bar{1}$,90	0,9	4073	4505	4943	5384	5831	6282	6738	7199	7665	8136	476
91		8612	9094	9581	*0074	*0573	*1078	*1589	*2106	*2629	*3159	536
92	1,0	3695	4238	4788	5346	5911	6483	7063	7651	8247	8852	614
93		9466	*0088	*0719	*1360	*2011	*2671	*3342	*4023	*4716	*5420	715
94	1,1	6135	6863	7603	8356	9123	9903	*0698	*1508	*2333	*3174	858
$\bar{1}$,95	1,	2403	2491	2580	2671	2765	2860	2957	3057	3159	3264	107
96		3371	3480	3593	3709	3828	3950	4076	4205	4339	4476	143
97		4619	4766	4918	5076	5240	5410	5587	5772	5965	6167	212
98		6379	6601	6836	7084	7347	7628	7927	8249	8597	8974	414
99		9388	9846	*0357	*0937	*1607	*2398	*3368	*4617	*6378	*9388	»
$\bar{1}$,999		2,939	2,985	3,036	3,094	3,161	3,240	3,337	3,462	3,638	3,939	
$\bar{1}$,9999		3,939	3,985	4,036	4,094	4,161	4,240	4,337	4,462	4,638	4,939	
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d

V. — TABLE ABRÉGÉE POUR LE CALCUL

		1,0	1,000	1,0000 0	1,0000 000
		0	·000	0000 0	0000 000
99	9956 3519 4597 550	409 9769 2423 491	4 2973 8851 434	429 9494 088	4 2995 152
98	9912 2607 5692 495	406 0234 0114 073	4 2540 0180 206	425 6065 068	4 2560 857
97	9867 7173 4266 245	402 0662 7574 711	4 2106 1465 634	421 2636 043	4 2126 563
96	9822 7123 3039 568	398 1055 4148 350	4 1672 2707 716	416 9207 014	4 1692 268
95	9777 2360 5288 848	394 1411 9176 137	4 1238 3906 453	412 5777 981	4 1257 974
94	9731 2785 3599 699	390 1732 1997 412	4 0804 5061 842	408 2348 943	4 0823 679
93	9684 8294 8553 935	386 2016 1949 703	4 0370 6173 883	403 8919 901	4 0389 385
92	9637 8782 7345 555	382 2263 8368 718	3 9936 7242 575	399 5490 854	3 9955 090
91	9590 4139 2321 094	378 2475 0588 342	3 9502 8267 918	395 2061 803	3 9520 796
90	9542 4250 9439 325	374 2649 7940 624	3 9068 9249 910	390 8632 748	3 9086 502
89	9493 9000 6644 913	370 2787 9755 775	3 8635 0188 551	386 5203 689	3 8652 207
88	9444 8267 2150 169	366 2889 5362 161	3 8201 1083 840	382 1774 625	3 8217 913
87	9395 1925 2618 619	362 2954 4086 295	3 7767 1935 775	377 8345 557	3 7783 618
86	9344 9845 1243 568	358 2982 5252 828	3 7333 2744 357	373 4916 484	3 7349 324
85	9294 1892 5714 293	354 2973 8184 548	3 6899 3509 583	369 1487 407	3 6915 029
84	9242 7928 6061 882	350 2928 2202 368	3 6465 4231 454	364 8058 326	3 6480 735
83	9190 7809 2376 074	346 2845 6625 320	3 6031 4909 969	360 4629 241	3 6046 441
82	9138 1385 2383 717	342 2726 0770 551	3 5597 5545 125	356 1200 151	3 5612 146
81	9084 8501 8878 650	338 2569 3933 310	3 5163 6136 924	351 7771 056	3 5177 852
80	9030 8998 6991 944	334 2375 5486 950	3 4729 6685 364	347 4341 958	3 4743 557
79	8976 2709 1290 441	330 2144 4682 911	3 4295 7190 443	343 0912 855	3 4309 263
78	8920 9460 2690 480	326 1876 0850 720	3 3861 7652 161	338 7483 748	3 3874 968
77	8864 9072 5172 482	322 1570 3297 982	3 3427 8070 518	334 4054 636	3 3440 674
76	8808 1359 2280 791	318 1227 1330 370	3 2993 8445 512	330 0625 520	3 3006 379
75	8750 6126 3391 700	314 0846 4251 624	3 2559 8777 143	325 7196 400	3 2572 085
74	8692 3171 9730 976	310 0428 1363 537	3 2125 9065 409	321 3767 275	3 2137 790
73	8633 2286 0120 456	305 9972 1965 951	3 1691 9310 310	317 0338 146	3 1703 496
72	8573 3249 6431 268	301 9478 5356 751	3 1257 9511 845	312 6909 013	3 1269 202
71	8512 5834 8719 075	297 8947 0831 856	3 0823 9670 012	308 3479 875	3 0834 907
70	8450 9804 0014 257	293 8377 7685 210	3 0389 9784 812	304 0050 733	3 0400 613
69	8388 4909 0737 255	289 7770 5208 778	2 9955 9856 244	299 6621 587	2 9966 318
68	8325 0891 2706 236	285 7125 2692 538	2 9521 9884 305	295 3192 436	2 9532 024
67	8260 7480 2700 826	281 6441 9424 470	2 9087 9868 997	290 9763 281	2 9097 729
66	8195 4393 5541 869	277 5720 4690 553	2 8653 9810 317	286 6334 122	2 8663 435
65	8129 1335 6642 856	273 4960 7774 757	2 8219 9708 264	282 2904 958	2 8229 140
64	8061 7997 3983 887	269 4162 7959 029	2 7785 9562 839	277 9475 790	2 7794 846
63	7993 4054 9453 582	265 3326 4523 297	2 7351 9374 040	273 6046 617	2 7360 551
62	7923 9168 9498 254	261 2451 6745 450	2 6917 9141 866	269 2617 441	2 6926 257
61	7853 2983 5010 767	257 1538 3901 341	2 6483 8866 316	264 9188 260	2 6491 963
60	7781 5125 0383 644	253 0586 5264 770	2 6049 8547 390	260 5759 074	2 6057 668
59	7708 5201 1642 144	248 9596 0107 485	2 5615 8185 087	256 2329 884	2 5623 374
58	7634 2799 3562 937	244 8566 7699 167	2 5181 7779 405	251 8900 690	2 5189 079
57	7558 7485 5672 491	240 7498 7307 426	2 4747 7330 344	247 5471 492	2 4754 785
56	7481 8802 7006 200	236 6391 8197 793	2 4313 6837 903	243 2042 289	2 4320 490
55	7403 6268 9494 244	232 5245 9633 711	2 3879 6302 082	238 8613 082	2 3886 196
54	7323 9375 9822 969	228 4061 0876 528	2 3445 5722 878	234 5183 870	2 3451 901
53	7242 7586 9600 789	224 2837 1185 487	2 3011 5100 292	230 1754 654	2 3017 607
52	7160 0334 3634 799	220 1573 9817 720	2 2577 4434 323	225 8325 434	2 2583 312
51	7075 7017 6097 936	216 0271 6028 242	2 2143 3724 969	221 4896 210	2 2149 018
50	6989 7000 4336 019	211 8929 9069 938	2 1709 2972 230	217 1466 981	2 1714 724

Les deux premiers chiffres significatifs de $\frac{1}{n}$.

n		n		n		n		n		n		n		n		n		n		n	
99	10	83	12	71	14	62	16	55	18	50	20	45	22	41	24	38	26	35	28	33	30
90	11	76	13	66	15	58	17	52	19	47	21	43	23	40	25	37	27	34	29	32	31

DES LOGARITHMES VULGAIRES A QUINZE DÉCIMALES.

		1,0	1,000	1,0000 0	1,0000 000
		0	000	0000 0	0000 000
49	6901 9608 0028 514	207 7548 8193 558	2 1275 2176 105	212 8037 748	2 1280 429
48	6812 4123 7375 587	203 6128 2647 708	2 0841 1336 593	208 4608 510	2 0846 135
47	6720 9785 7935 717	199 4668 1678 842	2 0407 0453 694	204 1179 268	2 0411 840
46	6627 5783 1681 574	195 3168 4531 255	1 9972 9527 405	199 7750 022	1 9977 546
45	6532 1251 3775 344	191 1629 0447 073	1 9538 8557 727	195 4320 771	1 9543 251
44	6434 5267 6486 187	187 0049 8666 243	1 9104 7544 659	191 0891 516	1 9108 957
43	6334 6845 5579 587	182 8430 8426 531	1 8670 6488 200	186 7462 257	1 8674 662
42	6232 4929 0397 900	178 6771 8963 506	1 8236 5388 348	182 4032 994	1 8240 368
41	6127 8385 6719 735	174 5072 9510 536	1 7802 4245 103	178 0603 726	1 7806 073
40	6020 5999 1327 962	170 3333 9298 780	1 7368 3058 465	173 7174 453	1 7371 779
39	5910 6460 7026 499	166 1554 7557 177	1 6934 1828 432	169 3745 177	1 6937 484
38	5797 8359 6616 810	161 9735 3512 439	1 6500 0555 003	165 0315 896	1 6503 190
37	5682 0172 4066 995	157 7875 6389 041	1 6065 9238 178	160 6886 610	1 6068 896
36	5563 0250 0767 287	153 5975 5409 214	1 5631 7877 955	156 3457 321	1 5634 601
35	5440 6804 4350 276	149 4034 9792 937	1 5197 6474 334	152 0028 027	1 5200 307
34	5314 7891 7042 255	145 2053 8757 924	1 4763 5027 314	147 6598 728	1 4766 012
33	5185 1393 9877 887	141 0032 1519 621	1 4329 3536 895	143 3169 426	1 4331 718
32	5051 4997 8319 906	136 7969 7291 193	1 3895 2003 074	138 9740 119	1 3897 423
31	4913 6169 3834 273	132 5866 5283 517	1 3461 0425 852	134 6310 807	1 3463 129
30	4771 2125 4719 662	128 3722 4705 172	1 3026 8805 227	130 2881 491	1 3028 834
29	4623 9799 7898 956	124 1537 4762 433	1 2592 7141 199	125 9452 171	1 2594 540
28	4471 5803 1342 219	119 9311 4659 257	1 2158 5433 766	121 6022 847	1 2160 245
27	4313 6376 4158 987	115 7044 3597 278	1 1724 3682 929	117 2593 518	1 1725 951
26	4149 7334 7970 818	111 4736 0775 797	1 1290 1888 685	112 9164 185	1 1291 656
25	3979 4000 8672 038	107 2386 5391 773	1 0856 0051 035	108 5734 848	1 0857 362
24	3802 1124 1711 806	102 9995 6639 812	1 0421 8169 977	104 2305 506	1 0423 067
23	3617 2783 6017 593	098 7563 3712 160	0 9987 6245 510	099 8876 160	0 9988 773
22	3424 2268 0822 206	094 5089 5798 694	0 9553 4277 633	095 5446 809	0 9554 478
21	3222 1929 4733 919	090 2574 2086 910	0 9119 2266 347	091 2017 454	0 9120 184
20	3010 2999 5663 981	086 0017 1761 918	0 8685 0211 649	086 8588 095	0 8685 890
19	2787 5360 0952 829	081 7418 4006 426	0 8250 8113 539	082 5158 732	0 8251 595
18	2552 7250 5103 306	077 4777 8000 740	0 7816 5972 016	078 1729 364	0 7817 301
17	2304 4892 1378 274	073 2095 2922 745	0 7382 3787 079	073 8299 992	0 7383 006
16	2041 1998 2655 925	068 9370 7947 900	0 6948 1558 728	069 4870 615	0 6948 712
15	1760 9125 9055 681	064 6604 2249 232	0 6513 9286 961	065 1441 234	0 6514 417
14	1461 2803 5678 238	060 3795 4997 317	0 6079 6971 778	060 8011 849	0 6080 123
13	1139 4335 2306 837	056 0944 5360 280	0 5645 4613 177	056 4582 459	0 5645 828
12	0791 8124 6047 625	051 8051 2503 780	0 5211 2211 158	052 1153 066	0 5211 534
11	0413 9268 5158 225	047 5115 5591 001	0 4776 9765 720	047 7723 667	0 4777 239
10	....	043 2137 3782 643	0 4342 7276 863	043 4294 265	0 4342 945
09	....	038 9116 6236 911	0 3908 4744 584	039 0864 858	0 3908 650
08	....	034 6053 2109 506	0 3474 2168 884	034 7435 447	0 3474 356
07	....	030 2947 0553 618	0 3039 9549 761	030 4006 031	0 3040 061
06	....	025 9798 0719 909	0 2605 6887 215	026 0576 611	0 2605 767
05	....	021 6606 1756 508	0 2171 4181 245	021 7147 187	0 2171 472
04	....	017 3371 2809 001	0 1737 1431 850	017 3717 758	0 1737 178
03	....	013 0093 3020 418	0 1302 8639 028	013 0288 325	0 1302 883
02	....	008 6772 1531 227	0 0868 5802 780	008 6858 888	0 0868 589
01	....	004 3407 7479 319	0 0434 2923 104	004 3429 446	0 0434 294

Les deux premiers chiffres significatifs de $\frac{1}{n}$.

n		n		n		n		n		n		n		n		n		n		n	
31	32	**29**	34	**27**	37	**25**	40	**23**	43	**21**	47	**19**	52	**17**	58	**15**	66	**13**	76	**11**	90
30	33	**28**	35	**26**	38	**24**	41	**22**	45	**20**	50	**18**	55	**16**	62	**14**	71	**12**	83	**10**	100

VI. — LOGARITHMES NATURELS

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
1,0	0,0000	0100	0198	0296	0392	0488	0583	0677	0770	0862	91
1,1	0953	1044	1133	1222	1310	1398	1484	1570	1655	1740	83
1,2	1823	1906	1989	2070	2151	2231	2311	2390	2469	2546	78
1,3	2624	2700	2776	2852	2927	3001	3075	3148	3221	3293	72
1,4	3365	3436	3507	3577	3646	3716	3784	3853	3920	3988	67
1,5	0,4055	4121	4187	4253	4318	4383	4447	4511	4574	4637	63
1,6	4700	4762	4824	4886	4947	5008	5068	5128	5188	5247	59
1,7	5306	5365	5423	5481	5539	5596	5653	5710	5766	5822	56
1,8	5878	5933	5988	6043	6098	6152	6206	6259	6313	6366	53
1,9	6419	6471	6523	6575	6627	6678	6729	6780	6831	6881	50
2,0	0,6931	6981	7031	7080	7129	7178	7227	7275	7324	7372	47
2,1	7419	7467	7514	7561	7608	7655	7701	7747	7793	7839	46
2,2	7885	7930	7975	8020	8065	8109	8154	8198	8242	8286	43
2,3	8329	8372	8416	8459	8502	8544	8587	8629	8671	8713	42
2,4	8755	8796	8838	8879	8920	8961	9002	9042	9083	9123	40
2,5	0,9163	9203	9243	9282	9322	9361	9400	9439	9478	9517	38
2,6	9555	9594	9632	9670	9708	9746	9783	9821	9858	9895	38
2,7	0,9933	9969	*0006	*0043	*0080	*0116	*0152	*0188	*0225	*0260	36
2,8	1,0296	0332	0367	0403	0438	0473	0508	0543	0578	0613	34
2,9	0647	0682	0716	0750	0784	0818	0852	0886	0919	0953	33
3,0	1,0986	1019	1053	1086	1119	1151	1184	1217	1249	1282	32
3,1	1314	1346	1378	1410	1442	1474	1506	1537	1569	1600	32
3,2	1632	1663	1694	1725	1756	1787	1817	1848	1878	1909	30
3,3	1939	1969	2000	2030	2060	2090	2119	2149	2179	2208	30
3,4	2238	2267	2296	2326	2355	2384	2413	2442	2470	2499	29
3,5	1,2528	2556	2585	2613	2641	2669	2698	2726	2754	2782	27
3,6	2809	2837	2865	2892	2920	2947	2975	3002	3029	3056	27
3,7	3083	3110	3137	3164	3191	3218	3244	3271	3297	3324	26
3,8	3350	3376	3403	3429	3455	3481	3507	3533	3558	3584	26
3,9	3610	3635	3661	3686	3712	3737	3762	3788	3813	3838	25
4,0	1,3863	3888	3913	3938	3962	3987	4012	4036	4061	4085	25
4,1	4110	4134	4159	4183	4207	4231	4255	4279	4303	4327	24
4,2	4351	4375	4398	4422	4446	4469	4493	4516	4540	4563	23
4,3	4586	4609	4633	4656	4679	4702	4725	4748	4770	4793	23
4,4	4816	4839	4861	4884	4907	4929	4951	4974	4996	5019	22
4,5	1,5041	5063	5085	5107	5129	5151	5173	5195	5217	5239	22
4,6	5261	5282	5304	5326	5347	5369	5390	5412	5433	5454	22
4,7	5476	5497	5518	5539	5560	5581	5602	5623	5644	5665	21
4,8	5686	5707	5728	5748	5769	5790	5810	5831	5851	5872	20
4,9	5892	5913	5933	5953	5974	5994	6014	6034	6054	6074	20
5,0	1,6094	6114	6134	6154	6174	6194	6214	6233	6253	6273	19
5,1	6292	6312	6332	6351	6371	6390	6409	6429	6448	6467	20
5,2	6487	6506	6525	6544	6563	6582	6601	6620	6639	6658	19
5,3	6677	6696	6715	6734	6752	6771	6790	6808	6827	6845	19
5,4	6864	6882	6901	6919	6938	6956	6974	6993	7011	7029	18
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Caractéristiques fractionnaires, ou logarithmes de $10^{\pm n}$.

n	+	−	n	+	−	n	+	−
1	2,3026	$\overline{3}$,6974	6	13,8155	$\overline{14}$,1845	11	25,3284	$\overline{26}$,6716
2	4,6052	$\overline{5}$,3948	7	16,1181	$\overline{17}$,8819	12	27,6310	$\overline{28}$,3690
3	6,9078	$\overline{7}$,0922	8	18,4207	$\overline{19}$,5793	13	29,9336	$\overline{30}$,0664
4	9,2103	$\overline{10}$,7897	9	20,7233	$\overline{21}$,2767	14	32,2362	$\overline{33}$,7638
5	11,5129	$\overline{12}$,4871	10	23,0259	$\overline{24}$,9741	15	34,5388	$\overline{35}$,4612

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
5,5	1,7047	7066	7084	7102	7120	7138	7156	7174	7192	7210	18
5,6	7228	7246	7263	7281	7299	7317	7334	7352	7370	7387	18
5,7	7405	7422	7440	7457	7475	7492	7509	7527	7544	7561	18
5,8	7579	7596	7613	7630	7647	7664	7681	7699	7716	7733	17
5,9	7750	7766	7783	7800	7817	7834	7851	7867	7884	7901	17
6,0	1,7918	7934	7951	7967	7984	8001	8017	8034	8050	8066	17
6,1	8083	8099	8116	8132	8148	8165	8181	8197	8213	8229	16
6,2	8245	8262	8278	8294	8310	8326	8342	8358	8374	8390	15
6,3	8405	8421	8437	8453	8469	8485	8500	8516	8532	8547	16
6,4	8563	8579	8594	8610	8625	8641	8656	8672	8687	8703	15
6,5	1,8718	8733	8749	8764	8779	8795	8810	8825	8840	8856	15
6,6	8871	8886	8901	8916	8931	8946	8961	8976	8991	9006	15
6,7	9021	9036	9051	9066	9081	9095	9110	9125	9140	9155	14
6,8	9169	9184	9199	9213	9228	9242	9257	9272	9286	9301	14
6,9	9315	9330	9344	9359	9373	9387	9402	9416	9430	9445	14
7,0	1,9459	9473	9488	9502	9516	9530	9544	9559	9573	9587	14
7,1	9601	9615	9629	9643	9657	9671	9685	9699	9713	9727	14
7,2	9741	9755	9769	9782	9796	9810	9824	9838	9851	9865	14
7,3	1,9879	9892	9906	9920	9933	9947	9961	9974	9988	*0001	14
7,4	2,0015	0028	0042	0055	0069	0082	0096	0109	0122	0136	13
7,5	2,0149	0162	0176	0189	0202	0215	0229	0242	0255	0268	13
7,6	0281	0295	0308	0321	0334	0347	0360	0373	0386	0399	13
7,7	0412	0425	0438	0451	0464	0477	0490	0503	0516	0528	13
7,8	0541	0554	0567	0580	0592	0605	0618	0631	0643	0656	13
7,9	0669	0681	0694	0707	0719	0732	0744	0757	0769	0782	12
8,0	2,0794	0807	0819	0832	0844	0857	0869	0882	0894	0906	13
8,1	0919	0931	0943	0956	0968	0980	0992	1005	1017	1029	12
8,2	1041	1054	1066	1078	1090	1102	1114	1126	1138	1150	13
8,3	1163	1175	1187	1199	1211	1223	1235	1247	1258	1270	12
8,4	1282	1294	1306	1318	1330	1342	1353	1365	1377	1389	12
8,5	2,1401	1412	1424	1436	1448	1459	1471	1483	1494	1506	12
8,6	1518	1529	1541	1552	1564	1576	1587	1599	1610	1622	11
8,7	1633	1645	1656	1668	1679	1691	1702	1713	1725	1736	12
8,8	1748	1759	1770	1782	1793	1804	1815	1827	1838	1849	12
8,9	1861	1872	1883	1894	1905	1917	1928	1939	1950	1961	11
9,0	2,1972	1983	1994	2006	2017	2028	2039	2050	2061	2072	11
9,1	2083	2094	2105	2116	2127	2138	2148	2159	2170	2181	11
9,2	2192	2203	2214	2225	2235	2246	2257	2268	2279	2289	11
9,3	2300	2311	2322	2332	2343	2354	2364	2375	2386	2396	11
9,4	2407	2418	2428	2439	2450	2460	2471	2481	2492	2502	11
9,5	2,2513	2523	2534	2544	2555	2565	2576	2586	2597	2607	11
9,6	2618	2628	2638	2649	2659	2670	2680	2690	2701	2711	10
9,7	2721	2732	2742	2752	2762	2773	2783	2793	2803	2814	10
9,8	2824	2834	2844	2854	2865	2875	2885	2895	2905	2915	10
9,9	2925	2935	2946	2956	2966	2976	2986	2996	3006	3016	10
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Nombres usuels avec leurs logarithmes naturels.

Nombres.	Log.	Nombres.	Log.
Rapp. de la circ. au diam. $= \pi$..	1,1447	Pesanteur $g = 9,8088$.........	2,2833
Rayon en minutes $= 3438'$.....	8,1426	$\sqrt{2g} = 4,4292$................	1,4882
Rayon en secondes $= 206265''$..	12,2369	$\frac{\pi}{\sqrt{g}} = 1,0031$................	0,0031
Log. vulg. $e = M = 0,4343$.....	$\bar{1}$,1660		
Log. nat. $10 = \frac{1}{M} = 2,3026$.....	0,8340	Pend. à sec. $= \frac{g}{\pi^2} = 0,9938$....	$\bar{1}$,9938
		$e^e = 15,1543$................	2,7183

IX. — VALEURS NATURELLES

Arc.			Sinus	Coséc.	Tang.	Cotang.	Séc.	Cos.			
R 0,	0h m	° '	0,		0,				' °	5h m	R
0000	0	0 0	0000	∞	0000	∞	1,0000	1,0000	0 90	60	1,5708
0044	1	15	0044	229,1838	0044	229,1817	0000	0000	45	59	5664
0087	2	30	0087	114,5930	0087	114,5887	0000	0000	30	58	5621
0131	3	45	0131	76,3966	0131	76,3900	0001	0,9999	15	57	5577
0175	4	1 0	0175	57,2987	0175	57,2900	1,0002	0,9998	0 89	56	1,5533
0218	5	15	0218	45,8403	0218	45,8294	0002	9998	45	55	5490
0262	6	30	0262	38,2016	0262	38,1885	0003	9997	30	54	5446
0305	7	45	0305	32,7455	0306	32,7303	0005	9995	15	53	5403
0349	8	2 0	0349	28,6537	0349	28,6363	1,0006	0,9994	0 88	52	1,5359
0393	9	15	0393	25,4713	0393	25,4517	0008	9992	45	51	5315
0436	10	30	0436	22,9256	0437	22,9038	0010	9990	30	50	5272
0480	11	45	0480	20,8428	0480	20,8188	0012	9988	15	49	5228
0524	12	3 0	0523	19,1073	0524	19,0811	1,0014	0,9986	0 87	48	1,5184
0567	13	15	0567	17,6389	0568	17,6106	0016	9984	45	47	5141
0611	14	30	0610	16,3804	0612	16,3499	0019	9981	30	46	5097
0654	15	45	0654	15,2898	0655	15,2571	0021	9979	15	45	5053
0698	16	4 0	0698	14,3356	0699	14,3007	1,0024	0,9976	0 86	44	1,5010
0742	17	15	0741	13,4937	0743	13,4566	0028	9973	45	43	4966
0785	18	30	0785	12,7455	0787	12,7062	0031	9969	30	42	4923
0829	19	45	0828	12,0761	0831	12,0346	0034	9966	15	41	4879
0873	20	5 0	0872	11,4737	0875	11,4301	1,0038	0,9962	0 85	40	1,4835
0916	21	15	0915	10,9288	0919	10,8829	0042	9958	45	39	4792
0960	22	30	0958	10,4334	0963	10,3854	0046	9954	30	38	4748
1004	23	45	1002	9,9812	1007	9,9310	0051	9950	15	37	4704
1047	24	6 0	1045	9,5668	1051	9,5144	1,0055	0,9945	0 84	36	1,4661
1091	25	15	1089	9,1855	1095	9,1309	0060	9941	45	35	4617
1134	26	30	1132	8,8337	1139	8,7769	0065	9936	30	34	4573
1178	27	45	1175	8,5079	1184	8,4490	0070	9931	15	33	4530
1222	28	7 0	1219	8,2055	1228	8,1443	1,0075	0,9925	0 83	32	1,4486
1265	29	15	1262	7,9240	1272	7,8606	0081	9920	45	31	4443
1309	30	30	1305	7,6613	1317	7,5958	0086	9914	30	30	4399
1353	31	45	1349	7,4156	1361	7,3479	0092	9909	15	29	4355
1396	32	8 0	1392	7,1853	1405	7,1154	1,0098	0,9903	0 82	28	1,4312
1440	33	15	1435	6,9690	1450	6,8969	0105	9897	45	27	4268
1484	34	30	1478	6,7655	1495	6,6912	0111	9890	30	26	4224
1527	35	45	1521	6,5736	1539	6,4971	0118	9884	15	25	4181
1571	36	9 0	1564	6,3925	1584	6,3138	1,0125	0,9877	0 81	24	1,4137
1614	37	15	1607	6,2211	1629	6,1402	0132	9870	45	23	4093
1658	38	30	1650	6,0589	1673	5,9758	0139	9863	30	22	4050
1702	39	45	1693	5,9049	1718	5,8197	0147	9856	15	21	4006
1745	40	10 0	1736	5,7588	1763	5,6713	1,0154	0,9848	0 80	20	1,3963
1789	41	15	1779	5,6198	1808	5,5301	0162	9840	45	19	3919
1833	42	30	1822	5,4874	1853	5,3955	0170	9833	30	18	3875
1876	43	45	1865	5,3612	1899	5,2672	0179	9825	15	17	3832
1920	44	11 0	1908	5,2408	1944	5,1446	1,0187	0,9816	0 79	16	1,3788
1963	45	15	1951	5,1258	1989	5,0273	0196	9808	45	15	3744
2007	46	30	1994	5,0159	2035	4,9152	0205	9799	30	14	3701
2051	47	45	2036	4,9106	2080	4,8077	0214	9790	15	13	3657
2094	48	12 0	2079	4,8097	2126	4,7046	1,0223	0,9781	0 78	12	1,3614
2138	49	15	2122	4,7130	2171	4,6057	0233	9772	45	11	3570
2182	50	30	2164	4,6202	2217	4,5107	0243	9763	30	10	3526
2225	51	45	2207	4,5311	2263	4,4194	0253	9753	15	9	3483
2269	52	13 0	2250	4,4454	2309	4,3315	1,0263	0,9744	0 77	8	1,3439
2313	53	15	2292	4,3630	2355	4,2468	0273	9734	45	7	3395
2356	54	30	2334	4,2837	2401	4,1653	0284	9724	30	6	3352
2400	55	45	2377	4,2072	2447	4,0867	0295	9713	15	5	3308
2443	56	14 0	2419	4,1336	2493	4,0108	1,0306	0,9703	0 76	4	1,3265
2487	57	15	2462	4,0625	2540	3,9375	0317	9692	45	3	3221
2531	58	30	2504	3,9939	2586	3,8667	0329	9681	30	2	3177
2574	59	45	2546	3,9277	2633	3,7983	0341	9670	15	1	3134
2618	60	15 0	2588	3,8637	2679	3,7321	1,0353	0,9659	0 75	0	1,3090
0, R	m 0h	° '	0,		0,			0,	' °	m 5h	R
			Cos.	Séc.	Cotg.	Tang.	Coséc.	Sinus	Arc.		

Arc.			Sinus	Coséc.	Tang	Cotang.	Séc.	Cos.			
R 0,	1h m	° '	0,		0,			0,	' °	4h m	R
2618	0	15° 0'	2588	3,8637	2679	3,7321	1,0353	9659	0' 75°	60	1,3090
2662	1	15	2630	8018	2726	6680	0365	9648	45	59	3046
2705	2	30	2672	7420	2773	6059	0377	9636	30	58	3003
2749	3	45	2714	6840	2820	5457	0390	9625	15	57	2959
2793	4	16 0	2756	3,6280	2867	3,4874	1,0403	9613	0 74	56	1,2915
2836	5	15	2798	5736	2915	4308	0416	9600	45	55	2872
2880	6	30	2840	5209	2962	3759	0429	9588	30	54	2828
2923	7	45	2882	4699	3010	3226	0443	9576	15	53	2785
2967	8	17 0	2924	3,4203	3057	3,2709	1,0457	9563	0 73	52	1,2741
3011	9	15	2965	3722	3105	2205	0471	9550	45	51	2697
3054	10	30	3007	3255	3153	1716	0485	9537	30	50	2654
3098	11	45	3049	2801	3201	1240	0500	9524	15	49	2610
3142	12	18 0	3090	3,2361	3249	3,0777	1,0515	9511	0 72	48	1,2566
3185	13	15	3132	1932	3298	3,0326	0530	9497	45	47	2523
3229	14	30	3173	1515	3346	2,9887	0545	9483	30	46	2479
3272	15	45	3214	1110	3395	9459	0560	9469	15	45	2435
3316	16	19 0	3256	3,0716	3443	2,9042	1,0576	9455	0 71	44	1,2392
3360	17	15	3297	3,0331	3492	8636	0592	9441	45	43	2348
3403	18	30	3338	2,9957	3541	8239	0608	9426	30	42	2305
3447	19	45	3379	9593	3590	7852	0625	9412	15	41	2261
3491	20	20 0	3420	2,9238	3640	2,7475	1,0642	9397	0 70	40	1,2217
3534	21	15	3461	8892	3689	7106	0659	9382	45	39	2174
3578	22	30	3502	8555	3739	6746	0676	9367	30	38	2130
3622	23	45	3543	8225	3789	6395	0694	9351	15	37	2086
3665	24	21 0	3584	2,7904	3839	2,6051	1,0711	9336	0 69	36	1,2043
3709	25	15	3624	7591	3889	5715	0730	9320	45	35	1999
3752	26	30	3665	7285	3939	5386	0748	9304	30	34	1956
3796	27	45	3706	6986	3990	5065	0766	9288	15	33	1912
3840	28	22 0	3746	2,6695	4040	2,4751	1,0785	9272	0 68	32	1,1868
3883	29	15	3786	6410	4091	4443	0804	9255	45	31	1825
3927	30	30	3827	6131	4142	4142	0824	9239	30	30	1781
3971	31	45	3867	5859	4193	3847	0844	9222	15	29	1737
4014	32	23 0	3907	2,5593	4245	2,3559	1,0864	9205	0 67	28	1,1694
4058	33	15	3947	5333	4296	3276	0884	9188	45	27	1650
4102	34	30	3987	5078	4348	2998	0904	9171	30	26	1606
4145	35	45	4027	4830	4400	2727	0925	9153	15	25	1563
4189	36	24 0	4067	2,4586	4452	2,2460	1,0946	9135	0 66	24	1,1519
4232	37	15	4107	4348	4505	2199	0968	9118	45	23	1476
4276	38	30	4147	4114	4557	1943	0989	9100	30	22	1432
4320	39	45	4187	3886	4610	1692	1011	9081	15	21	1388
4363	40	25 0	4226	2,3662	4663	2,1445	1,1034	9063	0 65	20	1,1345
4407	41	15	4266	3443	4716	1203	1056	9045	45	19	1301
4451	42	30	4305	3228	4770	0965	1079	9026	30	18	1257
4494	43	45	4344	3018	4823	0732	1102	9007	15	17	1214
4538	44	26 0	4384	2,2812	4877	2,0503	1,1126	8988	0 64	16	1,1170
4581	45	15	4423	2610	4931	0278	1150	8969	45	15	1126
4625	46	30	4462	2412	4986	2,0057	1174	8949	30	14	1083
4669	47	45	4501	2217	5040	1,9840	1198	8930	15	13	1039
4712	48	27 0	4540	2,2027	5095	1,9626	1,1223	8910	0 63	12	1,0996
4756	49	15	4579	1840	5150	9416	1248	8890	45	11	0952
4800	50	30	4617	1657	5206	9210	1274	8870	30	10	0908
4843	51	45	4656	1477	5261	9007	1300	8850	15	9	0865
4887	52	28 0	4695	2,1301	5317	1,8807	1,1326	8829	0 62	8	1,0821
4931	53	15	4733	1127	5373	8611	1352	8809	45	7	0777
4974	54	30	4772	0957	5430	8418	1379	8788	30	6	0734
5018	55	45	4810	0791	5486	8228	1406	8767	15	5	0690
5061	56	29 0	4848	2,0627	5543	1,8040	1,1434	8746	0 61	4	1,0647
5105	57	15	4886	0466	5600	7856	1461	8725	45	3	0603
5149	58	30	4924	0308	5658	7675	1490	8704	30	2	0559
5192	59	45	4962	0152	5715	7496	1518	8682	15	1	0516
5236	60	30 0	5000	2,0000	5774	1,7321	1,1547	8660	0 60	0	1,0472
0, R	m 1h	° '	0,		0,			0,	' °	m 4h	R
			Cos.	Séc.	Cotg.	Tang.	Coséc.	Sinus.	Arc.		

IX. (Suite.) — VALEURS NATURELLES DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

Arc.			Sinus	Coséc.	Tang.	Cotang.	Séc.	Cos.			
R 0,	2h m	° '	0,					0,	' "	3h m	R
5236	0	30 0	5000	2,0000	0,5774	1,7321	1,1547	8660	0 60	60	1,0472
5280	1	15	5038	1,9850	5832	7147	1576	8638	45	59	0428
5323	2	30	5075	9703	5890	6977	1606	8616	30	58	0385
5367	3	45	5113	9558	5949	6808	1636	8594	15	57	0341
5411	4	31 0	5150	1,9416	0,6009	1,6643	1,1666	8572	0 59	56	1,0297
5454	5	15	5188	9276	6068	6479	1697	8549	45	55	0254
5498	6	30	5225	9139	6128	6319	1728	8526	30	54	0210
5541	7	45	5262	9004	6188	6160	1760	8504	15	53	0167
5585	8	32 0	5299	1,8871	0,6249	1,6003	1,1792	8480	0 58	52	1,0123
5629	9	15	5336	8740	6310	5849	1824	8457	45	51	0079
5672	10	30	5373	8612	6371	5697	1857	8434	30	50	1,0036
5716	11	45	5410	8485	6432	5547	1890	8410	15	49	0,9992
5760	12	33 0	5446	1,8361	0,6494	1,5399	1,1924	8387	0 57	48	0,9948
5803	13	15	5483	8238	6556	5253	1958	8363	45	47	9905
5847	14	30	5519	8118	6619	5108	1992	8339	30	46	9861
5890	15	45	5556	8000	6682	4966	2027	8315	15	45	9817
5934	16	34 0	5592	1,7883	0,6745	1,4826	1,2062	8290	0 56	44	0,9774
5978	17	15	5628	7768	6809	4687	2098	8266	45	43	9730
6021	18	30	5664	7655	6873	4550	2134	8241	30	42	9687
6065	19	45	5700	7544	6937	4415	2171	8216	15	41	9643
6109	20	35 0	5736	1,7434	0,7002	1,4281	1,2208	8192	0 55	40	0,9599
6152	21	15	5771	7327	7067	4150	2245	8166	45	39	9556
6196	22	30	5807	7221	7133	4019	2283	8141	30	38	9512
6240	23	45	5842	7116	7199	3891	2322	8116	15	37	9468
6283	24	36 0	5878	1,7013	0,7265	1,3764	1,2361	8090	0 54	36	0,9425
6327	25	15	5913	6912	7332	3638	2400	8064	45	35	9381
6370	26	30	5948	6812	7400	3514	2440	8039	30	34	9338
6414	27	45	5983	6713	7467	3392	2480	8013	15	33	9294
6458	28	37 0	6018	1,6616	0,7536	1,3270	1,2521	7986	0 53	32	0,9250
6501	29	15	6053	6521	7604	3151	2563	7960	45	31	9207
6545	30	30	6088	6427	7673	3032	2605	7934	30	30	9163
6589	31	45	6122	6334	7743	2915	2647	7907	15	29	9119
6632	32	38 0	6157	1,6243	0,7813	1,2799	1,2690	7880	0 52	28	0,9076
6676	33	15	6191	6153	7883	2685	2734	7853	45	27	9034
6720	34	30	6225	6064	7954	2572	2778	7826	30	26	8988
6763	35	45	6259	5976	8026	2460	2822	7799	15	25	8945
6807	36	39 0	6293	1,5890	0,8098	1,2349	1,2868	7771	0 51	24	0,8901
6850	37	15	6327	5805	8170	2239	2913	7744	45	23	8858
6894	38	30	6361	5721	8243	2131	2960	7716	30	22	8814
6938	39	45	6394	5639	8317	2024	3007	7688	15	21	8770
6981	40	40 0	6428	1,5557	0,8391	1,1918	1,3054	7660	0 50	20	0,8727
7025	41	15	6461	5477	8466	1812	3102	7632	45	19	8683
7069	42	30	6494	5398	8541	1708	3151	7604	30	18	8639
7112	43	45	6528	5320	8617	1606	3200	7576	15	17	8596
7156	44	41 0	6561	1,5243	0,8693	1,1504	1,3250	7547	0 49	16	0,8552
7199	45	15	6593	5167	8770	1403	3301	7518	45	15	8508
7243	46	30	6626	5092	8847	1303	3352	7490	30	14	8465
7287	47	45	6659	5018	8925	1204	3404	7461	15	13	8421
7330	48	42 0	6691	1,4945	0,9004	1,1106	1,3456	7431	0 48	12	0,8378
7374	49	15	6724	4873	9083	1009	3510	7402	45	11	8334
7418	50	30	6756	4802	9163	0913	3563	7373	30	10	8290
7461	51	45	6788	4732	9244	0818	3618	7343	15	9	8247
7505	52	43 0	6820	1,4663	0,9325	1,0724	1,3673	7314	0 47	8	0,8203
7549	53	15	6852	4595	9407	0630	3729	7284	45	7	8159
7592	54	30	6884	4527	9490	0538	3786	7254	30	6	8116
7636	55	45	6915	4461	9573	0446	3843	7224	15	5	8072
7679	56	44 0	6947	1,4396	0,9657	1,0355	1,3902	7193	0 46	4	0,8029
7723	57	15	6978	4331	9742	0265	3961	7163	45	3	7985
7767	58	30	7009	4267	9827	0176	4020	7133	30	2	7941
7810	59	45	7040	4204	9913	0088	4081	7102	15	1	7898
7854	60	45 0	7071	1,4142	1,0000	1,0000	1,4142	7071	0 45	0	0,7854
0, R	m 2h	° '	0,					0,	' "	m 3h	R
			Cos.	Séc.	Cotg.	Tang.	Coséc.	Sin.	Arc.		

X. — LOGARITHMES DES FONCTIONS CIRCULAIRES DE MINUTE EN MINUTE
pour les 100 premières minutes, et de 10 en 10 minutes pour le reste du quadrant.

Arc. °	Arc. '	Sin.	Tang.	Cotg.	Cos.	'	°
0	0	»	»	»	0,0000	0	90
	1	$\bar{4}$,4637	$\bar{4}$,4637	3,5363	0000	59	
	2	7648	7648	2352	0000	58	
	3	$\bar{4}$,9408	$\bar{4}$,9408	3,0592	0000	57	
	4	$\bar{3}$,0658	$\bar{3}$,0658	2,9342	0000	56	
	5	1627	1627	8373	0000	55	
0	6	$\bar{3}$,2419	$\bar{3}$,2419	2,7581	0,0000	54	89
	7	3088	3088	6912	0000	53	
	8	3668	3668	6332	0000	52	
	9	4180	4180	5820	0000	51	
	10	4637	4637	5363	0000	50	
	11	5051	5051	4949	0000	49	
0	12	$\bar{3}$,5429	$\bar{3}$,5429	2,4571	0,0000	48	89
	13	5777	5777	4223	0000	47	
	14	6099	6099	3901	0000	46	
	15	6398	6398	3602	0000	45	
	16	6678	6678	3322	0000	44	
	17	6942	6942	3058	0000	43	
0	18	$\bar{3}$,7190	$\bar{3}$,7190	2,2810	0,0000	42	89
	19	7425	7425	2575	0000	41	
	20	7648	7648	2352	0000	40	
	21	7859	7860	2140	0000	39	
	22	8061	8062	1938	0000	38	
	23	8255	8255	1745	0000	37	
0	24	$\bar{3}$,8439	$\bar{3}$,8439	2,1561	0,0000	36	89
	25	8617	8617	1383	0000	35	
	26	8787	8787	1213	0000	34	
	27	8951	8951	1049	0000	33	
	28	9109	9109	0891	0000	32	
	29	9261	9261	0739	0000	31	
0	30	$\bar{3}$,9408	$\bar{3}$,9409	2,0591	0,0000	30	89
	31	9551	9551	0449	0000	29	
	32	9689	9689	0311	0000	28	
	33	9822	9823	0177	0000	27	
	34	$\bar{3}$,9952	$\bar{3}$,9952	2,0048	0000	26	
	35	$\bar{2}$,0078	$\bar{2}$,0078	1,9922	0000	25	
0	36	$\bar{2}$,0209	$\bar{2}$,0200	1,9800	0,0000	24	89
	37	0319	0319	9681	0000	23	
	38	0435	0435	9565	0000	22	
	39	0548	0548	9452	0000	21	
	40	0658	0658	9342	0000	20	
	41	0765	0765	9235	0000	19	
0	42	$\bar{2}$,0870	$\bar{2}$,0870	1,9130	0,0000	18	89
	43	0972	0972	9028	0000	17	
	44	1072	1072	8928	0000	16	
	45	1169	1170	8830	0000	15	
	46	1265	1265	8735	0000	14	
	47	1358	1359	8641	0000	13	
0	48	$\bar{2}$,1450	$\bar{2}$,1450	1,8550	0,0000	12	89
	49	1539	1540	8460	0000	11	
	50	1627	1627	8373	0000	10	
	51	1713	1713	8287	0000	9	
	52	1797	1798	8202	0,0000	8	
	53	1880	1880	8120	$\bar{1}$,9999	7	
0	54	$\bar{2}$,1961	$\bar{2}$,1962	1,8038	$\bar{1}$,9999	6	89
	55	2041	2041	7959	9999	5	
	56	2119	2120	7880	9999	4	
	57	2196	2196	7804	9999	3	
	58	2271	2272	7728	9999	2	
	59	2346	2346	7654	9999	1	
1	0	$\bar{2}$,2419	$\bar{2}$,2419	1,7581	$\bar{1}$,9999	0	89
°	'					'	°
		Cos.	Cotg.	Tang.	Sin.	Arc.	

Arc. °	Arc. '	Sin.	Tang.	Cotg.	Cos.	'	°
1	0	$\bar{2}$,2419	$\bar{2}$,2419	1,7581	$\bar{1}$,9999	0	89
	1	2490	2491	7509	9999	59	
	2	2561	2562	7438	9999	58	
	3	2630	2631	7369	9999	57	
	4	2699	2700	7300	9999	56	
	5	2766	2767	7233	9999	55	
1	6	$\bar{2}$,2832	$\bar{2}$,2833	1,7167	$\bar{1}$,9999	54	88
	7	2898	2899	7101	9999	53	
	8	2962	2963	7037	9999	52	
	9	3025	3026	6974	9999	51	
	10	3088	3089	6911	9999	50	
	11	3150	3150	6850	9999	49	
1	12	$\bar{2}$,3210	$\bar{2}$,3211	1,6789	$\bar{1}$,9999	48	88
	13	3270	3271	6729	9999	47	
	14	3329	3330	6670	9999	46	
	15	3388	3389	6611	9999	45	
	16	3445	3446	6554	9999	44	
	17	3502	3503	6497	9999	43	
1	18	$\bar{2}$,3558	$\bar{2}$,3559	1,6441	$\bar{1}$,9999	42	88
	19	3613	3614	6386	9999	41	
	20	3668	3669	6331	9999	40	
	21	3722	3723	6277	9999	39	
	22	3775	3776	6224	9999	38	
	23	3828	3829	6171	9999	37	
1	24	$\bar{2}$,3880	$\bar{2}$,3881	1,6119	$\bar{1}$,9999	36	88
	25	3931	3932	6068	9999	35	
	26	3982	3983	6017	9999	34	
	27	4032	4033	5967	9999	33	
	28	4082	4083	5917	9999	32	
	29	4131	4132	5868	9999	31	
1	30	$\bar{2}$,4179	$\bar{2}$,4181	1,5819	$\bar{1}$,9999	30	88
	31	4227	4229	5771	9998	29	
	32	4275	4276	5724	9998	28	
	33	4322	4323	5677	9998	27	
	34	4368	4370	5630	9998	26	
	35	4414	4416	5584	9998	25	
1	36	$\bar{2}$,4459	$\bar{2}$,4461	1,5539	$\bar{1}$,9998	24	88
	37	4504	4506	5494	9998	23	
	38	4549	4551	5449	9998	22	
	39	4593	4595	5405	9998	21	
	40	4637	4638	5362	9998	20	
	50	5050	5053	4947	9998	10	
2	0	$\bar{2}$,5428	$\bar{2}$,5431	1,4569	$\bar{1}$,9997	0	88
	10	5776	5779	4221	9997	50	
	20	6097	6101	3899	9996	40	
	30	6397	6401	3599	9996	30	
	40	6677	6682	3318	9995	20	
	50	6940	6945	3055	9995	10	
3	0	$\bar{2}$,7188	$\bar{2}$,7194	1,2806	$\bar{1}$,9994	0	87
	10	7423	7429	2571	9993	50	
	20	7645	7652	2348	9993	40	
	30	7857	7865	2135	9992	30	
	40	8059	8067	1933	9991	20	
	50	8251	8261	1739	9990	10	
4	0	$\bar{2}$,8436	$\bar{2}$,8446	1,1554	$\bar{1}$,9989	0	86
	10	8613	8624	1376	9989	50	
	20	8783	8795	1205	9988	40	
	30	8946	8960	1040	9987	30	
	40	9104	9118	0882	9986	20	
	50	9256	9272	0728	9985	10	
5	0	$\bar{2}$,9403	$\bar{2}$,9420	1,0580	$\bar{1}$,9983	0	85
°	'					'	°
		Cos.	Cotg.	Tang.	Sin.	Arc.	

X. (Suite.) — LOGARITHMES DES FONCTIONS CIRCULAIRES

Arc.	Sin.	d	Tg.	d	Cotg	Cos.		Arc.	Sin.	d	Tg.	d	Cotg	Cos.	
° ′	$\bar{2}$,		$\bar{2}$,		1,	$\bar{1}$,	′ °	° ′	$\bar{1}$,		$\bar{1}$,		0,	$\bar{1}$,	′ °
5 0	9403	142	9420	143	0580	9983	0 85	15 0	4130	47	4281	50	5719	9849	0 75
10	9545	137	9563	138	0437	9982	50	10	4177	46	4331	50	5669	9846	50
20	9682	134	9701	135	0299	9981	40	20	4223	46	4381	49	5619	9843	40
30	9816	129	9836	130	0164	9980	30	30	4269	45	4430	49	5570	9839	30
40	9945	125	9966	127	0034	9979	20	40	4314	45	4479	48	5521	9836	20
50	0070	122	0093	123	9907	9977	10	50	4359	44	4527	48	5473	9832	10
6 0	0192	119	0216	120	9784	9976	0 84	16 0	4403	44	4575	47	5425	9828	0 74
10	0311	115	0336	117	9664	9975	50	10	4447	44	4622	47	5378	9825	50
20	0426	113	0453	114	9547	9973	40	20	4491	42	4669	47	5331	9821	40
30	0539	109	0567	111	9433	9972	30	30	4533	43	4716	46	5284	9817	30
40	0648	107	0678	108	9322	9971	20	40	4576	42	4762	46	5238	9814	20
50	0755	104	0786	106	9214	9969	10	50	4618	41	4808	45	5192	9810	10
7 0	0859	102	0891	104	9109	9968	0 83	17 0	4659	41	4853	45	5147	9806	0 73
10	0961	99	0995	101	9005	9966	50	10	4700	41	4898	45	5102	9802	50
20	1060	97	1096	98	8904	9964	40	20	4741	40	4943	44	5057	9798	40
30	1157	95	1194	97	8806	9963	30	30	4781	40	4987	44	5013	9794	30
40	1252	93	1291	94	8709	9961	20	40	4821	40	5031	44	4969	9790	20
50	1345	91	1385	93	8615	9959	10	50	4861	39	5075	43	4925	9786	10
8 0	1436	89	1478	91	8522	9958	0 82	18 0	4900	39	5118	43	4882	9782	0 72
10	1525	87	1569	89	8431	9956	50	10	4939	38	5161	42	4839	9778	50
20	1612	85	1658	87	8342	9954	40	20	4977	38	5203	42	4797	9774	40
30	1697	84	1745	86	8255	9952	30	30	5015	37	5245	42	4755	9770	30
40	1781	82	1831	84	8169	9950	20	40	5052	38	5287	42	4713	9765	20
50	1863	80	1915	82	8085	9948	10	50	5090	36	5329	41	4671	9761	10
9 0	1943	79	1997	81	8003	9946	0 81	19 0	5126	37	5370	41	4630	9757	0 71
10	2022	78	2078	80	7922	9944	50	10	5163	36	5411	40	4589	9752	50
20	2100	76	2158	78	7842	9942	40	20	5199	36	5451	40	4549	9748	40
30	2176	75	2236	77	7764	9940	30	30	5235	35	5491	40	4509	9743	30
40	2251	73	2313	76	7687	9938	20	40	5270	36	5531	40	4469	9739	20
50	2324	73	2389	74	7611	9936	10	50	5306	35	5571	40	4429	9734	10
10 0	2397	71	2463	73	7537	9934	0 80	20 0	5341	34	5611	39	4389	9730	0 70
10	2468	70	2536	73	7464	9931	50	10	5375	34	5650	39	4350	9725	50
20	2538	68	2609	71	7391	9929	40	20	5409	34	5689	38	4311	9721	40
30	2606	68	2680	70	7320	9927	30	30	5443	34	5727	39	4273	9716	30
40	2674	66	2750	69	7250	9924	20	40	5477	33	5766	38	4234	9711	20
50	2740	66	2819	68	7181	9922	10	50	5510	33	5804	38	4196	9706	10
11 0	2806	64	2887	66	7113	9919	0 79	21 0	5543	33	5842	37	4158	9702	0 69
10	2870	64	2953	67	7047	9917	50	10	5576	33	5879	38	4121	9697	50
20	2934	63	3020	65	6980	9914	40	20	5609	32	5917	37	4083	9692	40
30	2997	61	3085	64	6915	9912	30	30	5641	32	5954	37	4046	9687	30
40	3058	61	3149	63	6851	9909	20	40	5673	31	5991	37	4009	9682	20
50	3119	60	3212	63	6788	9907	10	50	5704	32	6028	36	3972	9677	10
12 0	3179	59	3275	61	6725	9904	0 78	22 0	5736	31	6064	36	3936	9672	0 68
10	3238	58	3336	61	6664	9901	50	10	5767	31	6100	36	3900	9667	50
20	3296	57	3397	61	6603	9899	40	20	5798	30	6136	36	3864	9661	40
30	3353	57	3458	59	6542	9896	30	30	5828	31	6172	36	3828	9656	30
40	3410	56	3517	59	6483	9893	20	40	5859	30	6208	35	3792	9651	20
50	3466	55	3576	58	6424	9890	10	50	5889	30	6243	36	3757	9646	10
13 0	3521	54	3634	57	6366	9887	0 77	23 0	5919	29	6279	35	3721	9640	0 67
10	3575	54	3691	57	6309	9884	50	10	5948	30	6314	34	3686	9635	50
20	3629	53	3748	56	6252	9881	40	20	5978	29	6348	35	3652	9629	40
30	3682	52	3804	55	6196	9878	30	30	6007	29	6383	34	3617	9624	30
40	3734	52	3859	55	6141	9875	20	40	6036	29	6417	35	3583	9618	20
50	3786	51	3914	54	6086	9872	10	50	6065	28	6452	34	3548	9613	10
14 0	3837	50	3968	53	6032	9869	0 76	24 0	6093	28	6486	34	3514	9607	0 66
10	3887	50	4021	53	5979	9866	50	10	6121	28	6520	33	3480	9602	50
20	3937	49	4074	53	5926	9863	40	20	6149	28	6553	34	3447	9596	40
30	3986	49	4127	51	5873	9859	30	30	6177	28	6587	33	3413	9590	30
40	4035	48	4178	52	5822	9856	20	40	6205	27	6620	34	3380	9584	20
50	4083	47	4230	51	5770	9853	10	50	6232	27	6654	33	3346	9579	10
15 0	4130		4281		5719	9849	0 75	25 0	6259		6687		3313	9573	0 65
° ′	$\bar{1}$,		$\bar{1}$,		0,	$\bar{1}$,	′ °	° ′	$\bar{1}$,		$\bar{1}$,		0,	$\bar{1}$,	′ °
	Cos.	d	Cotg	d	Tg.	Sin.	Arc.		Cos.	d	Cotg	d	Tg.	Sin.	Arc.

DE DIX EN DIX MINUTES.

Arc.	Sin.	d	Tg.	d	Cotg	d	Cos.	
	$\bar{1}$,		$\bar{1}$,		0,		$\bar{1}$,	
25° 0′	6259	27	6687	33	3313	6	9573	0′ 65°
10	6286	27	6720	32	3280	6	9567	50
20	6313	27	6752	33	3248	6	9561	40
30	6340	26	6785	32	3215	6	9555	30
40	6366	26	6817	33	3183	6	9549	20
50	6392	26	6850	32	3150	6	9543	10
26 0	6418	26	6882	32	3118	7	9537	0 64
10	6444	26	6914	32	3086	6	9530	50
20	6470	25	6946	31	3054	6	9524	40
30	6495	26	6977	32	3023	6	9518	30
40	6521	25	7009	31	2991	7	9512	20
50	6546	24	7040	32	2960	6	9505	10
27 0	6570	25	7072	31	2928	7	9499	0 63
10	6595	25	7103	31	2897	6	9492	50
20	6620	24	7134	31	2866	7	9486	40
30	6644	24	7165	31	2835	6	9479	30
40	6668	24	7196	30	2804	7	9473	20
50	6692	24	7226	31	2774	7	9466	10
28 0	6716	24	7257	30	2743	6	9459	0 62
10	6740	23	7287	30	2713	7	9453	50
20	6763	24	7317	31	2683	7	9446	40
30	6787	23	7348	30	2652	7	9439	30
40	6810	23	7378	30	2622	7	9432	20
50	6833	23	7408	30	2592	7	9425	10
29 0	6856	22	7438	29	2562	7	9418	0 61
10	6878	23	7467	30	2533	7	9411	50
20	6901	22	7497	29	2503	7	9404	40
30	6923	23	7526	30	2474	7	9397	30
40	6946	22	7556	29	2444	7	9390	20
50	6968	22	7585	29	2415	8	9383	10
30 0	6990	22	7614	30	2386	7	9375	0 60
10	7012	21	7644	29	2356	7	9368	50
20	7033	22	7673	28	2327	8	9361	40
30	7055	21	7701	29	2299	7	9353	30
40	7076	21	7730	29	2270	8	9346	20
50	7097	21	7759	29	2241	7	9338	10
31 0	7118	21	7788	28	2212	8	9331	0 59
10	7139	21	7816	29	2184	8	9323	50
20	7160	21	7845	28	2155	7	9315	40
30	7181	20	7873	29	2127	8	9308	30
40	7201	21	7902	28	2098	8	9300	20
50	7222	20	7930	28	2070	8	9292	10
32 0	7242	20	7958	28	2042	8	9284	0 58
10	7262	20	7986	28	2014	8	9276	50
20	7282	20	8014	28	1986	8	9268	40
30	7302	20	8042	28	1958	8	9260	30
40	7322	20	8070	27	1930	8	9252	20
50	7342	19	8097	28	1903	8	9244	10
33 0	7361	19	8125	28	1875	8	9236	0 57
10	7380	20	8153	27	1847	9	9228	50
20	7400	19	8180	28	1820	8	9219	40
30	7419	19	8208	27	1792	8	9211	30
40	7438	19	8235	28	1765	9	9203	20
50	7457	19	8263	27	1737	8	9194	10
34 0	7476	18	8290	27	1710	9	9186	0 56
10	7494	19	8317	27	1683	8	9177	50
20	7513	18	8344	27	1656	9	9169	40
30	7531	19	8371	27	1629	9	9160	30
40	7550	18	8398	27	1602	9	9151	20
50	7568	18	8425	27	1575	8	9142	10
35 0	7586		8452		1548		9134	0 55
° ′	$\bar{1}$,		$\bar{1}$,		0,		$\bar{1}$,	′ °
	Cos.	d	Cotg	d	Tg.	d	Sin.	Arc.

Arc.	Sin.	d	Tg.	d	Cotg	d	Cos.	
	$\bar{1}$,		$\bar{1}$,		0,		$\bar{1}$,	
35° 0′	7586	18	8452	27	1548	9	9134	0′ 55°
10	7604	18	8479	27	1521	9	9125	50
20	7622	18	8506	27	1494	9	9116	40
30	7640	17	8533	26	1467	9	9107	30
40	7657	18	8559	27	1441	9	9098	20
50	7675	17	8586	27	1414	9	9089	10
36 0	7692	18	8613	26	1387	10	9080	0 54
10	7710	17	8639	27	1361	9	9070	50
20	7727	17	8666	26	1334	9	9061	40
30	7744	17	8692	26	1308	10	9052	30
40	7761	17	8718	27	1282	9	9042	20
50	7778	17	8745	26	1255	10	9033	10
37 0	7795	16	8771	26	1229	9	9023	0 53
10	7811	17	8797	27	1203	10	9014	50
20	7828	16	8824	26	1176	9	9004	40
30	7844	17	8850	26	1150	10	8995	30
40	7861	16	8876	26	1124	10	8985	20
50	7877	16	8902	26	1098	10	8975	10
38 0	7893	17	8928	26	1072	10	8965	0 52
10	7910	16	8954	26	1046	10	8955	50
20	7926	15	8980	26	1020	10	8945	40
30	7941	16	9006	26	0994	16	8935	30
40	7957	16	9032	26	0968	10	8925	20
50	7973	16	9058	26	0942	10	8915	10
39 0	7989	15	9084	26	0916	10	8905	0 51
10	8004	16	9110	25	0890	11	8895	50
20	8020	15	9135	26	0865	10	8884	40
30	8035	15	9161	26	0839	10	8874	30
40	8050	16	9187	25	0813	11	8864	20
50	8066	15	9212	26	0788	10	8853	10
40 0	8081	15	9238	26	0762	11	8843	0 50
10	8096	15	9264	25	0736	11	8832	50
20	8111	14	9289	26	0711	11	8821	40
30	8125	15	9315	26	0685	10	8810	30
40	8140	15	9341	25	0659	11	8800	20
50	8155	14	9366	26	0634	11	8789	10
41 0	8169	15	9392	25	0608	11	8778	0 49
10	8184	14	9417	26	0583	11	8767	50
20	8198	15	9443	25	0557	11	8756	40
30	8213	14	9468	26	0532	12	8745	30
40	8227	14	9494	25	0506	11	8733	20
50	8241	14	9519	25	0481	11	8722	10
42 0	8255	14	9544	26	0456	12	8711	0 48
10	8269	14	9570	25	0430	11	8699	50
20	8283	14	9595	26	0405	12	8688	40
30	8297	14	9621	25	0379	11	8676	30
40	8311	13	9646	25	0354	12	8665	20
50	8324	14	9671	26	0329	12	8653	10
43 0	8338	13	9697	25	0303	12	8641	0 47
10	8351	14	9722	25	0278	11	8629	50
20	8365	13	9747	25	0253	12	8618	40
30	8378	13	9772	26	0228	12	8606	30
40	8391	14	9798	25	0202	12	8594	20
50	8405	13	9823	25	0177	13	8582	10
44 0	8418	13	9848	26	0152	12	8569	0 46
10	8431	13	9874	25	0126	12	8557	50
20	8444	13	9899	25	0101	13	8545	40
30	8457	12	9924	25	0076	12	8532	30
40	8469	13	9949	26	0051	13	8520	20
50	8482	13	9975	25	0025	12	8507	10
45 0	8495		1000		0000		8495	0 45
° ′	$\bar{1}$,		$\bar{1}$,		0,		$\bar{1}$,	′ °
	Cos.	d	Cotg	d	Tg.	d	Sin.	Arc

X. (Suite.) — LOGARITHMES DES FONCTIONS CIRCULAIRES

Arc.	Sin.	d	Tg.	d	Cotg	Cos.	
	$\bar{2}$,		$\bar{2}$,		1,	$\bar{1}$,	
5° 0'	9403	142	9420	143	0580	9983	0' 85°
10	9545	137	9563	138	0437	9982	50
20	9682	134	9701	135	0299	9981	40
30	9816	129	9836	130	0164	9980	30
40	9945	125	9966	127	0034	9979	20
50	0070	122	0093	123	9907	9977	10
6 0	0192	119	0216	120	9784	9976	0 84
10	0311	115	0336	117	9664	9975	50
20	0426	113	0453	114	9547	9973	40
30	0539	109	0567	111	9433	9972	30
40	0648	107	0678	108	9322	9971	20
50	0755	104	0786	105	9214	9969	10
7 0	0859	102	0891	104	9109	9968	0 83
10	0961	99	0995	101	9005	9966	50
20	1060	97	1096	98	8904	9964	40
30	1157	95	1194	97	8806	9963	30
40	1252	93	1291	94	8709	9961	20
50	1345	91	1385	93	8615	9959	10
8 0	1436	89	1478	91	8522	9958	0 82
10	1525	87	1569	89	8431	9956	50
20	1612	85	1658	87	8342	9954	40
30	1697	84	1745	86	8255	9952	30
40	1781	82	1831	84	8169	9950	20
50	1863	80	1915	82	8085	9948	10
9 0	1943	79	1997	81	8003	9946	0 81
10	2022	78	2078	80	7922	9944	50
20	2100	76	2158	78	7842	9942	40
30	2176	75	2236	77	7764	9940	30
40	2251	73	2313	76	7687	9938	20
50	2324	73	2389	74	7611	9936	10
10 0	2397	71	2463	73	7537	9934	0 80
10	2468	70	2536	73	7464	9931	50
20	2538	68	2609	71	7391	9929	40
30	2606	68	2680	70	7320	9927	30
40	2674	66	2750	69	7250	9924	20
50	2740	66	2819	68	7181	9922	10
11 0	2806	64	2887	66	7113	9919	0 79
10	2870	64	2953	67	7047	9917	50
20	2934	63	3020	65	6980	9914	40
30	2997	61	3085	64	6915	9912	30
40	3058	61	3149	63	6851	9909	20
50	3119	60	3212	63	6788	9907	10
12 0	3179	59	3275	61	6725	9904	0 78
10	3238	58	3336	61	6664	9901	50
20	3296	57	3397	61	6603	9899	40
30	3353	57	3458	59	6542	9896	30
40	3410	56	3517	59	6483	9893	20
50	3466	55	3576	58	6424	9890	10
13 0	3521	54	3634	57	6366	9887	0 77
10	3575	54	3691	57	6309	9884	50
20	3629	53	3748	56	6252	9881	40
30	3682	52	3804	55	6196	9878	30
40	3734	52	3859	55	6141	9875	20
50	3786	51	3914	54	6086	9872	10
14 0	3837	50	3968	53	6032	9869	0 76
10	3887	50	4021	53	5979	9866	50
20	3937	49	4074	53	5926	9863	40
30	3986	49	4127	51	5873	9859	30
40	4035	48	4178	52	5822	9856	20
50	4083	47	4230	51	5770	9853	10
15 0	4130		4281		5719	9849	0 75
° '	$\bar{1}$,		$\bar{1}$,		0,	$\bar{1}$,	' °
	Cos.	d	Cotg	d	Tg.	Sin.	Arc.

Arc.	Sin.	d	Tg.	d	Cotg	Cos.	
	$\bar{1}$,		$\bar{1}$,		0,	$\bar{1}$,	
15° 0'	4130	47	4281	50	5719	9849	0' 75°
10	4177	46	4331	50	5669	9846	50
20	4223	46	4381	49	5619	9843	40
30	4269	45	4430	49	5570	9839	30
40	4314	45	4479	48	5521	9836	20
50	4359	44	4527	48	5473	9832	10
16 0	4403	44	4575	47	5425	9828	0 74
10	4447	44	4622	47	5378	9825	50
20	4491	42	4669	47	5331	9821	40
30	4533	43	4716	46	5284	9817	30
40	4576	42	4762	46	5238	9814	20
50	4618	41	4808	45	5192	9810	10
17 0	4659	41	4853	45	5147	9806	0 73
10	4700	41	4898	45	5102	9802	50
20	4741	40	4943	44	5057	9798	40
30	4781	40	4987	44	5013	9794	30
40	4821	40	5031	44	4969	9790	20
50	4861	39	5075	43	4925	9786	10
18 0	4900	39	5118	43	4882	9782	0 72
10	4939	38	5161	42	4839	9778	50
20	4977	38	5203	42	4797	9774	40
30	5015	37	5245	42	4755	9770	30
40	5052	38	5287	42	4713	9765	20
50	5090	36	5329	41	4671	9761	10
19 0	5126	37	5370	41	4630	9757	0 71
10	5163	36	5411	40	4589	9752	50
20	5199	36	5451	40	4549	9748	40
30	5235	35	5491	40	4509	9743	30
40	5270	36	5531	40	4469	9739	20
50	5306	35	5571	40	4429	9734	10
20 0	5341	34	5611	39	4389	9730	0 70
10	5375	34	5650	39	4350	9725	50
20	5409	34	5689	38	4311	9721	40
30	5443	34	5727	39	4273	9716	30
40	5477	33	5766	38	4234	9711	20
50	5510	33	5804	38	4196	9706	10
21 0	5543	33	5842	37	4158	9702	0 69
10	5576	33	5879	38	4121	9697	50
20	5609	32	5917	37	4083	9692	40
30	5641	32	5954	37	4046	9687	30
40	5673	31	5991	37	4009	9682	20
50	5704	32	6028	36	3972	9677	10
22 0	5736	31	6064	36	3936	9672	0 68
10	5767	31	6100	36	3900	9667	50
20	5798	30	6136	36	3864	9661	40
30	5828	31	6172	36	3828	9656	30
40	5859	30	6208	35	3792	9651	20
50	5889	30	6243	36	3757	9646	10
23 0	5919	29	6279	35	3721	9640	0 67
10	5948	30	6314	34	3686	9635	50
20	5978	29	6348	35	3652	9629	40
30	6007	29	6383	34	3617	9624	30
40	6036	29	6417	35	3583	9618	20
50	6065	28	6452	34	3548	9613	10
24 0	6093	28	6486	34	3514	9607	0 66
10	6121	28	6520	33	3480	9602	50
20	6149	28	6553	34	3447	9596	40
30	6177	28	6587	33	3413	9590	30
40	6205	27	6620	34	3380	9584	20
50	6232	27	6654	33	3346	9579	10
25 0	6259		6687		3313	9573	0 65
° '	$\bar{1}$,		$\bar{1}$,		0,	$\bar{1}$,	' °
	Cos.	d.	Cotg	d	Tg.	Sin.	Arc

DE DIX EN DIX MINUTES.

Arc.	Sin.	d	Tg.	d	Cotg	d	Cos.	
	Ī,		Ī,		0,		Ī,	
25° 0'	6259	27	6687	33	3313	6	9573	0' 65°
10	6286	27	6720	32	3280	6	9567	50
20	6313	27	6752	33	3248	6	9561	40
30	6340	26	6785	32	3215	6	9555	30
40	6366	26	6817	33	3183	6	9549	20
50	6392	26	6850	32	3150	6	9543	10
26 0	6418	26	6882	32	3118	7	9537	0 64
10	6444	26	6914	32	3086	6	9530	50
20	6470	25	6946	31	3054	6	9524	40
30	6495	26	6977	32	3023	6	9518	30
40	6521	25	7009	31	2991	7	9512	20
50	6546	24	7040	32	2960	6	9505	10
27 0	6570	25	7072	31	2928	7	9499	0 63
10	6595	25	7103	31	2897	6	9492	50
20	6620	24	7134	31	2866	7	9486	40
30	6644	24	7165	31	2835	6	9479	30
40	6668	24	7196	30	2804	7	9473	20
50	6692	24	7226	31	2774	7	9466	10
28 0	6716	24	7257	30	2743	6	9459	0 62
10	6740	23	7287	30	2713	7	9453	50
20	6763	24	7317	31	2683	7	9446	40
30	6787	23	7348	30	2652	7	9439	30
40	6810	23	7378	30	2622	7	9432	20
50	6833	23	7408	30	2592	7	9425	10
29 0	6856	22	7438	29	2562	7	9418	0 61
10	6878	23	7467	30	2533	7	9411	50
20	6901	22	7497	29	2503	7	9404	40
30	6923	23	7526	30	2474	7	9397	30
40	6946	22	7556	29	2444	7	9390	20
50	6968	22	7585	29	2415	8	9383	10
30 0	6990	22	7614	30	2386	7	9375	0 60
10	7012	21	7644	29	2356	7	9368	50
20	7033	22	7673	28	2327	8	9361	40
30	7055	21	7701	29	2299	7	9353	30
40	7076	21	7730	29	2270	8	9346	20
50	7097	21	7759	29	2241	7	9338	10
31 0	7118	21	7788	28	2212	8	9331	0 59
10	7139	21	7816	29	2184	8	9323	50
20	7160	21	7845	28	2155	7	9315	40
30	7181	20	7873	29	2127	8	9308	30
40	7201	21	7902	28	2098	8	9300	20
50	7222	20	7930	28	2070	8	9292	10
32 0	7242	20	7958	28	2042	8	9284	0 58
10	7262	20	7986	28	2014	8	9276	50
20	7282	20	8014	28	1986	8	9268	40
30	7302	20	8042	28	1958	8	9260	30
40	7322	20	8070	27	1930	8	9252	20
50	7342	19	8097	28	1903	8	9244	10
33 0	7361	19	8125	28	1875	8	9236	0 57
10	7380	20	8153	27	1847	9	9228	50
20	7400	19	8180	28	1820	8	9219	40
30	7419	19	8208	27	1792	8	9211	30
40	7438	19	8235	28	1765	9	9203	20
50	7457	19	8263	27	1737	8	9194	10
34 0	7476	18	8290	27	1710	9	9186	0 56
10	7494	19	8317	27	1683	8	9177	50
20	7513	18	8344	27	1656	9	9169	40
30	7531	19	8371	27	1629	9	9160	30
40	7550	18	8398	27	1602	9	9151	20
50	7568	18	8425	27	1575	8	9142	10
35 0	7586		8452		1548		9134	0 55
° '	Ī,		Ī,		0,		Ī,	' °
	Cos.	d	Cotg	d	Tg.	d	Sin.	Arc.

Arc.	Sin.	d	Tg.	d	Cotg	d	Cos.	
	Ī,		Ī,		0,		Ī,	
35° 0'	7586	18	8452	27	1548	9	9134	0' 55°
10	7604	18	8479	27	1521	9	9125	50
20	7622	18	8506	27	1494	9	9116	40
30	7640	17	8533	26	1467	9	9107	30
40	7657	18	8559	27	1441	9	9098	20
50	7675	17	8586	27	1414	9	9089	10
36 0	7692	18	8613	26	1387	10	9080	0 54
10	7710	17	8639	27	1361	9	9070	50
20	7727	17	8666	26	1334	9	9061	40
30	7744	17	8692	26	1308	10	9052	30
40	7761	17	8718	27	1282	9	9042	20
50	7778	17	8745	26	1255	10	9033	10
37 0	7795	16	8771	26	1229	9	9023	0 53
10	7811	17	8797	27	1203	10	9014	50
20	7828	16	8824	26	1176	9	9004	40
30	7844	17	8850	26	1150	10	8995	30
40	7861	16	8876	26	1124	10	8985	20
50	7877	16	8902	26	1098	10	8975	10
38 0	7893	17	8928	26	1072	10	8965	0 52
10	7910	16	8954	26	1046	10	8955	50
20	7926	15	8980	26	1020	10	8945	40
30	7941	16	9006	26	0994	10	8935	30
40	7957	16	9032	26	0968	10	8925	20
50	7973	16	9058	26	0942	10	8915	10
39 0	7989	15	9084	26	0916	10	8905	0 51
10	8004	16	9110	25	0890	11	8895	50
20	8020	15	9135	26	0865	10	8884	40
30	8035	15	9161	26	0839	10	8874	30
40	8050	16	9187	25	0813	11	8864	20
50	8066	15	9212	26	0788	10	8853	10
40 0	8081	15	9238	26	0762	11	8843	0 50
10	8096	15	9264	25	0736	11	8832	50
20	8111	14	9289	26	0711	11	8821	40
30	8125	15	9315	26	0685	10	8810	30
40	8140	15	9341	25	0659	11	8800	20
50	8155	14	9366	26	0634	11	8789	10
41 0	8169	15	9392	25	0608	11	8778	0 49
10	8184	14	9417	26	0583	11	8767	50
20	8198	15	9443	25	0557	11	8756	40
30	8213	14	9468	26	0532	12	8745	30
40	8227	14	9494	25	0506	11	8733	20
50	8241	14	9519	25	0481	11	8722	10
42 0	8255	14	9544	26	0456	12	8711	0 48
10	8269	14	9570	25	0430	11	8699	50
20	8283	14	9595	26	0405	12	8688	40
30	8297	14	9621	25	0379	11	8676	30
40	8311	13	9646	25	0354	12	8665	20
50	8324	14	9671	26	0329	12	8653	10
43 0	8338	13	9697	25	0303	12	8641	0 47
10	8351	14	9722	25	0278	11	8629	50
20	8365	13	9747	25	0253	12	8618	40
30	8378	13	9772	26	0228	12	8606	30
40	8391	14	9798	25	0202	12	8594	20
50	8405	13	9823	25	0177	13	8582	10
44 0	8418	13	9848	26	0152	12	8569	0 46
10	8431	13	9874	25	0126	12	8557	50
20	8444	13	9899	25	0101	13	8545	40
30	8457	12	9924	25	0076	12	8532	30
40	8469	13	9949	26	0051	13	8520	20
50	8482	13	9975	25	0025	12	8507	10
45 0	8495		1000		0000		8495	0 45
° '	Ī,		Ī,		0,		Ī,	' °
	Cos.	d	Cotg	d	Tg.	d	Sin.	Arc

XI. — LOGARITHMES DES FONCTIONS CIRCULAIRES

Log. sinus.

	0°,0	0°,1	0°,2	0°,3	0°,4	0°,5	0°,6	0°,7	0°,8	0°,9	1°,0	
Deg.	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′	
0	$\bar{3}$, »	2419	5429	7190	8439	9408	*0200	*0870	*1450	*1961	*2419	89
1	$\bar{2}$,2419	2832	3210	3558	3880	4179	4459	4723	4971	5206	5428	88
2	5428	5640	5842	6035	6220	6397	6567	6731	6889	7041	7188	87
3	7188	7330	7468	7602	7731	7857	7979	8098	8213	8326	8436	86
4	8436	8543	8647	8749	8849	8946	9042	9135	9226	9315	9403	85
5	$\bar{2}$,9403	9489	9573	9655	9736	9816	9894	9970	*0046	*0120	*0192	84
6	$\bar{1}$,0192	0264	0334	0403	0472	0539	0605	0670	0734	0797	0859	83
7	0859	0920	0981	1040	1099	1157	1214	1271	1326	1381	1436	82
8	1436	1489	1542	1594	1646	1697	1747	1797	1847	1895	1943	81
9	1943	1991	2038	2085	2131	2176	2221	2266	2310	2353	2397	80
10	$\bar{1}$,2397	2439	2482	2524	2565	2606	2647	2687	2727	2767	2806	79
11	2806	2845	2883	2921	2959	2997	3034	3070	3107	3143	3179	78
12	3179	3214	3250	3284	3319	3353	3387	3421	3455	3488	3521	77
13	3521	3554	3586	3618	3650	3682	3713	3745	3775	3806	3837	76
14	3837	3867	3897	3927	3957	3986	4015	4044	4073	4102	4130	75
15	$\bar{1}$,4130	4158	4186	4214	4242	4269	4296	4323	4350	4377	4403	74
16	4403	4430	4456	4482	4508	4533	4559	4584	4609	4634	4659	73
17	4659	4684	4709	4733	4757	4781	4805	4829	4853	4876	4900	72
18	4900	4923	4946	4969	4992	5015	5037	5060	5082	5104	5126	71
19	5126	5148	5170	5192	5213	5235	5256	5278	5299	5320	5341	70
20	$\bar{1}$,5341	5361	5382	5402	5423	5443	5463	5484	5504	5523	5543	69
21	5543	5563	5583	5602	5621	5641	5660	5679	5698	5717	5736	68
22	5736	5754	5773	5792	5810	5828	5847	5865	5883	5901	5919	67
23	5919	5937	5954	5972	5990	6007	6024	6042	6059	6076	6093	66
24	6093	6110	6127	6144	6161	6177	6194	6210	6227	6243	6259	65
25	$\bar{1}$,6259	6276	6292	6308	6324	6340	6356	6371	6387	6403	6418	64
26	6418	6434	6449	6465	6480	6495	6510	6526	6541	6556	6570	63
27	6570	6585	6600	6615	6629	6644	6659	6673	6687	6702	6716	62
28	6716	6730	6744	6759	6773	6787	6801	6814	6828	6842	6856	61
29	6856	6869	6883	6896	6910	6923	6937	6950	6963	6977	6990	60
30	$\bar{1}$,6990	7003	7016	7029	7042	7055	7068	7080	7093	7106	7118	59
31	7118	7131	7144	7156	7168	7181	7193	7205	7218	7230	7242	58
32	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	7326	7338	7349	7361	57
33	7361	7373	7384	7396	7407	7419	7430	7442	7453	7464	7476	56
34	7476	7487	7498	7509	7520	7531	7542	7553	7564	7575	7586	55
35	$\bar{1}$,7586	7597	7607	7618	7629	7640	7650	7661	7671	7682	7692	54
36	7692	7703	7713	7723	7734	7744	7754	7764	7774	7785	7795	53
37	7795	7805	7815	7825	7835	7844	7854	7864	7874	7884	7893	52
38	7893	7903	7913	7922	7932	7941	7951	7960	7970	7979	7989	51
39	7989	7998	8007	8017	8026	8035	8044	8053	8063	8072	8081	50
40	$\bar{1}$,8081	8090	8099	8108	8117	8125	8134	8143	8152	8161	8169	49
41	8169	8178	8187	8195	8204	8213	8221	8230	8238	8247	8255	48
42	8255	8264	8272	8280	8289	8297	8305	8313	8322	8330	8338	47
43	8338	8346	8354	8362	8370	8378	8386	8394	8402	8410	8418	46
44	8418	8426	8433	8441	8449	8457	8464	8472	8480	8487	8495	45
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	Deg.
	1°,0	0°,9	0°,8	0°,7	0°,6	0°,5	0°,4	0°,3	0°,2	0°,1	0°,0	

Log. cosinus.

Minutes en degrés et secondes en minutes.

	0	10	20	30	40	50
	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0	0	1(6)	(3)	5	(6)	8(3)
1	01(6)	18(3)	35	51(6)	68(3)	85
2	0(3)	2	3(6)	5(3)	7	8(6)
3	05	21(6)	38(3)	55	71(6)	88(3)
4	0(6)	2(3)	4	5(6)	7(3)	9
5	08(3)	25	41(6)	58(3)	75	91(6)
6	1	2(6)	4(3)	6	7(6)	9(3)
7	11(6)	28(3)	45	61(6)	78(3)	95
8	1(3)	3	4(6)	6(3)	8	9(6)
9	15	31(6)	48(3)	65	81(6)	98(3)

Secondes en degrés.

	0	10	20	30	40	50
	0,00	0,00	0,00	0,0	0,0	0,0
0	0	2(7)	(5)	08(3)	(1)	13(8)
1	02(7)	30(5)	58(3)	086(1)	113(8)	141(6)
2	0(5)	(3)	6(1)	0(8)	11(6)	1(4)
3	08(3)	36(1)	63(8)	091(6)	119(4)	147(2)
4	(1)	3(8)	(6)	09(4)	1(2)	15
5	13(8)	41(6)	69(4)	097(2)	125	152(7)
6	1(6)	(4)	7(2)	1	12(7)	1(5)
7	19(4)	47(2)	75	102(7)	130(5)	158(3)
8	(2)	5	(7)	10(5)	1(3)	16(1)
9	25	52(7)	80(5)	108(3)	136(1)	163(8)

DE SIX EN SIX MINUTES, OU DE DIXIÈME EN DIXIÈME DE DEGRÉ.

Log. cosinus.

	0°,0	0°,1	0°,2	0°,3	0°,4	0°,5	0°,6	0°,7	0°,8	0°,9	1°,0	
Deg.	**0'**	**6'**	**12'**	**18'**	**24'**	**30'**	**36'**	**42'**	**48'**	**54'**	**60'**	
0	0,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	*9999	*9999	**89**
1	$\bar{1}$,9999	9999	9999	9999	9999	9999	9998	9998	9998	9998	9997	**88**
2	9997	9997	9997	9996	9996	9996	9996	9995	9995	9994	9994	**87**
3	9994	9994	9993	9993	9992	9992	9991	9991	9990	9990	9989	**86**
4	9989	9989	9988	9988	9987	9987	9986	9985	9985	9984	9983	**85**
5	$\bar{1}$,9983	9983	9982	9981	9981	9980	9979	9978	9978	9977	9976	**84**
6	9976	9975	9975	9974	9973	9972	9971	9970	9969	9968	9968	**83**
7	9968	9967	9966	9965	9964	9963	9962	9961	9960	9959	9958	**82**
8	9958	9956	9955	9954	9953	9952	9951	9950	9949	9947	9946	**81**
9	9946	9945	9944	9943	9941	9940	9939	9937	9936	9935	9934	**80**
10	$\bar{1}$,9934	9932	9931	9929	9928	9927	9925	9924	9922	9921	9919	**79**
11	9919	9918	9916	9915	9913	9912	9910	9909	9907	9906	9904	**78**
12	9904	9902	9901	9899	9897	9896	9894	9892	9891	9889	9887	**77**
13	9887	9885	9884	9882	9880	9878	9876	9875	9873	9871	9869	**76**
14	9869	9867	9865	9863	9861	9859	9857	9855	9853	9851	9849	**75**
15	$\bar{1}$,9849	9847	9845	9843	9841	9839	9837	9835	9833	9831	9828	**74**
16	9828	9826	9824	9822	9820	9817	9815	9813	9811	9808	9806	**73**
17	9806	9804	9801	9799	9797	9794	9792	9789	9787	9785	9782	**72**
18	9782	9780	9777	9775	9772	9770	9767	9764	9762	9759	9757	**71**
19	9757	9754	9751	9749	9746	9743	9741	9738	9735	9733	9730	**70**
20	$\bar{1}$,9730	9727	9724	9722	9719	9716	9713	9710	9707	9704	9702	**69**
21	9702	9699	9696	9693	9690	9687	9684	9681	9678	9675	9672	**68**
22	9672	9669	9666	9662	9659	9656	9653	9650	9647	9643	9640	**67**
23	9640	9637	9634	9631	9627	9624	9621	9617	9614	9611	9607	**66**
24	9607	9604	9601	9597	9594	9590	9587	9583	9580	9576	9573	**65**
25	$\bar{1}$,9573	9569	9566	9562	9558	9555	9551	9548	9544	9540	9537	**64**
26	9537	9533	9529	9525	9522	9518	9514	9510	9506	9503	9499	**63**
27	9499	9495	9491	9487	9483	9479	9475	9471	9467	9463	9459	**62**
28	9459	9455	9451	9447	9443	9439	9435	9431	9427	9422	9418	**61**
29	9418	9414	9410	9406	9401	9397	9393	9388	9384	9380	9375	**60**
30	$\bar{1}$,9375	9371	9367	9362	9358	9353	9349	9344	9340	9335	9331	**59**
31	9331	9326	9322	9317	9312	9308	9303	9298	9294	9289	9284	**58**
32	9284	9279	9275	9270	9265	9260	9255	9251	9246	9241	9236	**57**
33	9236	9231	9226	9221	9216	9211	9206	9201	9196	9191	9186	**56**
34	9186	9181	9175	9170	9165	9160	9155	9149	9144	9139	9134	**55**
35	$\bar{1}$,9134	9128	9123	9118	9112	9107	9101	9096	9091	9085	9080	**54**
36	9080	9074	9069	9063	9057	9052	9046	9041	9035	9029	9023	**53**
37	9023	9018	9012	9006	9000	8995	8989	8983	8977	8971	8965	**52**
38	8965	8959	8953	8947	8941	8935	8929	8923	8917	8911	8905	**51**
39	8905	8899	8893	8887	8880	8874	8868	8862	8855	8849	8843	**50**
40	$\bar{1}$,8843	8836	8830	8823	8817	8810	8804	8797	8791	8784	8778	**49**
41	8778	8771	8765	8758	8751	8745	8738	8731	8724	8718	8711	**48**
42	8711	8704	8697	8690	8683	8676	8669	8662	8655	8648	8641	**47**
43	8641	8634	8627	8620	8613	8606	8598	8591	8584	8577	8569	**46**
44	8569	8562	8555	8547	8540	8532	8525	8517	8510	8502	8495	**45**
	60'	**54'**	**48'**	**42'**	**36'**	**30'**	**24'**	**18'**	**12'**	**6'**	**0'**	**Deg.**
	1°,0	0°,9	0°,8	0°,7	0°,6	0°,5	0°,4	0°,3	0°,2	0°,1	0°,0	

Log. sinus.

Parties décimales du degré en minutes et secondes.

	0°,00	0°,01	0°,02	0°,03	0°,04	0°,05	0°,06	0°,07	0°,08	0°,09
0	0"	0'.36",0	1'.12",0	1'.48",0	2'.24",0	3'. 0",0	3'.36",0	4'.12",0	4'.48",0	5'.24",0
1	3,6	0.39,6	1.15,6	1.51,6	2.27,6	3. 3,6	3.39,6	4.15,6	4.51,6	5.27,6
2	7,2	0.43,2	1.19,2	1.55,2	2.31,2	3. 7,2	3.43,2	4.19,2	4.55,2	5.31,2
3	10,8	0.46,8	1.22,8	1.58,8	2.34,8	3.10,8	3.46,8	4.22,8	4.58,8	5.34,8
4	14,4	0.50,4	1.26,4	2. 2,4	2.38,4	3.14,4	3.50,4	4.26,4	5. 2,4	5.38,4
5	18,0	0.54,0	1.30,0	2. 6,0	2.42,0	3.18,0	3.54,0	4.30,0	5. 6,0	5.42,0
6	21,6	0.57,6	1.33,6	2. 9,6	2.45,6	3.21,6	3.57,6	4.33,6	5. 9,6	5.45,6
7	25,2	1. 1,2	1.37,2	2.13,2	2.49,2	3.25,2	4. 1,2	4.37,2	5.13,2	5.49,2
8	28,8	1. 4,8	1.40,8	2.16,8	2.52,8	3.28,8	4. 4,8	4.40,8	5.16,8	5.52,8
9	32,4	1. 8,4	1.44,4	2.20,4	2.56,4	3.32,4	4. 8,4	4.44,4	5.20,4	5.56,4

XI. (Suite.) — LOGARITHMES DES FONCTIONS CIRCULAIRES

Log. tang.

	0°,0	0°,1	0°,2	0°,3	0°,4	0°,5	0°,6	0°,7	0°,8	0°,9	1°,0	
Deg.	**0'**	**6'**	**12'**	**18'**	**24'**	**30'**	**36'**	**42'**	**48'**	**54'**	**60'**	
0	$\bar{3}$, »	2419	5429	7190	8439	9409	*0200	*0870	*1450	*1962	*2419	**89**
1	$\bar{2}$,2419	2833	3211	3559	3881	4181	4461	4725	4973	5208	5431	**88**
2	5431	5643	5845	6038	6223	6401	6571	6736	6894	7046	7194	**87**
3	7194	7337	7475	7609	7739	7865	7988	8107	8223	8336	8446	**86**
4	8446	8554	8659	8762	8862	8960	9056	9150	9241	9331	9420	**85**
5	$\bar{2}$,9420	9506	9591	9674	9756	9836	9915	9992	*0068	*0143	*0216	**84**
6	$\bar{1}$,0216	0289	0360	0430	0499	0567	0633	0699	0764	0828	0891	**83**
7	0891	0954	1015	1076	1135	1194	1252	1310	1367	1423	1478	**82**
8	1478	1533	1587	1640	1693	1745	1797	1848	1898	1948	1997	**81**
9	1997	2046	2094	2142	2189	2236	2282	2328	2374	2419	2463	**80**
10	$\bar{1}$,2463	2507	2551	2594	2637	2680	2722	2764	2805	2846	2887	**79**
11	2887	2927	2967	3006	3046	3085	3123	3162	3200	3237	3275	**78**
12	3275	3312	3349	3385	3422	3458	3493	3529	3564	3599	3634	**77**
13	3634	3668	3702	3736	3770	3804	3837	3870	3903	3935	3968	**76**
14	3968	4000	4032	4064	4095	4127	4158	4189	4220	4250	4281	**75**
15	$\bar{1}$,4281	4311	4341	4371	4400	4430	4459	4488	4517	4546	4575	**74**
16	4575	4603	4632	4660	4688	4716	4744	4771	4799	4826	4853	**73**
17	4853	4880	4907	4934	4961	4987	5014	5040	5066	5092	5118	**72**
18	5118	5143	5169	5195	5220	5245	5270	5295	5320	5345	5370	**71**
19	5370	5394	5419	5443	5467	5491	5516	5539	5563	5587	5611	**70**
20	$\bar{1}$,5611	5634	5658	5681	5704	5727	5750	5773	5796	5819	5842	**69**
21	5842	5864	5887	5909	5932	5954	5976	5998	6020	6042	6064	**68**
22	6064	6086	6108	6129	6151	6172	6194	6215	6236	6257	6279	**67**
23	6279	6300	6321	6341	6362	6383	6404	6424	6445	6465	6486	**66**
24	6486	6506	6527	6547	6567	6587	6607	6627	6647	6667	6687	**65**
25	$\bar{1}$,6687	6706	6726	6746	6765	6785	6804	6824	6843	6863	6882	**64**
26	6882	6901	6920	6939	6958	6977	6996	7015	7034	7053	7072	**63**
27	7072	7090	7109	7128	7146	7165	7183	7202	7220	7238	7257	**62**
28	7257	7275	7293	7311	7330	7348	7366	7384	7402	7420	7438	**61**
29	7438	7455	7473	7491	7509	7526	7544	7562	7579	7597	7614	**60**
30	$\bar{1}$,7614	7632	7649	7667	7684	7701	7719	7736	7753	7771	7788	**59**
31	7788	7805	7822	7839	7856	7873	7890	7907	7924	7941	7958	**58**
32	7958	7975	7992	8008	8025	8042	8059	8075	8092	8109	8125	**57**
33	8125	8142	8158	8175	8191	8208	8224	8241	8257	8274	8290	**56**
34	8290	8306	8323	8339	8355	8371	8388	8404	8420	8436	8452	**55**
35	$\bar{1}$,8452	8468	8484	8501	8517	8533	8549	8565	8581	8597	8613	**54**
36	8613	8629	8644	8660	8676	8692	8708	8724	8740	8755	8771	**53**
37	8771	8787	8803	8818	8834	8850	8865	8881	8897	8912	8928	**52**
38	8928	8944	8959	8975	8990	9006	9022	9037	9053	9068	9084	**51**
39	9084	9099	9115	9130	9146	9161	9176	9192	9207	9223	9238	**50**
40	$\bar{1}$,9238	9254	9269	9284	9300	9315	9330	9346	9361	9376	9392	**49**
41	9392	9407	9422	9438	9453	9468	9483	9499	9514	9529	9544	**48**
42	9544	9560	9575	9590	9605	9621	9636	9651	9666	9681	9697	**47**
43	9697	9712	9727	9742	9757	9772	9788	9803	9818	9833	9848	**46**
44	9848	9864	9879	9894	9909	9924	9939	9955	9970	9985	*0000	**45**
	60'	**54'**	**48'**	**42'**	**36'**	**30'**	**24'**	**18'**	**12'**	**6'**	**0'**	**Deg.**
	1°,0	0°,9	0°,8	0°,7	0°,6	0°,5	0°,4	0°,3	0°,2	0°,1	0°,0	

Log. cotang.

Log. sinus.

Dizaines de degrés.	Deg.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		Dizaines de degrés.
	0	»	$\bar{2}$,242	$\bar{2}$,543	$\bar{2}$,719	$\bar{2}$,844	$\bar{2}$,940	$\bar{1}$,019	$\bar{1}$,086	$\bar{1}$,144	$\bar{1}$,194	$\bar{1}$,240	**8**	
	1	$\bar{1}$,240	$\bar{1}$,281	$\bar{1}$,318	$\bar{1}$,352	$\bar{1}$,384	$\bar{1}$,413	$\bar{1}$,440	466	490	513	534	**7**	
	2	534	554	574	592	609	626	642	657	672	686	699	**6**	
	3	699	712	724	736	748	759	769	779	789	799	808	**5**	
	4	808	817	826	834	842	849	857	864	871	878	884	**4**	
	5	884	891	897	902	908	913	919	924	928	933	938	**3**	
	6	938	942	946	950	954	957	961	964	967	970	973	**2**	
	7	973	976	978	981	983	985	987	989	990	992	993	**1**	
	8	$\bar{1}$,993	$\bar{1}$,995	$\bar{1}$,996	$\bar{1}$,997	$\bar{1}$,998	$\bar{1}$,998	$\bar{1}$,999	$\bar{1}$,999	0,000	0,000	0,000	**0**	
		10	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	**Deg.**	

Log. cosinus.

Log cotang.

Deg.	0°,0	0°,1	0°,2	0°,3	0°,4	0°,5	0°,6	0°,7	0°,8	0°,9	1°,0	
	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′	
0	2, »	7581	4571	2810	1561	0591	*9800	*9130	*8550	*8038	*7581	89
1	1,7581	7167	6789	6441	6119	5819	5539	5275	5027	4792	4569	88
2	4569	4357	4155	3962	3777	3599	3429	3264	3106	2954	2806	87
3	2806	2663	2525	2391	2261	2135	2012	1893	1777	1664	1554	86
4	1554	1446	1341	1238	1138	1040	0944	0850	0759	0669	0580	85
5	1,0580	0494	0409	0326	0244	0164	0085	0008	*9932	*9857	*9784	84
6	0,9784	9711	9640	9570	9501	9433	9367	9301	9236	9172	9109	83
7	9109	9046	8985	8924	8865	8806	8748	8690	8633	8577	8522	82
8	8522	8467	8413	8360	8307	8255	8203	8152	8102	8052	8003	81
9	8003	7954	7906	7858	7811	7764	7718	7672	7626	7581	7537	80
10	0,7537	7493	7449	7406	7363	7320	7278	7236	7195	7154	7113	79
11	7113	7073	7033	6994	6954	6915	6877	6838	6800	6763	6725	78
12	6725	6688	6651	6615	6578	6542	6507	6471	6436	6401	6366	77
13	6366	6332	6298	6264	6230	6196	6163	6130	6097	6065	6032	76
14	6032	6000	5968	5936	5905	5873	5842	5811	5780	5750	5719	75
15	0,5719	5689	5659	5629	5600	5570	5541	5512	5483	5454	5425	74
16	5425	5397	5368	5340	5312	5284	5256	5229	5201	5174	5147	73
17	5147	5120	5093	5066	5039	5013	4986	4960	4934	4908	4882	72
18	4882	4857	4831	4805	4780	4755	4730	4705	4680	4655	4630	71
19	4630	4606	4581	4557	4533	4509	4484	4461	4437	4413	4389	70
20	0,4389	4366	4342	4319	4296	4273	4250	4227	4204	4181	4158	69
21	4158	4136	4113	4091	4068	4046	4024	4002	3980	3958	3936	68
22	3936	3914	3892	3871	3849	3828	3806	3785	3764	3743	3721	67
23	3721	3700	3679	3659	3638	3617	3596	3576	3555	3535	3514	66
24	3514	3494	3473	3453	3433	3413	3393	3373	3353	3333	3313	65
25	0,3313	3294	3274	3254	3235	3215	3196	3176	3157	3137	3118	64
26	3118	3099	3080	3061	3042	3023	3004	2985	2966	2947	2928	63
27	2928	2910	2891	2872	2854	2835	2817	2798	2780	2762	2743	62
28	2743	2725	2707	2689	2670	2652	2634	2616	2598	2580	2562	61
29	2562	2545	2527	2509	2491	2474	2456	2438	2421	2403	2386	60
30	0,2386	2368	2351	2333	2316	2299	2281	2264	2247	2229	2212	59
31	2212	2195	2178	2161	2144	2127	2110	2093	2076	2059	2042	58
32	2042	2025	2008	1992	1975	1958	1941	1925	1908	1891	1875	57
33	1875	1858	1842	1825	1809	1792	1776	1759	1743	1726	1710	56
34	1710	1694	1677	1661	1645	1629	1612	1596	1580	1564	1548	55
35	0,1548	1532	1516	1499	1483	1467	1451	1435	1419	1403	1387	54
36	1387	1371	1356	1340	1324	1308	1292	1276	1260	1245	1229	53
37	1229	1213	1197	1182	1166	1150	1135	1119	1103	1088	1072	52
38	1072	1056	1041	1025	1010	0994	0978	0963	0947	0932	0916	51
39	0916	0901	0885	0870	6854	0839	0824	0808	0793	0777	0762	50
40	0,0762	0746	0731	0716	0700	0685	0670	0654	0639	0624	0608	49
41	0608	0593	0578	0562	0547	0532	0517	0501	0486	0471	0456	48
42	0456	0440	0425	0410	0395	0379	0364	0349	0334	0319	0303	47
43	0303	0288	0273	0258	0243	0228	0212	0197	0182	0167	0152	46
44	0152	0136	0121	0106	0091	0076	0061	0045	0030	0015	0000	45
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	Deg.
	1°,0	0°,9	0°,8	0°,7	0°,6	0°,5	0°,4	0°,3	0°,2	0°,1	0°,0	

Log. tang.

Log. tang.

Dizaines de degrés. Deg.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Dizaines de degrés.
0	»	$\bar{2}$,242	$\bar{2}$,543	$\bar{2}$,719	$\bar{2}$,845	$\bar{2}$,942	$\bar{1}$,022	$\bar{1}$,089	$\bar{1}$,148	$\bar{1}$,200	$\bar{1}$,246	8
1	$\bar{1}$,246	289	327	363	397	428	457	485	512	537	561	7
2	561	584	606	628	649	669	688	707	726	744	761	6
3	761	779	796	813	829	845	861	877	893	908	924	5
4	$\bar{1}$,924	939	954	970	985	*000	*015	*030	*046	*061	*076	4
5	0,076	092	107	123	139	155	171	187	204	221	239	3
6	239	256	274	293	312	331	351	372	394	416	439	2
7	439	463	488	515	543	572	603	637	673	711	754	1
8	0,754	0,800	0,852	0,911	0,978	1,058	1,155	1,281	1,457	1,758	»	0
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Deg.

Log. cotang.

XI. (Suite.) — LOGARITHMES DES FONCTIONS CIRCULAIRES

Log. tang.

	0°,0	0°,1	0°,2	0°,3	0°,4	0°,5	0°,6	0°,7	0°,8	0°,9	1°,0	
Deg.	**0'**	**6'**	**12'**	**18'**	**24'**	**30'**	**36'**	**42'**	**48'**	**54'**	**60'**	
0	$\bar{3}$, »	2419	5429	7190	8439	9409	*0200	*0870	*1450	*1962	*2419	**89**
1	$\bar{2}$,2419	2833	3211	3559	3881	4181	4461	4725	4973	5208	5431	**88**
2	5431	5643	5845	6038	6223	6401	6571	6736	6894	7046	7194	**87**
3	7194	7337	7475	7609	7739	7865	7988	8107	8223	8336	8446	**86**
4	8446	8554	8659	8762	8862	8960	9056	9150	9241	9331	9420	**85**
5	$\bar{2}$,9420	9506	9591	9674	9756	9836	9915	9992	*0068	*0143	*0216	**84**
6	$\bar{1}$,0216	0289	0360	0430	0499	0567	0633	0699	0764	0828	0891	**83**
7	0891	0954	1015	1076	1135	1194	1252	1310	1367	1423	1478	**82**
8	1478	1533	1587	1640	1693	1745	1797	1848	1898	1948	1997	**81**
9	1997	2046	2094	2142	2189	2236	2282	2328	2374	2419	2463	**80**
10	$\bar{1}$,2463	2507	2551	2594	2637	2680	2722	2764	2805	2846	2887	**79**
11	2887	2927	2967	3006	3046	3085	3123	3162	3200	3237	3275	**78**
12	3275	3312	3349	3385	3422	3458	3493	3529	3564	3599	3634	**77**
13	3634	3668	3702	3736	3770	3804	3837	3870	3903	3935	3968	**76**
14	3968	4000	4032	4064	4095	4127	4158	4189	4220	4250	4281	**75**
15	$\bar{1}$,4281	4311	4341	4371	4400	4430	4459	4488	4517	4546	4575	**74**
16	4575	4603	4632	4660	4688	4716	4744	4771	4799	4826	4853	**73**
17	4853	4880	4907	4934	4961	4987	5014	5040	5066	5092	5118	**72**
18	5118	5143	5169	5195	5220	5245	5270	5295	5320	5345	5370	**71**
19	5370	5394	5419	5443	5467	5491	5516	5539	5563	5587	5611	**70**
20	1,5611	5634	5658	5681	5704	5727	5750	5773	5796	5819	5842	**69**
21	5842	5864	5887	5909	5932	5954	5976	5998	6020	6042	6064	**68**
22	6064	6086	6108	6129	6151	6172	6194	6215	6236	6257	6279	**67**
23	6279	6300	6321	6341	6362	6383	6404	6424	6445	6465	6486	**66**
24	6486	6506	6527	6547	6567	6587	6607	6627	6647	6667	6687	**65**
25	$\bar{1}$,6687	6706	6726	6746	6765	6785	6804	6824	6843	6863	6882	**64**
26	6882	6901	6920	6939	6958	6977	6996	7015	7034	7053	7072	**63**
27	7072	7090	7109	7128	7146	7165	7183	7202	7220	7238	7257	**62**
28	7257	7275	7293	7311	7330	7348	7366	7384	7402	7420	7438	**61**
29	7438	7455	7473	7491	7509	7526	7544	7562	7579	7597	7614	**60**
30	$\bar{1}$,7614	7632	7649	7667	7684	7701	7719	7736	7753	7771	7788	**59**
31	7788	7805	7822	7839	7856	7873	7890	7907	7924	7941	7958	**58**
32	7958	7975	7992	8008	8025	8042	8059	8075	8092	8109	8125	**57**
33	8125	8142	8158	8175	8191	8208	8224	8241	8257	8274	8290	**56**
34	8290	8306	8323	8339	8355	8371	8388	8404	8420	8436	8452	**55**
35	$\bar{1}$,8452	8468	8484	8501	8517	8533	8549	8565	8581	8597	8613	**54**
36	8613	8629	8644	8660	8676	8692	8708	8724	8740	8755	8771	**53**
37	8771	8787	8803	8818	8834	8850	8865	8881	8897	8912	8928	**52**
38	8928	8944	8959	8975	8990	9006	9022	9037	9053	9068	9084	**51**
39	9084	9099	9115	9130	9146	9161	9176	9192	9207	9223	9238	**50**
40	$\bar{1}$,9238	9254	9269	9284	9300	9315	9330	9346	9361	9376	9392	**49**
41	9392	9407	9422	9438	9453	9468	9483	9499	9514	9529	9544	**48**
42	9544	9560	9575	9590	9605	9621	9636	9651	9666	9681	9697	**47**
43	9697	9712	9727	9742	9757	9772	9788	9803	9818	9833	9848	**46**
44	9848	9864	9879	9894	9909	9924	9939	9955	9970	9985	*0000	**45**
	60'	**54'**	**48'**	**42'**	**36'**	**30'**	**24'**	**18'**	**12'**	**6'**	**0'**	**Deg.**
	1°,0	0°,9	0°,8	0°,7	0°,6	0°,5	0°,4	0°,3	0°,2	0°,1	0°,0	

Log. cotang.

Log. sinus.

Dizaines de degrés.	Deg.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		Dizaines de degrés.
	0	»	$\bar{2}$,242	$\bar{2}$,543	$\bar{2}$,719	$\bar{2}$,844	$\bar{2}$,940	$\bar{1}$,019	$\bar{1}$,086	$\bar{1}$,144	$\bar{1}$,194	$\bar{1}$,240	**8**	
	1	$\bar{1}$,240	$\bar{1}$,281	$\bar{1}$,318	$\bar{1}$,352	$\bar{1}$,384	$\bar{1}$,413	$\bar{1}$,440	466	490	513	534	**7**	
	2	534	554	574	592	609	626	642	657	672	686	699	**6**	
	3	699	712	724	736	748	759	769	779	789	799	808	**5**	
	4	808	817	826	834	842	849	857	864	871	878	884	**4**	
	5	884	891	897	902	908	913	919	924	928	933	938	**3**	
	6	938	942	946	950	954	957	961	964	967	970	973	**2**	
	7	973	976	978	981	983	985	987	989	990	992	993	**1**	
	8	$\bar{1}$,993	$\bar{1}$,995	$\bar{1}$,996	$\bar{1}$,997	$\bar{1}$,998	$\bar{1}$,998	$\bar{1}$,999	$\bar{1}$,999	0,000	0,000	0,000	**0**	
		10	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	**Deg.**	

Log. cosinus.

DE SIX EN SIX MINUTES, OU DE DIXIÈME EN DIXIÈME DE DEGRÉ.

Log cotang.

	0°,0	0°,1	0°,2	0°,3	0°,4	0°,5	0°,6	0°,7	0°,8	0°,9	1°,0	
Deg.	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'	
0	2, »	7581	4571	2810	1561	0591	*9800	*9130	*8550	*8038	*7581	89
1	1,7581	7167	6789	6441	6119	5819	5539	5275	5027	4792	4569	88
2	4569	4357	4155	3962	3777	3599	3429	3264	3106	2954	2806	87
3	2806	2663	2525	2391	2261	2135	2012	1893	1777	1664	1554	86
4	1554	1446	1341	1238	1138	1040	0944	0850	0759	0669	0580	85
5	1,0580	0494	0409	0326	0244	0164	0085	0008	*9932	*9857	*9784	84
6	0,9784	9711	9640	9570	9501	9433	9367	9301	9236	9172	9109	83
7	9109	9046	8985	8924	8865	8806	8748	8690	8633	8577	8522	82
8	8522	8467	8413	8360	8307	8255	8203	8152	8102	8052	8003	81
9	8003	7954	7906	7858	7811	7764	7718	7672	7626	7581	7537	80
10	0,7537	7493	7449	7406	7363	7320	7278	7236	7195	7154	7113	79
11	7113	7073	7033	6994	6954	6915	6877	6838	6800	6763	6725	78
12	6725	6688	6651	6615	6578	6542	6507	6471	6436	6401	6366	77
13	6366	6332	6298	6264	6230	6196	6163	6130	6097	6065	6032	76
14	6032	6000	5968	5936	5905	5873	5842	5811	5780	5750	5719	75
15	0,5719	5689	5659	5629	5600	5570	5541	5512	5483	5454	5425	74
16	5425	5397	5368	5340	5312	5284	5256	5229	5201	5174	5147	73
17	5147	5120	5093	5066	5039	5013	4986	4960	4934	4908	4882	72
18	4882	4857	4831	4805	4780	4755	4730	4705	4680	4655	4630	71
19	4630	4606	4581	4557	4533	4509	4484	4461	4437	4413	4389	70
20	0,4389	4366	4342	4319	4296	4273	4250	4227	4204	4181	4158	69
21	4158	4136	4113	4091	4068	4046	4024	4002	3980	3958	3936	68
22	3936	3914	3892	3871	3849	3828	3806	3785	3764	3743	3721	67
23	3721	3700	3679	3659	3638	3617	3596	3576	3555	3535	3514	66
24	3514	3494	3473	3453	3433	3413	3393	3373	3353	3333	3313	65
25	0,3313	3294	3274	3254	3235	3215	3196	3176	3157	3137	3118	64
26	3118	3099	3080	3061	3042	3023	3004	2985	2966	2947	2928	63
27	2928	2910	2891	2872	2854	2835	2817	2798	2780	2762	2743	62
28	2743	2725	2707	2689	2670	2652	2634	2616	2598	2580	2562	61
29	2562	2545	2527	2509	2491	2474	2456	2438	2421	2403	2386	60
30	0,2386	2368	2351	2333	2316	2299	2281	2264	2247	2229	2212	59
31	2212	2195	2178	2161	2144	2127	2110	2093	2076	2059	2042	58
32	2042	2025	2008	1992	1975	1958	1941	1925	1908	1891	1875	57
33	1875	1858	1842	1825	1809	1792	1776	1759	1743	1726	1710	56
34	1710	1694	1677	1661	1645	1629	1612	1596	1580	1564	1548	55
35	0,1548	1532	1516	1499	1483	1467	1451	1435	1419	1403	1387	54
36	1387	1371	1356	1340	1324	1308	1292	1276	1260	1245	1229	53
37	1229	1213	1197	1182	1166	1150	1135	1119	1103	1088	1072	52
38	1072	1056	1041	1025	1010	0994	0978	0963	0947	0932	0916	51
39	0916	0901	0885	0870	0854	0839	0824	0808	0793	0777	0762	50
40	0,0762	0746	0731	0716	0700	0685	0670	0654	0639	0624	0608	49
41	0608	0593	0578	0562	0547	0532	0517	0501	0486	0471	0456	48
42	0456	0440	0425	0410	0395	0379	0364	0349	0334	0319	0303	47
43	0303	0288	0273	0258	0243	0228	0212	0197	0182	0167	0152	46
44	0152	0136	0121	0106	0091	0076	0061	0045	0030	0015	0000	45
	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	Deg.
	1°,0	0°,9	0°,8	0°,7	0°,6	0°,5	0°,4	0°,3	0°,2	0°,1	0°,0	

Log. tang.

Log. tang.

Dizaines de degrés.	Deg.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		Dizaines de degrés.
	0	»	$\bar{2}$,242	$\bar{2}$,543	$\bar{2}$,719	$\bar{2}$,845	$\bar{2}$,942	$\bar{1}$,022	$\bar{1}$,089	$\bar{1}$,148	$\bar{1}$,200	$\bar{1}$,246	8	
	1	$\bar{1}$,246	289	327	363	397	428	457	485	512	537	561	7	
	2	561	584	606	628	649	669	688	707	726	744	761	6	
	3	761	779	796	813	829	845	861	877	893	908	924	5	
	4	$\bar{1}$,924	939	954	970	985	*000	*015	*030	*046	*061	*076	4	
	5	0,076	092	107	123	139	155	171	187	204	221	239	3	
	6	239	256	274	293	312	331	351	372	394	416	439	2	
	7	439	463	488	515	543	572	603	637	673	711	754	1	
	8	0,754	0,800	0,852	0,911	0,978	1,058	1,155	1,281	1,457	1,758	»	0	
		10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Deg.	

Log. cotang.

XII. — TABLE DES VALEURS NATURELLES DES FONCTIONS CIRCULAIRES

pour chaque centième du quadrant, donnant la conversion des degrés, minutes et secondes en parties décimales du quadrant.

Arc.			Sin.	Coséc.	Tang.	Cotang	Séc.	Cosin.			
R	° '	0,q							0,q	° '	R
0,000	0. 0	00	0,000	∞	0,000	∞	1,000	1,000	00	90. 0	1,571
0,016	0.54	01	0,016	63,665	0,016	63,657	1,000	1,000	99	89. 6	1,555
0,031	1.48	02	0,031	31,836	0,031	31,821	1,000	1,000	98	88.12	1,539
0,047	2.42	03	0,047	21,229	0,047	21,205	1,001	0,999	97	87.18	1,524
0,063	3.36	04	0,063	15,926	0,063	15,895	1,002	0,998	96	86.24	1,508
0,079	4.30	05	0,078	12,745	0,079	12,706	1,003	0,997	95	85.30	1,492
0,094	5.24	06	0,094	10,626	0,095	10,579	1,004	0,996	94	84.36	1,477
0,110	6.18	07	0,110	9,113	0,110	9,058	1,006	0,994	93	83.42	1,461
0,126	7.12	08	0,125	7,979	0,126	7,916	1,008	0,992	92	82.48	1,445
0,141	8. 6	09	0,141	7,097	0,142	7,026	1,010	0,990	91	81.54	1,429
0,157	9. 0	10	0,156	6,392	0,158	6,314	1,012	0,988	90	81. 0	1,414
0,173	9.54	11	0,172	5,816	0,175	5,730	1,015	0,985	89	80. 6	1,398
0,188	10.48	12	0,187	5,337	0,191	5,242	1,018	0,982	88	79.12	1,382
0,204	11.42	13	0,203	4,931	0,207	4,829	1,021	0,979	87	78.18	1,367
0,220	12.36	14	0,218	4,584	0,224	4,474	1,025	0,976	86	77.24	1,351
0,236	13.30	15	0,233	4,284	0,240	4,165	1,028	0,972	85	76.30	1,335
0,251	14.24	16	0,249	4,021	0,257	3,895	1,032	0,969	84	75.36	1,319
0,267	15.18	17	0,264	3,790	0,274	3,655	1,037	0,965	83	74.42	1,304
0,283	16.12	18	0,279	3,584	0,291	3,442	1,041	0,960	82	73.48	1,288
0,298	17. 6	19	0,294	3,401	0,308	3,251	1,046	0,956	81	72.54	1,272
0,314	18. 0	20	0,309	3,236	0,325	3,078	1,051	0,951	80	72. 0	1,257
0,330	18.54	21	0,324	3,087	0,342	2,921	1,057	0,946	79	71. 6	1,241
0,346	19.48	22	0,339	2,952	0,360	2,778	1,063	0,941	78	70.12	1,225
0,361	20.42	23	0,353	2,829	0,378	2,646	1,069	0,935	77	69.18	1,210
0,377	21.36	24	0,368	2,716	0,396	2,526	1,076	0,930	76	68.24	1,194
0,393	22.30	25	0,383	2,613	0,414	2,414	1,082	0,924	75	67.30	1,178
0,408	23.24	26	0,397	2,518	0,433	2,311	1,090	0,918	74	66.36	1,162
0,424	24.18	27	0,412	2,430	0,452	2,215	1,097	0,911	73	65.42	1,147
0,440	25.12	28	0,426	2,349	0,471	2,125	1,105	0,905	72	64.48	1,131
0,456	26. 6	29	0,440	2,273	0,490	2,041	1,114	0,898	71	63.54	1,115
0,471	27. 0	30	0,454	2,203	0,510	1,963	1,122	0,891	70	63. 0	1,100
0,487	27.54	31	0,468	2,137	0,529	1,889	1,132	0,884	69	62. 6	1,084
0,503	28.48	32	0,482	2,076	0,550	1,819	1,141	0,876	68	61.12	1,068
0,518	29.42	33	0,495	2,018	0,570	1,753	1,151	0,869	67	60.18	1,052
0,534	30.36	34	0,509	1,964	0,591	1,691	1,162	0,861	66	59.24	1,037
0,550	31.30	35	0,522	1,914	0,613	1,632	1,173	0,853	65	58.30	1,021
0,565	32.24	36	0,536	1,866	0,635	1,576	1,184	0,844	64	57.36	1,005
0,581	33.18	37	0,549	1,821	0,657	1,522	1,196	0,836	63	56.42	0,990
0,597	34.12	38	0,562	1,779	0,680	1,471	1,209	0,827	62	55.48	0,974
0,613	35. 6	39	0,575	1,739	0,703	1,423	1,222	0,818	61	54.54	0,958
0,628	36. 0	40	0,588	1,701	0,727	1,376	1,236	0,809	60	54. 0	0,942
0,644	36.54	41	0,600	1,666	0,751	1,332	1,250	0,800	59	53. 6	0,927
0,660	37.48	42	0,613	1,632	0,776	1,289	1,266	0,790	58	52.12	0,911
0,675	38.42	43	0,625	1,599	0,801	1,248	1,281	0,780	57	51.18	0,895
0,691	39.36	44	0,637	1,569	0,827	1,209	1,298	0,771	56	50.24	0,880
0,707	40.30	45	0,649	1,540	0,854	1,171	1,315	0,760	55	49.30	0,864
0,723	41.24	46	0,661	1,512	0,882	1,134	1,333	0,750	54	48.36	0,848
0,738	42.18	47	0,673	1,486	0,910	1,099	1,352	0,740	53	47.42	0,833
0,754	43.12	48	0,685	1,461	0,939	1,065	1,372	0,729	52	46.48	0,817
0,770	44. 6	49	0,696	1,437	0,969	1,032	1,393	0,718	51	45.54	0,801
0,785	45. 0	50	0,707	1,414	1,000	1,000	1,414	0,707	50	45. 0	0,785
R	° '	0,q							0,q	° '	R
			Cosin.	Séc.	Cotang	Tang.	Coséc.	Sin.	Arc.		

d. m.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	c. mill.
	' "	' "	' "	' "	' "	' "	' "	' "	' "	' "	"
0	0. 0,0	0.32,4	1. 4,8	1.37,2	2. 9,6	2.42,0	3.14,4	3.46,8	4.19,2	4.51,6	0,00
1	5.24,0	5.56,4	6.28,8	7. 1,2	7.33,6	8. 6,0	8.38,4	9.10,8	9.43,2	10.15,6	3,24
2	10.48,0	11.20,4	11.52,8	12.25,2	12.57,6	13.30,0	14. 2,4	14.34,8	15. 7,2	15.39,6	6,48
Millièmes. 3	16.12,0	16.44,4	17.16,8	17.49,2	18.21,6	18.54,0	19.26,4	19.58,8	20.31,2	21. 3,6	9,72
4	21.36,0	22. 8,4	22.40,8	23.13,2	23.45,6	24.18,0	24.50,4	25.22,8	25.55,2	26.27,6	12,96
5	27. 0,0	27.32,4	28. 4,8	28.37,2	29. 9,6	29.42,0	30.14,4	30.46,8	31.19,2	31.51,6	16,20
6	32.24,0	32.56,4	33.28,8	34. 1,2	34.33,6	35. 6,0	35.38,4	36.10,8	36.43,2	37.15,6	19,44
7	37.48,0	38.20,4	38.52,8	39.25,2	39.57,6	40.30,0	41. 2,4	41.34,8	42. 7,2	42.39,6	22,68
8	43.12,0	43.44,4	44.16,8	44.49,2	45.21,6	45.54,0	46.26,4	46.58,8	47.31,2	48. 3,6	25,92
9	48.36,0	49. 8,4	49.40,8	50.13,2	50.45,6	51.18,0	51.50,4	52.22,8	52.55,2	53.27,6	29,16

XIII. — LOGARITHMES DES FONCTIONS CIRCULAIRES
à trois décimales, de centième en centième du quadrant.

	Log. sinus.											
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	q
0,0	$\bar{2}$, »	196	497	673	798	895	974	*040	*098	*149	*194	0,9
0,1	$\bar{1}$,194	235	273	307	339	368	396	421	446	468	490	0,8
0,2	490	510	530	548	566	583	599	614	629	643	657	0,7
0,3	657	670	683	695	707	718	729	740	750	760	769	0,6
0,4	769	778	787	796	804	813	820	828	835	843	849	0,5
0,5	$\bar{1}$,849	856	863	869	875	881	887	892	898	903	908	0,4
0,6	908	913	918	922	927	931	935	939	943	946	950	0,3
0,7	950	953	957	960	963	966	968	971	974	976	978	0,2
0,8	978	980	982	984	986	988	989	991	992	993	995	0,1
0,9	$\bar{1}$,995	996	997	997	998	999	999	*000	*000	*000	*000	0,0
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
	Log. cosinus.											

	Log. tang.											
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	q
0,0	$\bar{2}$, »	196	497	674	799	896	976	*043	*102	*153	*200	0,9
0,1	$\bar{1}$,200	242	280	316	349	380	410	437	463	488	512	0,8
0,2	512	535	556	577	598	617	636	655	673	690	707	0,7
0,3	707	724	740	756	772	787	803	817	832	847	861	0,6
0,4	$\bar{1}$,861	876	890	904	918	931	945	959	973	986	*000	0,5
0,5	0,000	014	027	041	055	069	082	096	110	124	139	0,4
0,6	139	153	168	183	197	213	228	244	260	276	293	0,3
0,7	293	310	327	345	364	383	402	423	444	465	488	0,2
0,8	488	512	537	563	590	620	651	684	720	758	800	0,1
0,9	0,800	847	898	957	*024	*104	*201	*326	*503	*804	»	0,0
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
	Log. cotang.											

Logarithmes des sinus et des sécantes de dix-millième en dix-millième du quadrant, pour les trois premiers centièmes du quadrant.

	Log. sinus.												Log. séc.
0,q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0,q	0,00
000	$\bar{4}$, »	1961	4971	6732	7982	8951	9743	*0412	*0992	*1504	*1961	999	00
001	$\bar{3}$,1961	2375	2753	3101	3422	3722	4002	4266	4514	4749	4971	998	00
002	4971	5183	5385	5578	5763	5941	6111	6275	6433	6585	6732	997	00
003	6732	6875	7013	7146	7276	7402	7524	7643	7759	7872	7982	996	00
004	7982	8089	8194	8296	8396	8493	8589	8682	8774	8863	8951	995	00
005	$\bar{3}$,8951	9037	9121	9204	9285	9365	9443	9520	9595	9670	9743	994	00
006	9743	9814	9885	9955	*0023	*0090	*0157	*0222	*0286	*0350	*0412	993	00
007	$\bar{2}$,0412	0474	0534	0594	0653	0712	0769	0826	0882	0937	0992	992	00
008	0992	1046	1099	1152	1204	1255	1306	1356	1406	1455	1503	991	00
009	1503	1551	1599	1646	1692	1738	1784	1829	1873	1917	1961	990	00
010	$\bar{2}$,1961	2004	2047	2089	2131	2173	2214	2255	2295	2335	2375	989	01
011	2375	2414	2453	2492	2530	2568	2606	2643	2680	2716	2753	988	01
012	2753	2789	2825	2860	2895	2930	2965	2999	3033	3067	3100	987	01
013	3100	3134	3167	3199	3232	3264	3296	3328	3360	3391	3422	986	01
014	3422	3453	3484	3514	3544	3575	3604	3634	3663	3693	3722	985	01
015	$\bar{2}$,3722	3751	3779	3808	3836	3864	3892	3920	3947	3975	4002	984	01
016	4002	4029	4056	4083	4109	4136	4162	4188	4214	4240	4265	983	01
017	4265	4291	4316	4341	4366	4391	4416	4440	4465	4489	4513	982	02
018	4513	4537	4561	4585	4609	4632	4656	4679	4702	4725	4748	981	02
019	4748	4771	4794	4816	4839	4861	4883	4905	4927	4949	4971	980	02
020	$\bar{2}$,4971	4992	5014	5035	5057	5078	5099	5120	5141	5162	5183	979	02
021	5183	5203	5224	5244	5265	5285	5305	5325	5345	5365	5385	978	02
022	5385	5404	5424	5443	5463	5482	5501	5521	5540	5559	5578	977	03
023	5578	5596	5615	5634	5652	5671	5689	5708	5726	5744	5762	976	03
024	5762	5780	5798	5816	5834	5852	5869	5887	5905	5922	5939	975	03
025	$\bar{2}$,5939	5957	5974	5991	6008	6025	6042	6059	6076	6093	6110	974	03
026	6110	6126	6143	6160	6176	6192	6209	6225	6241	6257	6274	973	04
027	6274	6290	6306	6321	6337	6353	6369	6385	6400	6416	6431	972	04
028	6431	6447	6462	6478	6493	6508	6523	6539	6554	6569	6584	971	04
029	6584	6599	6614	6628	6643	6658	6673	6687	6702	6716	6731	970	05
0,q	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0,q	Log. cosec.
	Log. cosinus.												

XIII. (Suite.) — LOGARITHMES DES FONCTIONS CIRCULAIRES

Log. sinus.

0^q,	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
00	»	$\bar{3}$,1961	$\bar{3}$,4971	$\bar{3}$,6732	$\bar{3}$,7982	$\bar{3}$,8951	$\bar{3}$,9743	$\bar{2}$,0412	$\bar{2}$,0992	$\bar{2}$,1503	$\bar{2}$,1961	99
01	$\bar{2}$,1961	2375	2753	3100	3422	3722	4002	4265	4513	4748	4971	98
02	4971	5183	5385	5578	5762	5939	6110	6274	6431	6584	6731	97
03	6731	6873	7011	7144	7274	7400	7522	7641	7756	7869	7979	96
04	7979	8086	8191	8293	8392	8490	8585	8678	8769	8859	8946	95
05	$\bar{2}$,8946	9032	9116	9199	9280	9359	9437	9514	9589	9664	9736	94
06	9736	9808	9878	9948	*0016	*0083	*0149	*0214	*0278	*0341	*0403	93
07	$\bar{1}$,0403	0465	0525	0585	0644	0702	0759	0816	0871	0926	0981	92
08	0981	1034	1087	1140	1191	1242	1293	1343	1392	1441	1489	91
09	1489	1537	1584	1631	1677	1722	1767	1812	1856	1900	1943	90
10	$\bar{1}$,1943	1986	2029	2071	2112	2153	2194	2235	2275	2314	2353	89
11	2353	2392	2431	2469	2507	2545	2582	2619	2655	2691	2727	88
12	2727	2763	2798	2833	2868	2902	2937	2970	3004	3037	3070	87
13	3070	3103	3136	3168	3200	3232	3264	3295	3326	3357	3387	86
14	3387	3418	3448	3478	3508	3537	3567	3596	3625	3653	3682	85
15	$\bar{1}$,3682	3710	3738	3766	3794	3822	3849	3876	3903	3930	3957	84
16	3957	3983	4009	4036	4061	4087	4113	4138	4164	4189	4214	83
17	4214	4239	4264	4288	4312	4337	4361	4385	4409	4432	4456	82
18	4456	4479	4503	4526	4549	4572	4594	4617	4639	4662	4684	81
19	4684	4706	4728	4750	4772	4793	4815	4836	4858	4879	4900	80
20	$\bar{1}$,4900	4921	4942	4962	4983	5003	5024	5044	5064	5084	5104	79
21	5104	5124	5144	5164	5183	5203	5222	5241	5261	5280	5299	78
22	5299	5318	5336	5355	5374	5392	5411	5429	5447	5465	5484	77
23	5484	5502	5520	5537	5555	5573	5590	5608	5625	5643	5660	76
24	5660	5677	5694	5711	5728	5745	5762	5779	5795	5812	5828	75
25	$\bar{1}$,5828	5845	5861	5877	5894	5910	5926	5942	5958	5974	5990	74
26	5990	6005	6021	6037	6052	6068	6083	6098	6114	6129	6144	73
27	6144	6159	6174	6189	6204	6219	6233	6248	6263	6277	6292	72
28	6292	6306	6321	6335	6349	6364	6378	6392	6406	6420	6434	71
29	6434	6448	6462	6475	6489	6503	6516	6530	6544	6557	6570	70
30	$\bar{1}$,6570	6584	6597	6610	6624	6637	6650	6663	6676	6689	6702	69
31	6702	6715	6727	6740	6753	6766	6778	6791	6803	6816	6828	68
32	6828	6841	6853	6865	6878	6890	6902	6914	6926	6938	6950	67
33	6950	6962	6974	6986	6998	7009	7021	7033	7044	7056	7068	66
34	7068	7079	7091	7102	7113	7125	7136	7147	7159	7170	7181	65
35	$\bar{1}$,7181	7192	7203	7214	7225	7236	7247	7258	7269	7279	7290	64
36	7290	7301	7312	7322	7333	7344	7354	7365	7375	7386	7396	63
37	7396	7406	7417	7427	7437	7447	7458	7468	7478	7488	7498	62
38	7498	7508	7518	7528	7538	7548	7558	7567	7577	7587	7597	61
39	7597	7606	7616	7626	7635	7645	7654	7664	7673	7683	7692	60
40	$\bar{1}$,7692	7702	7711	7720	7729	7739	7748	7757	7766	7775	7785	59
41	7785	7794	7803	7812	7821	7830	7839	7847	7856	7865	7874	58
42	7874	7883	7891	7900	7909	7918	7926	7935	7943	7952	7960	57
43	7960	7969	7977	7986	7994	8003	8011	8019	8028	8036	8044	56
44	8044	8053	8061	8069	8077	8085	8093	8101	8109	8117	8125	55
45	$\bar{1}$,8125	8133	8141	8149	8157	8165	8173	8181	8189	8196	8204	54
46	8204	8212	8219	8227	8235	8242	8250	8258	8265	8273	8280	53
47	8280	8288	8295	8303	8310	8317	8325	8332	8339	8347	8354	52
48	8354	8361	8369	8376	8383	8390	8397	8404	8411	8418	8426	51
49	8426	8433	8440	8447	8454	8460	8467	8474	8481	8488	8495	50
												0^q,
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	

Log. cosinus.

DE MILLIÈME EN MILLIÈME DU QUADRANT.

Log. cosinus.

0,q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
00	0,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	*9999	99
01	$\bar{1}$,9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9998	9998	9998	9998	98
02	9998	9998	9997	9997	9997	9997	9996	9996	9996	9995	9995	97
03	9995	9995	9995	9994	9994	9993	9993	9993	9992	9992	9991	96
04	9991	9991	9991	9990	9990	9989	9989	9988	9988	9987	9987	95
05	$\bar{1}$,9987	9986	9985	9985	9984	9984	9983	9983	9982	9981	9981	94
06	9981	9980	9979	9979	9978	9977	9977	9976	9975	9974	9974	93
07	9974	9973	9972	9971	9971	9970	9969	9968	9967	9966	9966	92
08	9966	9965	9964	9963	9962	9961	9960	9959	9958	9957	9956	91
09	9956	9955	9954	9953	9952	9951	9950	9949	9948	9947	9946	90
10	$\bar{1}$,9946	9945	9944	9943	9942	9941	9940	9938	9937	9936	9935	89
11	9935	9934	9932	9931	9930	9929	9928	9926	9925	9924	9922	88
12	9922	9921	9920	9918	9917	9916	9914	9913	9912	9910	9909	87
13	9909	9907	9906	9905	9903	9902	9900	9899	9897	9896	9894	86
14	9894	9893	9891	9890	9888	9886	9885	9883	9882	9880	9878	85
15	$\bar{1}$,9878	9877	9875	9873	9872	9870	9868	9867	9865	9863	9861	84
16	9861	9860	9858	9856	9854	9852	9851	9849	9847	9845	9843	83
17	9843	9841	9840	9838	9836	9834	9832	9830	9828	9826	9824	82
18	9824	9822	9820	9818	9816	9814	9812	9810	9808	9806	9804	81
19	9804	9802	9799	9797	9795	9793	9791	9789	9786	9784	9782	80
20	$\bar{1}$,9782	9780	9778	9775	9773	9771	9769	9766	9764	9762	9759	79
21	9759	9757	9755	9752	9750	9747	9745	9743	9740	9738	9735	78
22	9735	9733	9730	9728	9725	9723	9720	9718	9715	9713	9710	77
23	9710	9708	9705	9702	9700	9697	9694	9692	9689	9686	9684	76
24	9684	9681	9678	9676	9673	9670	9667	9665	9662	9659	9656	75
25	$\bar{1}$,9656	9653	9650	9648	9645	9642	9639	9636	9633	9630	9627	74
26	9627	9624	9621	9618	9615	9612	9609	9606	9603	9600	9597	73
27	9597	9594	9591	9588	9585	9582	9578	9575	9572	9569	9566	72
28	9566	9562	9559	9556	9553	9549	9546	9543	9540	9536	9533	71
29	9533	9530	9526	9523	9519	9516	9513	9509	9506	9502	9499	70
30	$\bar{1}$,9499	9495	9492	9488	9485	9481	9478	9474	9471	9467	9463	69
31	9463	9460	9456	9452	9449	9445	9441	9438	9434	9430	9427	68
32	9427	9423	9419	9415	9411	9408	9404	9400	9396	9392	9388	67
33	9388	9384	9381	9377	9373	9369	9365	9361	9357	9353	9349	66
34	9349	9345	9341	9337	9332	9328	9324	9320	9316	9312	9308	65
35	$\bar{1}$,9308	9303	9299	9295	9291	9287	9282	9278	9274	9269	9265	64
36	9265	9261	9256	9252	9248	9243	9239	9234	9230	9226	9221	63
37	9221	9217	9212	9208	9203	9198	9194	9189	9185	9180	9175	62
38	9175	9171	9166	9161	9157	9152	9147	9143	9138	9133	9128	61
39	9128	9124	9119	9114	9109	9104	9099	9094	9089	9085	9080	60
40	$\bar{1}$,9080	9075	9070	9065	9060	9055	9050	9044	9039	9034	9029	59
41	9029	9024	9019	9014	9009	9003	8998	8993	8988	8982	8977	58
42	8977	8972	8967	8961	8956	8950	8945	8940	8934	8929	8923	57
43	8923	8918	8912	8907	8901	8896	8890	8885	8879	8873	8868	56
44	8868	8862	8856	8851	8845	8839	8834	8828	8822	8816	8810	55
45	$\bar{1}$,8810	8805	8799	8793	8787	8781	8775	8769	8763	8757	8751	54
46	8751	8745	8739	8733	8727	8721	8715	8709	8703	8696	8690	53
47	8690	8684	8678	8671	8665	8659	8653	8646	8640	8633	8627	52
48	8627	8621	8614	8608	8601	8595	8588	8582	8575	8569	8562	51
49	8562	8555	8549	8542	8535	8529	8522	8515	8508	8502	8495	50
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0,q

Log. sinus.

XIII. (Suite.) — LOGARITHMES DES FONCTIONS CIRCULAIRES

Log. tang.

$0,^{q}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
00	»	$\bar{3}$,1961	$\bar{3}$,4972	$\bar{3}$,6732	$\bar{3}$,7982	$\bar{3}$,8951	$\bar{3}$,9743	$\bar{2}$,0412	$\bar{2}$,0992	$\bar{2}$,1504	$\bar{2}$,1962	99
01	$\bar{2}$,1962	2376	2754	3101	3423	3723	4003	4267	4515	4750	4973	98
02	4973	5185	5387	5580	5765	5943	6113	6277	6436	6588	6736	97
03	6736	6878	7016	7150	7280	7406	7529	7648	7764	7877	7988	96
04	7988	8095	8200	8302	8403	8501	8596	8690	8782	8872	8960	95
05	$\bar{2}$,8960	9046	9131	9214	9296	9376	9454	9532	9608	9682	9756	94
06	9756	9828	9899	9969	*0038	*0105	*0172	*0238	*0303	*0367	*0430	93
07	$\bar{1}$,0430	0492	0553	0614	0673	0732	0790	0847	0904	0960	1015	92
08	1015	1070	1123	1177	1229	1281	1333	1384	1434	1484	1533	91
09	1533	1581	1629	1677	1724	1771	1817	1863	1908	1953	1997	90
10	$\bar{1}$,1997	2041	2085	2128	2170	2213	2255	2296	2337	2378	2419	89
11	2419	2459	2499	2538	2577	2616	2654	2692	2730	2768	2805	88
12	2805	2842	2878	2915	2951	2987	3022	3057	3092	3127	3162	87
13	3162	3196	3230	3264	3297	3330	3363	3396	3429	3461	3493	86
14	3493	3525	3557	3588	3620	3651	3682	3713	3743	3773	3804	85
15	$\bar{1}$,3804	3833	3863	3893	3922	3952	3981	4010	4038	4067	4095	84
16	4095	4123	4152	4179	4207	4235	4262	4290	4317	4344	4371	83
17	4371	4397	4424	4450	4477	4503	4529	4555	4581	4606	4632	82
18	4632	4657	4683	4708	4733	4758	4782	4807	4832	4856	4880	81
19	4880	4905	4929	4953	4977	5000	5024	5048	5071	5094	5118	80
20	$\bar{1}$,5118	5141	5164	5187	5210	5233	5255	5278	5300	5323	5345	79
21	5345	5367	5389	5411	5433	5455	5477	5499	5520	5542	5563	78
22	5563	5585	5606	5627	5648	5669	5690	5711	5732	5753	5773	77
23	5773	5794	5815	5835	5855	5876	5896	5916	5936	5956	5976	76
24	5976	5996	6016	6036	6055	6075	6095	6114	6134	6153	6172	75
25	$\bar{1}$,6172	6192	6211	6230	6249	6268	6287	6306	6325	6344	6362	74
26	6362	6381	6400	6418	6437	6455	6474	6492	6510	6529	6547	73
27	6547	6565	6583	6601	6619	6637	6655	6673	6691	6708	6726	72
28	6726	6744	6762	6779	6797	6814	6832	6849	6866	6884	6901	71
29	6901	6918	6935	6953	6970	6987	7004	7021	7038	7055	7072	70
30	$\bar{1}$,7072	7089	7105	7122	7139	7156	7172	7189	7205	7222	7238	69
31	7238	7255	7271	7288	7304	7320	7337	7353	7369	7386	7402	68
32	7402	7418	7434	7450	7466	7482	7498	7514	7530	7546	7562	67
33	7562	7578	7593	7609	7625	7641	7656	7672	7688	7703	7719	66
34	7719	7734	7750	7765	7781	7796	7812	7827	7843	7858	7873	65
35	1,7873	7888	7904	7919	7934	7949	7965	7980	7995	8010	8025	64
36	8025	8040	8055	8070	8085	8100	8115	8130	8145	8160	8175	63
37	8175	8190	8205	8219	8234	8249	8264	8278	8293	8308	8323	62
38	8323	8337	8352	8366	8381	8396	8410	8425	8439	8454	8468	61
39	8468	8483	8497	8512	8526	8541	8555	8570	8584	8598	8613	60
40	1,8613	8627	8641	8656	8670	8684	8698	8713	8727	8741	8755	59
41	8755	8770	8784	8798	8812	8826	8840	8855	8869	8883	8897	58
42	8897	8911	8925	8939	8953	8967	8981	8995	9009	9023	9037	57
43	9037	9051	9065	9079	9093	9107	9121	9135	9149	9163	9176	56
44	9176	9190	9204	9218	9232	9246	9260	9274	9287	9301	9315	55
45	1,9315	9329	9343	9356	9370	9384	9398	9412	9425	9439	9453	54
46	9453	9467	9480	9494	9508	9522	9535	9549	9563	9576	9590	53
47	9590	9604	9617	9631	9645	9659	9672	9686	9700	9713	9727	52
48	9727	9741	9754	9768	9782	9795	9809	9823	9836	9850	9864	51
49	9864	9877	9891	9904	9918	9932	9945	9959	9973	9986	*0000	50
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$0,^{q}$

Log. cotang.

DE MILLIÈME EN MILLIÈME DU QUADRANT.

Log. cotang.

0,q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
00	»	2,8039	2,5028	2,3268	2,2018	2,1049	2,0257	1,9588	1,9008	1,8496	1,8038	99
01	1,8038	7624	7246	6899	6577	6277	5997	5733	5485	5250	5027	98
02	5027	4815	4613	4420	4235	4057	3887	3723	3564	3412	3264	97
03	3264	3122	2984	2850	2720	2594	2471	2352	2236	2123	2012	96
04	2012	1905	1800	1698	1597	1499	1404	1310	1218	1128	1040	95
05	1,1040	0954	0869	0786	0704	0624	0546	0468	0392	0318	0244	94
06	0244	0172	0101	0031	*9962	*9895	*9828	*9762	*9697	*9633	*9570	93
07	0,9570	9508	9447	9386	9327	9268	9210	9153	9096	9040	8985	92
08	8985	8930	8877	8823	8771	8719	8667	8616	8566	8516	8467	91
09	8467	8419	8371	8323	8276	8229	8183	8137	8092	8047	8003	90
10	0,8003	7959	7916	7872	7830	7787	7745	7704	7663	7622	7581	89
11	7581	7541	7501	7462	7423	7384	7346	7308	7270	7232	7195	88
12	7195	7158	7122	7085	7049	7013	6978	6943	6908	6873	6838	87
13	6838	6804	6770	6736	6703	6670	6637	6604	6571	6539	6507	86
14	6507	6475	6443	6412	6380	6349	6318	6287	6257	6227	6196	85
15	0,6196	6167	6137	6107	6078	6048	6019	5990	5962	5933	5905	84
16	5905	5877	5848	5821	5793	5765	5738	5710	5683	5656	5629	83
17	5629	5603	5576	5550	5523	5497	5471	5445	5419	5394	5368	82
18	5368	5343	5317	5292	5267	5242	5218	5193	5168	5144	5120	81
19	5120	5095	5071	5047	5023	5000	4976	4952	4929	4906	4882	80
20	0,4882	4859	4836	4813	4790	4767	4745	4722	4700	4677	4655	79
21	4655	4633	4611	4589	4567	4545	4523	4501	4480	4458	4437	78
22	4437	4415	4394	4373	4352	4331	4310	4289	4268	4247	4227	77
23	4227	4206	4185	4165	4145	4124	4104	4084	4064	4044	4024	76
24	4024	4004	3984	3964	3945	3925	3905	3886	3866	3847	3828	75
25	0,3828	3808	3789	3770	3751	3732	3713	3694	3675	3656	3638	74
26	3638	3619	3600	3582	3563	3545	3526	3508	3490	3471	3453	73
27	3453	3435	3417	3399	3381	3363	3345	3327	3309	3292	3274	72
28	3274	3256	3238	3221	3203	3186	3168	3151	3134	3116	3099	71
29	3099	3082	3065	3047	3030	3013	2996	2979	2962	2945	2928	70
30	0,2928	2911	2895	2878	2861	2844	2828	2811	2795	2778	2762	69
31	2762	2745	2729	2712	2696	2680	2663	2647	2631	2614	2598	68
32	2598	2582	2566	2550	2534	2518	2502	2486	2470	2454	2438	67
33	2438	2422	2407	2391	2375	2359	2344	2328	2312	2297	2281	66
34	2281	2266	2250	2235	2219	2204	2188	2173	2157	2142	2127	65
35	0,2127	2112	2096	2081	2066	2051	2035	2020	2005	1990	1975	64
36	1975	1960	1945	1930	1915	1900	1885	1870	1855	1840	1825	63
37	1825	1810	1795	1781	1766	1751	1736	1722	1707	1692	1677	62
38	1677	1663	1648	1634	1619	1604	1590	1575	1561	1546	1532	61
39	1532	1517	1503	1488	1474	1459	1445	1430	1416	1402	1387	60
40	0,1387	1373	1359	1344	1330	1316	1302	1287	1273	1259	1245	59
41	1245	1230	1216	1202	1188	1174	1160	1145	1131	1117	1103	58
42	1103	1089	1075	1061	1047	1033	1019	1005	0991	0977	0963	57
43	0963	0949	0935	0921	0907	0893	0879	0865	0851	0837	0824	56
44	0824	0810	0796	0782	0768	0754	0740	0726	0713	0699	0685	55
45	0,0685	0671	0657	0644	0630	0616	0602	0588	0575	0561	0547	54
46	0547	0533	0520	0506	0492	0478	0465	0451	0437	0424	0410	53
47	0410	0396	0383	0369	0355	0341	0328	0314	0300	0287	0273	52
48	0273	0259	0246	0232	0218	0205	0191	0177	0164	0150	0136	51
49	0136	0123	0109	0096	0082	0068	0055	0041	0027	0014	0000	50
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0,q

Log. tang.

XIV. — FONCTIONS CIRCULAIRES

Valeurs naturelles.

u	d	Amh *u*	Tgh *u*		$\frac{1}{\text{Tgh } u}$		Sh *u*		$\frac{1}{\text{Sh } u}$		Ch *u*	$\frac{1}{\text{Ch } u}$			
		arc	**sinus**	**d**	**cosée**	**d**	**tang**	**d**	**cotg**	**d**	**séc**	**cosin**			
o,		**o,ᑫ**	o,				o,						**o,ᑫ**		
0000	16	**000**	0000	16	∞	»	0000	16	∞	»	1,0000	1,0000	***000**	∞	»
0016	15	**001**	0016	15	636,62	»	0016	15	636,62	»	0000	0000	**999**	7,149	693
0031	16	**002**	0031	16	318,31	»	0031	16	318,31	»	0000	0000	**998**	6,456	405
0047	16	**003**	0047	16	212,21	»	0047	16	212,21	»	0000	0000	**997**	6,051	288
0063	16	**004**	0063	16	159,16	»	0063	16	159,15	»	0000	0000	**996**	5,763	223
0079	15	**005**	0079	15	127,33	»	0079	15	127,32	»	1,0000	1,0000	**995**	5,540	182
0094	16	**006**	0094	16	106,10	»	0094	16	106,10	»	0000	1,0000	**994**	358	155
0110	16	**007**	0110	16	90,95	»	0110	16	90,94	»	0001	0,9999	**993**	203	133
0126	15	**008**	0126	15	79,58	»	0126	15	79,57	»	0001	9999	**992**	5,070	118
0141	16	**009**	0141	16	70,74	»	0141	16	70,73	»	0001	9999	**991**	4,952	105
0157	16	**010**	0157	16	63,66	578	0157	16	63,66	579	1,0001	0,9999	**990**	4,847	96
0173	16	**011**	0173	15	57,88	483	0173	16	57,87	482	0001	9999	**989**	751	87
0189	15	**012**	0188	16	53,05	408	0189	15	53,05	409	0002	9998	**988**	664	80
0204	16	**013**	0204	16	48,97	349	0204	16	48,96	349	0002	9998	**987**	584	74
0220	16	**014**	0220	16	45,48	303	0220	16	45,47	304	0002	9998	**986**	510	69
0236	15	**015**	0236	15	42,45	266	0236	15	42,43	265	1,0003	0,9997	**985**	4,441	64
0251	16	**016**	0251	16	39,79	234	0251	16	39,78	234	0003	9997	**984**	377	61
0267	16	**017**	0267	16	37,45	208	0267	16	37,44	208	0004	9996	**983**	316	57
0283	15	**018**	0283	15	35,37	186	0283	16	35,36	186	0004	9996	**982**	259	54
0298	16	**019**	0298	16	33,51	167	0299	15	33,50	168	0004	9996	**981**	205	51
0314	16	**020**	0314	16	31,84	152	0314	16	31,82	152	1,0005	0,9995	**980**	4,154	49
0330	16	**021**	0330	16	30,32	138	0330	16	30,30	137	0005	9995	**979**	105	47
0346	15	**022**	0346	15	28,94	125	0346	15	28,93	126	0006	9994	**978**	058	44
0361	16	**023**	0361	16	27,69	116	0361	16	27,67	116	0007	9993	**977**	4,014	43
0377	16	**024**	0377	16	26,53	106	0377	16	26,51	106	0007	9993	**976**	3,971	41
0393	16	**025**	0393	15	25,47	98	0393	16	25,45	98	1,0008	0,9992	**975**	3,930	39
0409	15	**026**	0408	16	24,49	90	0409	15	24,47	91	0008	9992	**974**	891	38
0424	16	**027**	0424	16	23,59	85	0424	16	23,56	84	0009	9991	**973**	853	36
0440	16	**028**	0440	15	22,74	78	0440	16	22,72	78	0010	9990	**972**	817	35
0456	15	**029**	0455	16	21,96	73	0456	16	21,94	74	0010	9990	**971**	782	34
0471	16	**030**	0471	16	21,23	69	0472	15	21,20	68	1,0011	0,9989	**970**	3,748	33
0487	16	**031**	0487	15	20,54	64	0487	16	20,52	64	0012	9988	**969**	715	32
0503	16	**032**	0502	16	19,90	60	0503	16	19,88	61	0013	9987	**968**	683	30
0519	15	**033**	0518	16	19,30	57	0519	16	19,27	56	0013	9987	**967**	653	30
0534	16	**034**	0534	16	18,73	53	0535	15	18,71	54	0014	9986	**966**	623	29
0550	16	**035**	0550	15	18,20	51	0550	16	18,17	50	1,0015	0,9985	**965**	3,594	28
0566	16	**036**	0565	16	17,69	47	0566	16	17,67	48	0016	9984	**964**	566	28
0582	15	**037**	0581	16	17,22	46	0582	16	17,19	46	0017	9983	**963**	538	27
0597	16	**038**	0597	15	16,76	43	0598	15	16,73	43	0018	9982	**962**	511	26
0613	16	**039**	0612	16	16,33	40	0613	16	16,30	41	0019	9981	**961**	485	25
0629	15	**040**	0628	16	15,93	39	0629	16	15,89	38	1,0020	0,9980	**960**	3,460	25
0644	16	**041**	0644	15	15,54	37	0645	16	15,51	37	0021	9979	**959**	435	24
0660	16	**042**	0659	16	15,17	35	0661	15	15,14	36	0022	9978	**958**	411	23
0676	16	**043**	0675	16	14,82	34	0676	16	14,78	33	0023	9977	**957**	388	23
0692	15	**044**	0691	15	14,48	32	0692	16	14,45	33	0024	9976	**956**	365	23
0707	16	**045**	0706	16	14,16	31	0708	16	14,12	30	1,0025	0,9975	**955**	3,342	22
0723	16	**046**	0722	16	13,85	29	0724	16	13,82	30	0026	9974	**954**	320	21
0739	16	**047**	0738	15	13,56	28	0740	15	13,52	28	0027	9973	**953**	299	21
0755	15	**048**	0753	16	13,28	27	0755	16	13,24	27	0028	9972	**952**	278	21
0770	16	**049**	0769	16	13,01	26	0771	16	12,97	26	0030	9970	**951**	257	20
0786		**050**	0785		12,75		0787		12,71		1,0031	0,9969	**950**	3,237	
o,		**o,ᑫ**	o,				o,						**o,ᑫ**		
			cosin	**d**	**séc**	**d**	**cotg**	**d**	**tang**	**d**	**cosée**	**sinus**	**arc**		
			$\frac{1}{\text{Ch } u}$		Ch *u*		$\frac{1}{\text{Sh } u}$		Sh *u*		$\frac{1}{\text{Tgh } u}$	Tgh *u*	Amh *u*	*u*	d

ET HYPERBOLIQUES.

Logarithmes.

M u	d	Amh u	Tgh u	·	1/Tgh u	Sh u	·	1/Sh u	Ch u	1/Ch u			..
		arc	sin	d	coséc	tang	d	cotg	séc	cosin			
0,00		$0,^{q}$							0,		$0,^{q}$		
0000	682	000	»	»	»	»	»	»	0000	0,0000	*000	∞	»
0682	682	001	$\bar{3}$,1961	3010	2,8039	$\bar{3}$,1961	3011	2,8039	0000	0000	999	3,1049	3010
1364	683	002	4971	1761	5029	4972	1760	5028	0000	0000	998	2,8039	1761
2047	682	003	6732	1250	3268	6732	1250	3268	0000	0000	997	6278	1250
2729	682	004	7982	969	2018	7982	969	2018	0000	0000	996	5028	969
3411	682	005	$\bar{3}$,8951	792	2,1049	$\bar{3}$,8951	792	2,1049	0000	0,0000	995	2,4059	791
4093	682	006	$\bar{3}$,9743	669	2,0257	$\bar{3}$,9743	669	2,0257	0000	0000	994	3268	670
4775	683	007	$\bar{2}$,0412	580	1,9588	$\bar{2}$,0412	580	1,9588	0000	0000	993	2598	580
5458	682	008	0992	511	9008	0992	512	9008	0000	0000	992	2018	511
6140	682	009	1503	458	8497	1504	458	8496	0000	0000	991	1507	458
6822	682	010	$\bar{2}$,1961	414	1,8039	$\bar{2}$,1962	414	1,8038	0001	$\bar{1}$,9999	990	2,1049	414
7504	683	011	2375	378	7625	2376	378	7624	0001	9999	989	0635	378
8187	682	012	2753	347	7247	2754	347	7246	0001	9999	988	2,0257	347
8869	682	013	3100	322	6900	3101	322	6899	0001	9999	987	1,9910	322
9551	683	014	3422	300	6578	3423	300	6577	0001	9999	986	9588	300
1023	69	015	$\bar{2}$,3722	280	1,6278	$\bar{2}$,3723	280	1,6277	0001	$\bar{1}$,9999	985	1,9288	280
1092	68	016	4002	263	5998	4003	264	5997	0001	9999	984	9008	264
1160	68	017	4265	248	5735	4267	248	5733	0002	9998	983	8744	248
1228	68	018	4513	235	5487	4515	235	5485	0002	9998	982	8496	235
1296	69	019	4748	223	5252	4750	223	5250	0002	9998	981	8261	223
1365	68	020	$\bar{2}$,4971	212	1,5029	$\bar{2}$,4973	212	1,5027	0002	$\bar{1}$,9998	980	1,8038	211
1433	68	021	5183	202	4817	5185	202	4815	0002	9998	979	7827	203
1501	68	022	5385	193	4615	5387	193	4613	0003	9997	978	7624	193
1569	69	023	5578	184	4422	5580	185	4420	0003	9997	977	7431	185
1638	68	024	5762	177	4238	5765	178	4235	0003	9997	976	7246	177
1706	68	025	$\bar{2}$,5939	171	1,4061	$\bar{2}$,5943	170	1,4057	0003	$\bar{1}$,9997	975	1,7069	170
1774	68	026	6110	164	3890	6113	164	3887	0004	9996	974	6899	164
1842	69	027	6274	157	3726	6277	159	3723	0004	9996	973	6735	158
1911	68	028	6431	153	3569	6436	152	3564	0004	9996	972	6577	153
1979	68	029	6584	147	3416	6588	148	3412	0005	9995	971	6424	147
2047	69	030	$\bar{2}$,6731	142	1,3269	$\bar{2}$,6736	142	1,3264	0005	$\bar{1}$,9995	970	1,6277	142
2116	68	031	6873	138	3127	6878	138	3122	0005	9995	969	6135	138
2184	68	032	7011	133	2989	7016	134	2984	0005	9995	968	5997	134
2252	69	033	7144	130	2856	7150	130	2850	0006	9994	967	5863	130
2321	68	034	7274	126	2726	7280	126	2720	0006	9994	966	5733	126
2389	68	035	$\bar{2}$,7400	122	1,2600	$\bar{2}$,7406	123	1,2594	0007	$\bar{1}$,9993	965	1,5607	122
2457	69	036	7522	119	2478	7529	119	2471	0007	9993	964	5485	119
2526	68	037	7641	115	2359	7648	116	2352	0007	9993	963	5366	116
2594	68	038	7756	113	2244	7764	113	2236	0008	9992	962	5250	113
2662	69	039	7869	110	2131	7877	111	2123	0008	9992	961	5137	110
2731	68	040	$\bar{2}$,7979	107	1,2021	$\bar{2}$,7988	107	1,2012	0009	$\bar{1}$,9991	960	1,5027	107
2799	68	041	8086	105	1914	8095	105	1905	0009	9991	959	4920	105
2867	69	042	8191	102	1809	8200	102	1800	0009	9991	958	4815	103
2936	68	043	8293	99	1707	8302	101	1698	0010	9990	957	4713	100
3004	68	044	8392	98	1608	8403	98	1597	0010	9990	956	4613	98
3072	69	045	$\bar{2}$,8490	95	1,1510	$\bar{2}$,8501	95	1,1499	0011	$\bar{1}$,9989	955	1,4515	95
3141	68	046	8585	93	1415	8596	94	1404	0011	9989	954	4420	94
3209	69	047	8678	91	1322	8690	92	1310	0012	9988	953	4326	91
3278	68	048	8769	90	1231	8782	90	1218	0012	9988	952	4235	90
3346	68	049	8859	87	1141	8872	88	1128	0013	9987	951	4145	88
3414		050	$\bar{2}$,8946		1,1054	$\bar{2}$,8960		1,1040	0013	$\bar{1}$,9987	950	1,4057	
0,0		$0,^{q}$							0,		$0,^{q}$		
			cosin	d	séc	cotg	.d	tang	coséc	.sin	arc		
			1/Ch u	·	Ch u	1/Sh u		Sh u	1/Tgh u	Tgh u	Amh u	M u	d

XIV. (Suite.) — FONCTIONS CIRCULAIRES

Valeurs naturelles.

u	d	Amh u	Tgh u		1/Tgh u		Sh u		1/Sh u		Ch u	1/Ch u			
		arc	sinus	d	coséc	d	tang	d	cotg	d	séc	cosin			
0,		0,q	0,				0,					0,	0,q		
0786	16	**050**	0785	15	12,745	249	0787	16	12,706	250	1,0031	9989	**950**	3,2368	198
0802	16	**051**	0800	16	496	240	0803	16	456	241	0032	9968	**949**	2170	195
0818	15	**052**	0816	16	256	230	0819	15	12,215	231	0033	9967	**948**	1975	190
0833	16	**053**	0832	15	12,026	223	0834	16	11,984	223	0035	9965	**947**	1785	188
0849	16	**054**	0847	16	11,803	214	0850	16	761	215	0036	9964	**946**	1597	183
0865	16	**055**	0863	16	11,589	206	0866	16	11,546	207	1,0037	9963	**945**	3,1414	181
0881	16	**056**	0879	15	383	199	0882	16	339	200	0039	9961	**944**	1233	177
0897	15	**057**	0894	16	11,184	193	0898	16	11,139	193	0040	9960	**943**	1056	174
0912	16	**058**	0910	15	10,991	185	0914	15	10,946	187	0042	9959	**942**	0882	171
0928	16	**059**	0925	16	806	180	0929	16	759	180	0043	9957	**941**	0711	169
0944	16	**060**	0941	16	10,626	174	0945	16	10,579	175	1,0045	9956	**940**	3,0542	165
0960	15	**061**	0957	15	452	168	0961	16	404	168	0046	9954	**939**	0377	163
0975	16	**062**	0972	16	284	162	0977	16	236	164	0048	9953	**938**	0214	160
0991	16	**063**	0988	16	10,122	158	0993	16	10,072	158	0049	9951	**937**	3,0054	158
1007	16	**064**	1004	15	9,964	153	1009	16	9,914	154	0051	9950	**936**	2,9896	155
1023	16	**065**	1019	16	9,811	148	1025	15	9,760	149	1,0052	9948	**935**	2,9741	153
1039	15	**066**	1035	15	663	144	1040	16	611	144	0054	9946	**934**	9588	151
1054	16	**067**	1050	16	519	139	1056	16	467	141	0056	9945	**933**	9437	148
1070	16	**068**	1066	16	380	136	1072	16	326	136	0057	9943	**932**	9289	147
1086	16	**069**	1082	15	244	131	1088	16	190	132	0059	9941	**931**	9142	144
1102	16	**070**	1097	16	9,113	128	1104	16	9,058	129	1,0061	9940	**930**	2,8998	142
1118	15	**071**	1113	16	8,985	124	1120	16	8,929	125	0063	9938	**929**	8856	140
1133	16	**072**	1129	15	861	121	1136	16	804	121	0064	9936	**928**	8716	138
1149	16	**073**	1144	16	740	118	1152	16	683	119	0066	9934	**927**	8578	137
1165	16	**074**	1160	15	622	114	1168	16	564	115	0068	9933	**926**	8441	134
1181	16	**075**	1175	16	8,508	111	1184	16	8,449	112	1,0070	9931	**925**	2,8307	133
1197	15	**076**	1191	16	397	109	1200	15	337	110	0072	9929	**924**	8174	131
1212	16	**077**	1207	15	288	106	1215	16	227	106	0074	9927	**923**	8043	129
1228	16	**078**	1222	16	182	103	1231	16	121	104	0076	9925	**922**	7914	128
1244	16	**079**	1238	15	8,079	100	1247	16	017	101	0077	9923	**921**	7786	126
1260	16	**080**	1253	16	7,979	98	1263	16	7,916	99	1,0079	9921	**920**	2,7660	125
1276	16	**081**	1269	15	881	96	1279	16	817	96	0081	9919	**919**	7535	123
1292	15	**082**	1284	16	785	93	1295	16	721	94	0084	9917	**918**	7412	121
1307	16	**083**	1300	16	692	91	1311	16	627	92	0086	9915	**917**	7291	120
1323	16	**084**	1316	15	601	89	1327	16	535	90	0088	9913	**916**	7171	119
1339	16	**085**	1331	16	7,512	87	1343	16	7,445	88	1,0090	9911	**915**	2,7052	117
1355	16	**086**	1347	15	425	85	1359	16	357	85	0092	9909	**914**	6935	116
1371	16	**087**	1362	16	340	83	1375	16	272	84	0094	9907	**913**	6819	115
1387	16	**088**	1378	15	257	81	1391	16	188	82	0096	9905	**912**	6704	113
1403	15	**089**	1393	16	176	79	1407	16	106	80	0099	9902	**911**	6591	113
1418	16	**090**	1409	16	7,097	77	1423	16	7,026	78	1,0101	9900	**910**	2,6478	110
1434	16	**091**	1425	15	7,020	76	1439	16	6,948	76	0103	9898	**909**	6368	110
1450	16	**092**	1440	16	6,944	74	1455	16	872	75	0105	9896	**908**	6258	109
1466	16	**093**	1456	15	870	73	1471	16	797	74	0108	9893	**907**	6149	107
1482	16	**094**	1471	16	797	71	1487	16	723	72	0110	9891	**906**	6042	106
1498	16	**095**	1487	15	6,726	69	1503	16	6,651	70	1,0112	9889	**905**	2,5936	105
1514	16	**096**	1502	16	657	68	1519	17	581	69	0115	9887	**904**	5831	104
1530	15	**097**	1518	15	589	67	1536	16	512	67	0117	9884	**903**	5727	103
1545	16	**098**	1533	16	522	66	1552	16	445	66	0120	9882	**902**	5624	102
1561	16	**099**	1549	15	456	64	1568	16	379	65	0122	9879	**901**	5522	101
1577		**100**	1564		6,392		1584		6,314		1,0125	9877	**900**	2,5421	
0,		0,q	0,				0,					0,	0,q		
			cosin	d	séc	d	cotg	d	tang	d	coséc	sinus	arc		
			1/Ch u		Ch u		1/Sh u		Sh u		1/Tgh u	Tgh u	Amh u	u	d

ET HYPERBOLIQUES.

Logarithmes.

M u	d	Amh u	Tgh u		1/Tgh u	Sh u		1/Sh u	Ch u	1/Ch u			
		arc	sinus	d	coséc	tang	d	cotg	séc	cosin			
0,0		0,q							0,	$\bar{1}$,	0,q		
3414	69	**050**	$\bar{2}$,8946	86	1,1054	$\bar{2}$,8960	86	1,1040	0013	9987	**950**	1,4057	86
3483	68	**051**	9032	84	0968	9046	85	0954	0014	9986	**949**	3971	84
3551	69	**052**	9116	83	0884	9131	83	0869	0015	9985	**948**	3887	83
3620	68	**053**	9199	81	0801	9214	82	0786	0015	9985	**947**	3804	81
3688	69	**054**	9280	79	0720	9296	80	0704	0016	9984	**946**	3723	80
3757	68	**055**	$\bar{2}$,9359	78	1,0641	$\bar{2}$,9376	78	1,0624	0016	9984	**945**	1,3643	79
3825	69	**056**	9437	77	0563	9454	78	0546	0017	9983	**944**	3564	77
3894	68	**057**	9514	75	0486	9532	76	0468	0017	9983	**943**	3487	75
3962	69	**058**	9589	75	0411	9608	74	0392	0018	9982	**942**	3412	75
4031	68	**059**	9664	72	0336	9682	74	0318	0019	9981	**941**	3337	73
4099	69	**060**	$\bar{2}$,9736	72	1,0264	$\bar{2}$,9756	72	1,0244	0019	9981	**940**	1,3264	72
4168	68	**061**	9808	70	0192	9828	71	0172	0020	9980	**939**	3192	70
4236	69	**062**	9878	70	0122	9899	70	0101	0021	9979	**938**	3122	70
4305	68	**063**	$\bar{2}$,9948	68	1,0052	$\bar{2}$,9969	69	1,0031	0021	9979	**937**	3052	68
4373	69	**064**	$\bar{1}$,0016	67	0,9984	$\bar{1}$,0038	67	0,9962	0022	9978	**936**	2984	68
4442	69	**065**	$\bar{1}$,0083	66	0,9917	$\bar{1}$,0105	67	0,9895	0023	9977	**935**	1,2916	66
4511	68	**066**	0149	65	9851	0172	66	9828	0023	9977	**934**	2850	66
4579	69	**067**	0214	64	9786	0238	65	9762	0024	9976	**933**	2784	64
4648	68	**068**	0278	63	9722	0303	64	9697	0025	9975	**932**	2720	64
4716	69	**069**	0341	62	9659	0367	63	9633	0026	9974	**931**	2656	62
4785	69	**070**	$\bar{1}$,0403	62	0,9597	$\bar{1}$,0430	62	0,9570	0026	9974	**930**	1,2594	62
4854	68	**071**	0465	60	9535	0492	61	9508	0027	9973	**929**	2532	61
4922	69	**072**	0525	60	9475	0553	61	9447	0028	9972	**928**	2471	60
4991	69	**073**	0585	59	9415	0614	59	9386	0029	9971	**927**	2411	59
5060	68	**074**	0644	58	9356	0673	59	9327	0029	9971	**926**	2352	59
5128	69	**075**	$\bar{1}$,0702	57	0,9298	$\bar{1}$,0732	58	0,9268	0030	9970	**925**	1,2293	57
5197	69	**076**	0759	57	9241	0790	57	9210	0031	9969	**924**	2236	57
5266	68	**077**	0816	55	9184	0847	57	9153	0032	9968	**923**	2179	56
5334	69	**078**	0871	55	9129	0904	56	9096	0033	9967	**922**	2123	56
5403	69	**079**	0926	55	9074	0960	55	9040	0034	9966	**921**	2067	55
5472	69	**080**	$\bar{1}$,0981	53	0,9019	$\bar{1}$,1015	55	0,8985	0034	9966	**920**	1,2012	54
5541	68	**081**	1034	53	8966	1070	53	8930	0035	9965	**919**	1958	53
5609	69	**082**	1087	53	8913	1123	54	8877	0036	9964	**918**	1905	53
5678	69	**083**	1140	51	8860	1177	52	8823	0037	9963	**917**	1852	52
5747	69	**084**	1191	51	8809	1229	52	8771	0038	9962	**916**	1800	52
5816	69	**085**	$\bar{1}$,1242	51	0,8758	$\bar{1}$,1281	52	0,8719	0039	9961	**915**	1,1748	50
5885	69	**086**	1293	50	8707	1333	51	8667	0040	9960	**914**	1698	51
5954	68	**087**	1343	49	8657	1384	50	8616	0041	9959	**913**	1647	50
6022	69	**088**	1392	49	8608	1434	50	8566	0042	9958	**912**	1597	49
6091	69	**089**	1441	48	8559	1484	49	8516	0043	9957	**911**	1548	49
6160	69	**090**	$\bar{1}$,1489	48	0,8511	$\bar{1}$,1533	48	0,8467	0044	9956	**910**	1,1499	48
6229	69	**091**	1537	47	8463	1581	48	8419	0045	9955	**909**	1451	47
6298	69	**092**	1584	47	8416	1629	48	8371	0046	9954	**908**	1404	47
6367	69	**093**	1631	46	8369	1677	47	8323	0047	9953	**907**	1357	47
6436	69	**094**	1677	45	8323	1724	47	8276	0048	9952	**906**	1310	46
6505	69	**095**	$\bar{1}$,1722	45	0,8278	$\bar{1}$,1771	46	0,8229	0049	9951	**905**	1,1264	46
6574	69	**096**	1767	45	8233	1817	46	8183	0050	9950	**904**	1218	45
6643	69	**097**	1812	44	8188	1863	45	8137	0051	9949	**903**	1173	45
6712	69	**098**	1856	44	8144	1908	45	8092	0052	9948	**902**	1128	44
6781	69	**099**	1900	43	8100	1953	44	8047	0053	9947	**901**	1084	44
6850		**100**	$\bar{1}$,1943		0,8057	$\bar{1}$,1997		0,8003	0054	9946	**900**	1,1040	
0,0		0,q							0,	$\bar{1}$,	0,q		
			cosin	d	séc	cotg	d	tang	coséc	sinus	arc		
			1/Ch u		Ch u	1/Sh u		Sh u	1/Tgh u	Tgh u	Amh u	M u	d

XIV. (Suite.) — FONCTIONS CIRCULAIRES

Valeurs naturelles.

u	d	Amh u	Tgh u		1/Tgh u		Sh u		1/Sh u		Ch u	1/Ch u			
		arc	sinus	d	coséc	d	tang	d	cotg	d	séc	cosin			
0,		0,q	0,				0,					0,	0,q		
1577	16	100	1564	16	6,392	62	1584	16	6,314	64	1,0125	9877	900	2,5421	100
1593	16	101	1580	15	330	62	1600	16	250	62	0127	9874	899	5321	99
1609	16	102	1595	16	268	60	1616	16	188	61	0130	9872	898	5222	98
1625	16	103	1611	15	208	59	1632	16	127	60	0132	9869	897	5124	97
1641	16	104	1626	16	149	58	1648	16	067	59	0135	9867	896	5027	96
1657	16	105	1642	15	6,091	57	1664	17	6,008	58	1,0138	9864	895	2,4931	95
1673	16	106	1657	16	6,034	56	1681	16	5,950	56	0140	9862	894	4836	95
1689	16	107	1673	15	5,978	55	1697	16	894	56	0143	9859	893	4741	93
1705	16	108	1688	16	923	54	1713	16	838	55	0146	9856	892	4648	93
1721	16	109	1704	15	869	53	1729	16	783	53	0148	9854	891	4555	92
1737	15	110	1719	16	5,816	52	1745	16	5,730	53	1,0151	9851	890	2,4463	90
1752	16	111	1735	15	764	50	1761	17	677	52	0154	9848	889	4373	91
1768	16	112	1750	16	714	51	1778	16	625	50	0157	9846	888	4282	89
1784	16	113	1766	15	663	49	1794	16	575	50	0160	9843	887	4193	89
1800	16	114	1781	16	614	48	1810	16	525	50	0163	9840	886	4104	87
1816	16	115	1797	15	5,566	47	1826	17	5,475	48	1,0165	9837	885	2,4017	87
1832	16	116	1812	16	519	47	1843	16	427	47	0168	9834	884	3930	87
1848	16	117	1828	15	472	46	1859	16	380	47	0171	9832	883	3843	85
1864	16	118	1843	15	426	45	1875	16	333	46	0174	9829	882	3758	85
1880	16	119	1858	16	381	44	1891	17	287	45	0177	9826	881	3673	84
1896	16	120	1874	15	5,337	44	1908	16	5,242	44	1,0180	9823	880	2,3589	84
1912	16	121	1889	16	293	43	1924	16	198	44	0183	9820	879	3505	83
1928	16	122	1905	15	250	42	1940	16	154	43	0186	9817	878	3422	82
1944	16	123	1920	15	208	41	1956	17	111	42	0190	9814	877	3340	81
1960	16	124	1935	16	167	41	1973	16	069	42	0193	9811	876	3259	81
1976	16	125	1951	15	5,126	40	1989	16	5,027	41	1,0196	9808	875	2,3178	80
1992	16	126	1966	16	086	40	2005	17	4,986	40	0199	9805	874	3098	80
2008	16	127	1982	15	046	39	2022	16	946	40	0202	9802	873	3018	79
2024	16	128	1997	15	5,007	38	2038	17	906	39	0206	9799	872	2939	78
2040	16	129	2012	16	4,969	38	2055	16	867	38	0209	9795	871	2861	78
2056	16	130	2028	15	4,931	37	2071	16	4,829	38	1,0212	9792	870	2,2783	77
2072	16	131	2043	16	894	36	2087	17	791	37	0216	9789	869	2706	77
2088	17	132	2059	15	858	36	2104	16	754	37	0219	9786	868	2629	76
2105	16	133	2074	15	822	36	2120	17	717	36	0222	9783	867	2553	75
2121	16	134	2089	16	786	35	2137	16	681	36	0226	9779	866	2478	75
2137	16	135	2105	15	4,751	34	2153	16	4,645	35	1,0229	9776	865	2,2403	74
2153	16	136	2120	15	717	34	2169	17	610	35	0233	9773	864	2329	74
2169	16	137	2135	16	683	33	2186	16	575	34	0236	9769	863	2255	74
2185	16	138	2151	15	650	33	2202	17	541	34	0240	9766	862	2181	72
2201	16	139	2166	15	617	33	2219	16	507	33	0243	9763	861	2109	73
2217	16	140	2181	16	4,584	32	2235	17	4,474	33	1,0247	9759	860	2,2036	71
2233	16	141	2197	15	552	31	2252	16	441	32	0250	9756	859	1965	72
2249	16	142	2212	15	521	31	2268	17	409	32	0254	9752	858	1893	70
2265	16	143	2227	16	490	31	2285	16	377	32	0258	9749	857	1823	71
2281	17	144	2243	15	459	30	2301	17	345	31	0261	9745	856	1752	70
2298	16	145	2258	15	4,429	30	2318	16	4,314	30	1,0265	9742	855	2,1682	69
2314	16	146	2273	16	399	30	2334	17	284	30	0269	9738	854	1613	69
2330	16	147	2289	15	369	29	2351	17	254	30	0273	9735	853	1544	68
2346	16	148	2304	15	340	28	2368	16	224	30	0276	9731	852	1476	68
2362	16	149	2319	15	312	28	2384	17	194	29	0280	9727	851	1408	68
2378		150	2334		4,284		2401		4,165		1,0284	9724	850	2,1340	
0,		0,q	0,				0,					0,	0,q		
			cosin	d	séc	d	cotg	d	tang	d	coséc	sinus	arc		
			1/Ch u		Ch u		1/Sh u		Sh u		1/Tgh u	Tgh u	Amh u	u	d

ET HYPERBOLIQUES.

Logarithmes.

M u	d	Amh u	Tgh u		$\frac{1}{\text{Tgh } u}$	Sh u		$\frac{1}{\text{Sh } u}$	Ch u	$\frac{1}{\text{Ch } u}$			
		arc	sinus	d	coséc	tang	d	cotg	séc	cosin			
0,		0,q	$\bar{1}$,		0,	$\bar{1}$,		0,	0,	$\bar{1}$,	0,q		
06850	69	100	1943	43	8057	1997	44	8003	0054	9946	900	1,1040	43
06919	69	101	1986	43	8014	2041	44	7959	0055	9945	899	0997	43
06988	69	102	2029	42	7971	2085	43	7915	0056	9944	898	0954	43
07057	70	103	2071	41	7929	2128	42	7872	0057	9943	897	0911	42
07127	69	104	2112	41	7888	2170	43	7830	0058	9942	896	0869	42
07196	69	105	2153	41	7847	2213	42	7787	0059	9941	895	1,0827	41
07265	69	106	2194	41	7806	2255	41	7745	0060	9940	894	0786	41
07334	69	107	2235	40	7765	2296	41	7704	0062	9938	893	0745	41
07403	69	108	2275	39	7725	2337	41	7663	0063	9937	892	0704	40
07472	70	109	2314	39	7686	2378	41	7622	0064	9936	891	0664	40
07542	69	110	2353	39	7647	2419	40	7581	0065	9935	890	1,0624	39
07611	69	111	2392	39	7608	2459	40	7541	0066	9934	889	0585	39
07680	70	112	2431	38	7569	2499	39	7501	0068	9932	888	0546	39
07750	69	113	2469	38	7531	2538	39	7462	0069	9931	887	0507	39
07819	69	114	2507	38	7493	2577	39	7423	0070	9930	886	0468	38
07888	70	115	2545	37	7455	2616	38	7384	0071	9929	885	1,0430	38
07958	69	116	2582	37	7418	2654	38	7346	0072	9928	884	0392	37
08027	69	117	2619	36	7381	2692	38	7308	0074	9926	883	0355	37
08096	70	118	2655	36	7345	2730	38	7270	0075	9925	882	0318	37
08166	69	119	2691	36	7309	2768	37	7232	0076	9924	881	0281	37
08235	70	120	2727	36	7273	2805	37	7195	0078	9922	880	1,0244	36
08305	69	121	2763	35	7237	2842	36	7158	0079	9921	879	0208	36
08374	70	122	2798	35	7202	2878	37	7122	0080	9920	878	0172	35
08444	69	123	2833	35	7167	2915	36	7085	0082	9918	877	0137	36
08513	70	124	2868	34	7132	2951	36	7049	0083	9917	876	0101	35
08583	69	125	2902	35	7098	2987	35	7013	0084	9916	875	1,0066	35
08652	70	126	2937	33	7063	3022	35	6978	0086	9914	874	1,0031	34
08722	69	127	2970	34	7030	3057	35	6943	0087	9913	873	0,9997	35
08791	70	128	3004	33	6996	3092	35	6908	0088	9912	872	9962	34
08861	70	129	3037	33	6963	3127	35	6873	0090	9910	871	9928	33
08931	69	130	3070	33	6930	3162	34	6838	0091	9909	870	0,9895	34
09000	70	131	3103	33	6897	3196	34	6804	0093	9907	869	9861	33
09070	70	132	3136	32	6864	3230	34	6770	0094	9906	868	9828	33
09140	70	133	3168	32	6832	3264	33	6736	0095	9905	867	9795	33
09210	69	134	3200	32	6800	3297	33	6703	0097	9903	866	9762	33
09279	70	135	3232	32	6768	3330	33	6670	0098	9902	865	0,9729	32
09349	70	136	3264	31	6736	3363	33	6637	0100	9900	864	9697	32
09419	70	137	3295	31	6705	3396	33	6604	0101	9899	863	9665	32
09489	70	138	3326	31	6674	3429	32	6571	0103	9897	862	9633	31
09559	70	139	3357	30	6643	3461	32	6539	0104	9896	861	9602	32
09629	69	140	3387	31	6613	3493	32	6507	0106	9894	860	0,9570	31
09698	70	141	3418	30	6582	3525	32	6475	0107	9893	859	9539	31
09768	70	142	3448	30	6552	3557	31	6443	0109	9891	858	9508	31
09838	70	143	3478	30	6522	3588	32	6412	0110	9890	857	9477	30
09908	70	144	3508	29	6492	3620	31	6380	0112	9888	856	9447	30
09978	70	145	3537	30	6463	3651	31	6349	0114	9886	855	0,9417	31
10048	70	146	3567	29	6433	3682	31	6318	0115	9885	854	9386	29
10118	71	147	3596	29	6404	3713	30	6287	0117	9883	853	9357	30
10189	70	148	3625	28	6375	3743	30	6257	0118	9882	852	9327	30
10259	70	149	3653	29	6347	3773	31	6227	0120	9880	851	9297	29
10329		150	3682		6318	3804		6196	0122	9878	850	0,9268	
0,		0,q	$\bar{1}$,		0,	$\bar{1}$,		0,	0,	$\bar{1}$,	0,q		
			cosin	d	séc	cotg	d	tang	coséc	sinus	arc		
			$\frac{1}{\text{Ch } u}$		Ch u	$\frac{1}{\text{Sh } u}$		Sh u	$\frac{1}{\text{Tgh } u}$	Tgh u	Amh u	M u	d

XIV. (Suite.) — FONCTIONS CIRCULAIRES

Valeurs naturelles.

u	d	Amh u	Tgh u		$\frac{1}{\text{Tgh } u}$		Sh u		$\frac{1}{\text{Sh } u}$		Ch u	$\frac{1}{\text{Ch } u}$			
		arc	sinus	d	coséc	d	tang	d	cotg	d	séc	cosin			
0,		$0,^{q}$	0,		0,		0,					0,	$0,^{q}$		
2378	16	150	2334	16	4,284	28	2401	16	4,165	28	1,0284	9724	850	2,1340	67
2394	17	151	2350	15	256	28	2417	17	137	29	0288	9720	849	1273	66
2411	16	152	2365	15	228	27	2434	17	108	28	0292	9716	848	1207	66
2427	16	153	2380	16	201	27	2451	16	080	27	0296	9713	847	1141	66
2443	16	154	2396	15	174	26	2467	17	053	27	0300	9709	846	1075	66
2459	16	155	2411	15	4,148	26	2484	17	4,026	27	1,0304	9705	845	2,1009	65
2475	17	156	2426	15	122	26	2501	16	3,999	27	0308	9701	844	0944	64
2492	16	157	2441	15	096	25	2517	17	972	26	0312	9697	843	0880	64
2508	16	158	2456	16	071	25	2534	17	946	26	0316	9694	842	0816	64
2524	16	159	2472	15	046	25	2551	17	920	25	0320	9690	841	0752	63
2540	16	160	2487	15	4,021	24	2568	16	3,895	26	1,0324	9686	840	2,0689	63
2556	17	161	2502	15	3,997	25	2584	17	869	24	0329	9682	839	0626	63
2573	16	162	2517	16	972	23	2601	17	845	25	0333	9678	838	0563	62
2589	16	163	2533	15	949	24	2618	17	820	24	0337	9674	837	0501	62
2605	16	164	2548	15	925	23	2635	16	796	24	0341	9670	836	0439	61
2621	17	165	2563	15	3,902	23	2651	17	3,772	24	1,0346	9666	835	2,0378	61
2638	16	166	2578	15	879	23	2668	17	748	24	0350	9662	834	0316	60
2654	16	167	2593	15	856	22	2685	17	724	23	0354	9658	833	0256	61
2670	16	168	2608	16	834	22	2702	17	701	23	0359	9654	832	0195	60
2686	17	169	2624	15	812	22	2719	17	678	23	0363	9650	831	0135	59
2703	16	170	2639	15	3,790	22	2736	17	3,655	22	1,0367	9646	830	2,0076	60
2719	16	171	2654	15	768	21	2753	16	633	22	0372	9641	829	2,0016	59
2735	17	172	2669	15	747	21	2769	17	611	22	0376	9637	828	1,9957	59
2752	16	173	2684	15	726	21	2786	17	589	22	0381	9633	827	9898	58
2768	16	174	2699	15	705	21	2803	17	567	21	0386	9629	826	9840	58
2784	17	175	2714	16	3,684	20	2820	17	3,546	21	1,0390	9625	825	1,9782	58
2801	16	176	2730	15	664	21	2837	17	525	21	0395	9620	824	9724	57
2817	16	177	2745	15	643	19	2854	17	504	21	0399	9616	823	9667	57
2833	17	178	2760	15	624	20	2871	17	483	21	0404	9612	822	9610	57
2850	16	179	2775	15	604	20	2888	17	462	20	0409	9607	821	9553	56
2866	16	180	2790	15	3,584	19	2905	17	3,442	20	1,0413	9603	820	1,9497	56
2882	17	181	2805	15	565	19	2922	17	422	20	0418	9599	819	9441	56
2899	16	182	2820	15	546	19	2939	17	402	20	0423	9594	818	9385	56
2915	16	183	2835	15	527	18	2956	18	382	19	0428	9590	817	9329	55
2931	17	184	2850	15	509	19	2974	17	363	19	0433	9585	816	9274	55
2948	16	185	2865	15	3,490	18	2991	17	3,344	19	1,0438	9581	815	1,9219	55
2964	17	186	2880	15	472	18	3008	17	325	19	0443	9576	814	9164	54
2981	16	187	2895	15	454	18	3025	17	306	19	0447	9572	813	9110	54
2997	16	188	2910	15	436	18	3042	17	287	18	0452	9567	812	9056	54
3013	17	189	2925	15	418	17	3059	17	269	18	0457	9563	811	9002	54
3030	16	190	2940	15	3,401	17	3076	18	3,251	19	1,0463	9558	810	1,8948	53
3046	17	191	2955	15	384	17	3094	17	232	17	0468	9553	809	8895	53
3063	16	192	2970	15	367	17	3111	17	215	18	0473	9549	808	8842	53
3079	17	193	2985	15	350	17	3128	17	197	18	0478	9544	807	8789	52
3096	16	194	3000	15	333	17	3145	18	179	17	0483	9539	806	8737	52
3112	17	195	3015	15	3,316	16	3163	17	3,162	17	1,0488	9535	805	1,8685	52
3129	16	196	3030	15	300	16	3180	17	145	17	0493	9530	804	8633	52
3145	17	197	3045	15	284	16	3197	17	128	17	0499	9525	803	8581	52
3162	16	198	3060	15	268	16	3214	18	111	17	0504	9520	802	8529	51
3178	17	199	3075	15	252	16	3232	17	094	16	0509	9515	801	8478	51
3195		200	3090		3,236		3249		3,078		1,0515	9511	800	1,8427	
0,		$0,^{q}$	0,				0,					0,	$0,^{q}$		
			cosin	d	séc	d	cotg	d	tang	d	coséc	sinus	arc		
			$\frac{1}{\text{Ch } u}$		Ch u		$\frac{1}{\text{Sh } u}$		Sh u		$\frac{1}{\text{Tgh } u}$	Tgh u	Amh u	u	d

ET HYPERBOLIQUES.

Logarithmes.

M u	d	Amh u	Tgh u		$\frac{1}{\text{Tgh } u}$	Sh u		$\frac{1}{\text{Sh } u}$	Ch u	$\frac{1}{\text{Ch } u}$			
		arc	sinus	d	coséc	tang	d	cotg	séc	cosin			
0,		$0,^{q}$	$\bar{1},$		0,	$\bar{1},$		0,	0,	$\bar{1},$	$0,^{q}$	0,	
10329	70	150	3682	28	6318	3804	29	6196	0122	9878	850	9268	29
10399	70	151	3710	28	6290	3833	30	6167	0123	9877	849	9239	29
10469	70	152	3738	28	6262	3863	30	6137	0125	9875	848	9210	29
10539	71	153	3766	28	6234	3893	29	6107	0127	9873	847	9181	28
10610	70	154	3794	28	6206	3922	30	6078	0128	9872	846	9153	29
10680	70	155	3822	27	6178	3952	29	6048	0130	9870	845	9124	28
10750	71	156	3849	27	6151	3981	29	6019	0132	9868	844	9096	28
10821	70	157	3876	27	6124	4010	28	5990	0133	9867	843	9068	28
10891	70	158	3903	27	6097	4038	29	5962	0135	9865	842	9040	28
10961	71	159	3930	27	6070	4067	28	5933	0137	9863	841	9012	27
11032	70	160	3957	26	6043	4095	28	5905	0139	9861	840	8985	27
11102	71	161	3983	26	6017	4123	29	5877	0140	9860	839	8958	28
11173	70	162	4009	27	5991	4152	27	5848	0142	9858	838	8930	27
11243	71	163	4036	25	5964	4179	28	5821	0144	9856	837	8903	26
11314	70	164	4061	26	5939	4207	28	5793	0146	9854	836	8877	27
11384	71	165	4087	26	5913	4235	27	5765	0148	9852	835	8850	27
11455	70	166	4113	25	5887	4262	28	5738	0149	9851	834	8823	26
11525	71	167	4138	26	5862	4290	27	5710	0151	9849	833	8797	26
11596	71	168	4164	25	5836	4317	27	5683	0153	9847	832	8771	26
11667	71	169	4189	25	5811	4344	27	5656	0155	9845	831	8745	26
11738	70	170	4214	25	5786	4371	26	5629	0157	9843	830	8719	26
11808	71	171	4239	25	5761	4397	27	5603	0159	9841	829	8693	26
11879	71	172	4264	24	5736	4424	26	5576	0160	9840	828	8667	25
11950	71	173	4288	24	5712	4450	27	5550	0162	9838	827	8642	26
12021	71	174	4312	25	5688	4477	26	5523	0164	9836	826	8616	25
12092	70	175	4337	24	5663	4503	26	5497	0166	9834	825	8591	25
12162	71	176	4361	24	5639	4529	26	5471	0168	9832	824	8566	25
12233	71	177	4385	24	5615	4555	26	5445	0170	9830	823	8541	25
12304	71	178	4409	23	5591	4581	25	5419	0172	9828	822	8516	24
12375	71	179	4432	24	5568	4606	26	5394	0174	9826	821	8492	25
12446	71	180	4456	23	5544	4632	25	5368	0176	9824	820	8467	24
12517	71	181	4479	24	5521	4657	26	5343	0178	9822	819	8443	24
12588	72	182	4503	23	5497	4683	25	5317	0180	9820	818	8419	24
12660	71	183	4526	23	5474	4708	25	5292	0182	9818	817	8395	24
12731	71	184	4549	23	5451	4733	25	5267	0184	9816	816	8371	24
12802	71	185	4572	22	5428	4758	24	5242	0186	9814	815	8347	24
12873	71	186	4594	23	5406	4782	25	5218	0188	9812	814	8323	24
12944	72	187	4617	22	5383	4807	25	5193	0190	9810	813	8299	23
13016	71	188	4639	23	5361	4832	24	5168	0192	9808	812	8276	24
13087	71	189	4662	22	5338	4856	24	5144	0194	9806	811	8252	23
13158	72	190	4684	22	5316	4880	25	5120	0196	9804	810	8229	23
13230	71	191	4706	22	5294	4905	24	5095	0198	9802	809	8206	23
13301	72	192	4728	22	5272	4929	24	5071	0201	9799	808	8183	23
13373	71	193	4750	22	5250	4953	24	5047	0203	9797	807	8160	23
13444	72	194	4772	21	5228	4977	23	5023	0205	9795	806	8137	22
13516	71	195	4793	22	5207	5000	24	5000	0207	9793	805	8115	23
13587	72	196	4815	21	5185	5024	24	4976	0209	9791	804	8092	22
13659	72	197	4836	22	5164	5048	23	4952	0211	9789	803	8070	23
13731	71	198	4858	21	5142	5071	23	4929	0214	9786	802	8047	22
13802	72	199	4879	21	5121	5094	24	4906	0216	9784	801	8025	22
13874		200	4900		5100	5118		4882	0218	9782	800	8003	
0,		$0,^{q}$	$\bar{1},$		0,	$\bar{1},$		0,	0,	$\bar{1},$	$0,^{q}$	0,	
			cosin	d	séc	cotg	d	tang	coséc	sinus	arc		
			$\frac{1}{\text{Ch } u}$		Ch u	$\frac{1}{\text{Sh } u}$		Sh u	$\frac{1}{\text{Tgh } u}$	Tgh u	Amh u	M u	d

XIV. (Suite.) — FONCTIONS CIRCULAIRES

Valeurs naturelles.

u	d	Amh u	Tgh u		$\frac{1}{\mathrm{Tgh}\,u}$		Sh u		$\frac{1}{\mathrm{Sh}\,u}$		Ch u	$\frac{1}{\mathrm{Ch}\,u}$			
		arc	sinus	d	coséc	d	tang	d	cotg	d	séc	cosin			
0,		$0,^q$	0,				0,					0,	$0,^q$		
3195	16	200	3090	15	3,2361	156	3249	18	3,0777	164	1,0515	9511	800	1,8427	50
3211	17	201	3105	15	2205	154	3267	17	0613	162	0520	9506	799	8377	51
3228	16	202	3120	15	2051	153	3284	17	0451	161	0525	9501	798	8326	50
3244	17	203	3135	15	1898	151	3301	18	0290	159	0531	9496	797	8276	50
3261	16	204	3150	15	1747	149	3319	17	3,0131	157	0536	9491	796	8226	50
3277	17	205	3165	15	3,1598	148	3336	18	2,9974	156	1,0542	9486	795	1,8176	49
3294	16	206	3180	15	1450	147	3354	17	9818	155	0547	9481	794	8127	50
3310	17	207	3195	14	1303	145	3371	18	9663	153	0553	9476	793	8077	49
3327	17	208	3209	15	1158	144	3389	17	9510	152	0559	9471	792	8028	49
3344	16	209	3224	15	1014	142	3406	18	9358	150	0564	9466	791	7979	48
3360	17	210	3239	15	3,0872	141	3424	17	2,9208	149	1,0570	9461	790	1,7931	49
3377	16	211	3254	15	0731	139	3441	18	9059	148	0576	9456	789	7882	48
3393	17	212	3269	15	0592	139	3459	17	8911	146	0581	9451	788	7834	48
3410	17	213	3284	15	0453	137	3476	18	8765	145	0587	9445	787	7786	47
3427	16	214	3299	14	0316	135	3494	18	8620	144	0593	9440	786	7739	48
3443	17	215	3313	15	3,0181	135	3512	17	2,8476	143	1,0599	9435	785	1,7691	47
3460	17	216	3328	15	3,0046	133	3529	18	8333	141	0605	9430	784	7644	47
3477	16	217	3343	15	2,9913	132	3547	18	8192	140	0610	9425	783	7597	47
3493	17	218	3358	15	9781	130	3565	17	8052	138	0616	9419	782	7550	47
3510	17	219	3373	14	9651	130	3582	18	7914	138	0622	9414	781	7503	46
3527	16	220	3387	15	2,9521	128	3600	18	2,7776	136	1,0628	9409	780	1,7457	47
3543	17	221	3402	15	9393	127	3618	18	7640	135	0634	9403	779	7410	46
3560	17	222	3417	15	9266	126	3636	18	7505	134	0640	9398	778	7364	46
3577	17	223	3432	14	9140	124	3654	17	7371	133	0647	9393	777	7318	45
3594	16	224	3446	15	9016	124	3671	18	7238	132	0653	9387	776	7273	46
3610	17	225	3461	15	2,8892	123	3689	18	2,7106	130	1,0659	9382	775	1,7227	45
3627	17	226	3476	15	8769	121	3707	18	6976	130	0665	9376	774	7182	45
3644	17	227	3491	14	8648	120	3725	18	6846	128	0671	9371	773	7137	45
3661	16	228	3505	15	8528	119	3743	18	6718	128	0677	9365	772	7092	45
3677	17	229	3520	15	8409	118	3761	18	6590	126	0684	9360	771	7047	44
3694	17	230	3535	14	2,8291	118	3779	18	2,6464	125	1,0690	9354	770	1,7003	45
3711	17	231	3549	15	8173	116	3797	18	6339	124	0696	9349	769	6958	44
3728	17	232	3564	15	8057	115	3815	18	6215	123	0703	9343	768	6914	44
3745	16	233	3579	14	7942	114	3833	18	6092	122	0709	9338	767	6870	43
3761	17	234	3593	15	7828	113	3851	18	5970	122	0716	9332	766	6827	44
3778	17	235	3608	15	2,7715	112	3869	18	2,5848	120	1,0722	9326	765	1,6783	44
3795	17	236	3623	14	7603	111	3887	18	5728	119	0729	9321	764	6739	43
3812	17	237	3637	15	7492	110	3905	18	5609	118	0735	9315	763	6696	43
3829	17	238	3652	15	7382	109	3923	18	5491	118	0742	9309	762	6653	43
3846	17	239	3667	14	7273	108	3941	18	5373	116	0749	9304	761	6610	43
3863	16	240	3681	15	2,7165	108	3959	18	2,5257	115	1,0755	9298	760	1,6567	42
3879	17	241	3696	14	7057	106	3977	19	5142	115	0762	9292	759	6525	43
3896	17	242	3710	15	6951	106	3996	18	5027	114	0769	9286	758	6482	42
3913	17	243	3725	15	6845	104	4014	18	4913	112	0775	9280	757	6440	42
3930	17	244	3740	14	6741	104	4032	18	4801	112	0782	9274	756	6398	42
3947	17	245	3754	15	2,6637	103	4050	19	2,4689	111	1,0789	9269	755	1,6356	42
3964	17	246	3769	14	6534	102	4069	18	4578	110	0796	9263	754	6314	41
3981	17	247	3783	15	6432	101	4087	18	4468	110	0803	9257	753	6273	42
3998	17	248	3798	14	6331	100	4105	19	4358	108	0810	9251	752	6231	41
4015	17	249	3812	15	6231	100	4124	18	4250	108	0817	9245	751	6190	41
4032		250	3827		2,6131		4142		2,4142		1,0824	9239	750	1,6149	
0,		$0,^q$	0,				0,					0,	$0,^q$		
			cosin	d	séc	d	cotg	d	tang	d	coséc	sinus	arc		
			$\frac{1}{\mathrm{Ch}\,u}$		Ch u		$\frac{1}{\mathrm{Sh}\,u}$		Sh u		$\frac{1}{\mathrm{Tgh}\,u}$	Tgh u	Amh u	u	d

ET HYPERBOLIQUES.

Logarithmes.

M u	d	Amh u	Tgh u		1/Tgh u	Sh u		1/Sh u	Ch u	1/Ch u			
		arc	sinus	d	coséc	tang	d	cotg	séc	cosin			
0,		0^q,	$\bar{1}$,		0,	$\bar{1}$,		0,	0,	$\bar{1}$,	0^q,	0,	
13874	72	200	4900	21	5100	5118	23	4882	0218	9782	800	8003	22
13946	71	201	4921	21	5079	5141	23	4859	0220	9780	799	7981	22
14017	72	202	4942	20	5058	5164	23	4836	0222	9778	798	7959	22
14089	72	203	4962	21	5038	5187	23	4813	0225	9775	797	7937	22
14161	72	204	4983	20	5017	5210	23	4790	0227	9773	796	7915	21
14233	72	205	5003	21	4997	5233	22	4767	0229	9771	795	7894	22
14305	72	206	5024	20	4976	5255	23	4745	0231	9769	794	7872	21
14377	72	207	5044	20	4956	5278	22	4722	0234	9766	793	7851	21
14449	72	208	5064	20	4936	5300	23	4700	0236	9764	792	7830	22
14521	72	209	5084	20	4916	5323	22	4677	0238	9762	791	7808	21
14593	72	210	5104	20	4896	5345	22	4655	0241	9759	790	7787	21
14665	72	211	5124	20	4876	5367	22	4633	0243	9757	789	7766	21
14737	73	212	5144	20	4856	5389	22	4611	0245	9755	788	7745	20
14810	72	213	5164	19	4836	5411	22	4589	0248	9752	787	7725	21
14882	72	214	5183	20	4817	5433	22	4567	0250	9750	786	7704	21
14954	72	215	5203	19	4797	5455	22	4545	0253	9747	785	7683	20
15026	73	216	5222	19	4778	5477	22	4523	0255	9745	784	7663	21
15099	72	217	5241	20	4759	5499	21	4501	0257	9743	783	7642	20
15171	73	218	5261	19	4739	5520	22	4480	0260	9740	782	7622	20
15244	72	219	5280	19	4720	5542	21	4458	0262	9738	781	7602	21
15316	73	220	5299	19	4701	5563	22	4437	0265	9735	780	7581	20
15389	72	221	5318	18	4682	5585	21	4415	0267	9733	779	7561	20
15461	73	222	5336	19	4664	5606	21	4394	0270	9730	778	7541	20
15534	72	223	5355	19	4645	5627	21	4373	0272	9728	777	7521	20
15606	73	224	5374	18	4626	5648	21	4352	0275	9725	776	7501	19
15679	73	225	5392	19	4608	5669	21	4331	0277	9723	775	7482	20
15752	73	226	5411	18	4589	5690	21	4310	0280	9720	774	7462	20
15825	72	227	5429	18	4571	5711	21	4289	0282	9718	773	7442	19
15897	73	228	5447	18	4553	5732	21	4268	0285	9715	772	7423	19
15970	73	229	5465	19	4535	5753	20	4247	0287	9713	771	7404	20
16043	73	230	5484	18	4516	5773	21	4227	0290	9710	770	7384	19
16116	73	231	5502	18	4498	5794	21	4206	0292	9708	769	7365	19
16189	73	232	5520	17	4480	5815	20	4185	0295	9705	768	7346	19
16262	73	233	5537	18	4463	5835	20	4165	0298	9702	767	7327	19
16335	73	234	5555	18	4445	5855	21	4145	0300	9700	766	7308	19
16408	74	235	5573	17	4427	5876	20	4124	0303	9697	765	7289	19
16482	73	236	5590	18	4410	5896	20	4104	0306	9694	764	7270	19
16555	73	237	5608	17	4392	5916	20	4084	0308	9692	763	7251	19
16628	73	238	5625	18	4375	5936	20	4064	0311	9689	762	7232	18
16701	74	239	5643	17	4357	5956	20	4044	0314	9686	761	7214	19
16775	73	240	5660	17	4340	5976	20	4024	0316	9684	760	7195	18
16848	74	241	5677	17	4323	5996	20	4004	0319	9681	759	7177	19
16922	73	242	5694	17	4306	6016	20	3984	0322	9678	758	7158	18
16995	74	243	5711	17	4289	6036	19	3964	0324	9676	757	7140	18
17069	73	244	5728	17	4272	6055	20	3945	0327	9673	756	7122	19
17142	74	245	5745	17	4255	6075	20	3925	0330	9670	755	7103	18
17216	73	246	5762	17	4238	6095	19	3905	0333	9667	754	7085	18
17289	74	247	5779	16	4221	6114	20	3886	0335	9665	753	7067	18
17363	74	248	5795	17	4205	6134	19	3866	0338	9662	752	7049	18
17437	74	249	5812	16	4188	6153	19	3847	0341	9659	751	7031	18
17511		250	5828		4172	6172		3828	0344	9656	750	7013	
0,		0^q,	$\bar{1}$,		0,	$\bar{1}$,		0,	0,	$\bar{1}$,	0^q,	0,	
			cosin	d	séc	cotg	d	tang	coséc	sinus	arc		
			1/Ch u		Ch u	1/Sh u		Sh u	1/Tgh u	Tgh u	Amh u	M u	d

XIV. (Suite.) — FONCTIONS CIRCULAIRES

Valeurs naturelles.

u	d	Amh u	Tgh u		1/Tgh u		Sh u		1/Sh u		Ch u		1/Ch u				
		arc	sinus	d	coséc	d	tang	d	cotg	d	séc	d	cosin	d			
0,		0,q	0,				0,						0,		0,q		
4032	17	250	3827	14	2,6131	98	4142	19	2,4142	107	1,0824	7	9239	6	750	1,6149	41
4049	17	251	3841	15	6033	98	4161	18	4035	106	0831	7	9233	6	749	6108	41
4066	17	252	3856	14	5935	97	4179	18	3929	105	0838	7	9227	6	748	6067	41
4083	17	253	3870	15	5838	97	4197	19	3824	105	0845	7	9221	6	747	6026	40
4100	17	254	3885	14	5741	95	4216	18	3719	103	0852	8	9215	7	746	5986	40
4117	17	255	3899	15	2,5646	95	4234	19	2,3616	103	1,0860	7	9208	6	745	1,5946	41
4134	17	256	3914	14	5551	94	4253	19	3513	102	0867	7	9202	6	744	5905	40
4151	17	257	3928	15	5457	93	4272	18	3411	102	0874	7	9196	6	743	5865	40
4168	17	258	3943	14	5364	93	4290	19	3309	100	0881	8	9190	6	742	5825	39
4185	18	259	3957	14	5271	91	4309	18	3209	100	0889	7	9184	6	741	5786	40
4203	17	260	3971	15	2,5180	92	4327	19	2,3109	100	1,0896	8	9178	7	740	1,5746	39
4220	17	261	3986	14	5088	90	4346	19	3009	98	0904	7	9171	6	739	5707	40
4237	17	262	4000	15	4998	89	4365	18	2911	98	0911	8	9165	6	738	5667	39
4254	17	263	4015	14	4909	89	4383	19	2813	97	0919	7	9159	7	737	5628	39
4271	17	264	4029	14	4820	89	4402	19	2716	96	0926	8	9152	6	736	5589	39
4288	17	265	4043	15	2,4731	87	4421	19	2,2620	96	1,0934	7	9146	6	735	1,5550	39
4305	18	266	4058	14	4644	87	4440	19	2524	95	0941	8	9140	7	734	5511	38
4323	17	267	4072	14	4557	86	4459	18	2429	95	0949	8	9133	6	733	5473	39
4340	17	268	4086	15	4471	86	4477	19	2334	93	0957	7	9127	7	732	5434	38
4357	17	269	4101	14	4385	85	4496	19	2241	93	0964	8	9120	6	731	5396	39
4374	18	270	4115	14	2,4300	84	4515	19	2,2148	93	1,0972	8	9114	6	730	1,5357	38
4392	17	271	4129	15	4216	83	4534	19	2055	92	0980	8	9108	7	729	5319	38
4409	17	272	4144	14	4133	83	4553	19	1963	91	0988	8	9101	6	728	5281	37
4426	17	273	4158	14	4050	83	4572	19	1872	90	0996	8	9095	7	727	5244	38
4443	18	274	4172	15	3967	81	4591	19	1782	90	1004	7	9088	7	726	5206	38
4461	17	275	4187	14	2,3886	81	4610	19	2,1692	90	1,1011	8	9081	6	725	1,5168	37
4478	17	276	4201	14	3805	81	4629	19	1602	88	1019	9	9075	7	724	5131	38
4495	18	277	4215	14	3724	80	4648	19	1514	88	1028	8	9068	6	723	5093	37
4513	17	278	4229	15	3644	79	4667	19	1426	88	1036	8	9062	7	722	5056	37
4530	17	279	4244	14	3565	79	4686	20	1338	87	1044	8	9055	7	721	5019	37
4547	18	280	4258	14	2,3486	78	4706	19	2,1251	86	1,1052	8	9048	6	720	1,4982	37
4565	17	281	4272	14	3408	77	4725	19	1165	86	1060	8	9042	7	719	4945	36
4582	17	282	4286	14	3331	77	4744	19	1079	85	1068	9	9035	7	718	4909	37
4599	18	283	4300	15	3254	77	4763	20	0994	85	1077	8	9028	7	717	4872	36
4617	17	284	4315	14	3177	76	4783	19	0909	84	1085	8	9021	6	716	4836	37
4634	18	285	4329	14	2,3101	75	4802	19	2,0825	84	1,1093	9	9015	7	715	1,4799	36
4652	17	286	4343	14	3026	75	4821	20	0741	83	1102	8	9008	7	714	4763	36
4669	18	287	4357	14	2951	74	4841	19	0658	82	1110	8	9001	7	713	4727	36
4687	17	288	4371	14	2877	73	4860	19	0576	82	1118	9	8994	7	712	4691	36
4704	18	289	4385	14	2804	74	4879	20	0494	81	1127	9	8987	7	711	4655	36
4722	17	290	4399	14	2,2730	72	4899	19	2,0413	81	1,1136	8	8980	7	710	1,4619	35
4739	18	291	4413	15	2658	72	4918	20	0332	81	1144	9	8973	7	709	4584	36
4757	17	292	4428	14	2586	72	4938	20	0251	80	1153	8	8966	7	708	4548	35
4774	18	293	4442	14	2514	71	4958	19	0171	79	1161	9	8959	7	707	4513	36
4792	17	294	4456	14	2443	71	4977	20	0092	79	1170	9	8952	7	706	4477	35
4809	18	295	4470	14	2,2372	70	4997	19	2,0013	78	1,1179	9	8945	7	705	1,4442	35
4827	17	296	4484	14	2302	69	5016	20	1,9935	78	1188	9	8938	7	704	4407	35
4844	18	297	4498	14	2233	69	5036	20	9857	78	1197	8	8931	7	703	4372	35
4862	18	298	4512	14	2164	69	5056	19	9779	76	1205	9	8924	7	702	4337	34
4880	17	299	4526	14	2095	68	5075	20	9703	77	1214	9	8917	7	701	4303	35
4897		300	4540		2,2027		5095		1,9626		1,1223		8910		700	1,4268	
0,		0,q	0,				0,						0,		0,q		
			cosin	d	séc	d	cotg	d	tang	d	coséc	d	sinus	d	arc		
			1/Ch u		Ch u		1/Sh u		Sh u		1/Tgh u		Tgh u		Amh u	u	d

ET HYPERBOLIQUES.

Logarithmes.

M u	d	Amh u	Tgh u		1/Tgh u	Sh u		1/Sh u	Ch u	1/Ch u			
		arc	sinus	d	coséc	tang	d	cotg	séc	cosin			
0,		0,q	$\bar{1}$,		0,	$\bar{1}$,		0,	0,	$\bar{1}$,	0,q	0,	
17511	74	250	5828	17	4172	6172	20	3828	0344	9656	750	7013	17
17585	74	251	5845	16	4155	6192	19	3808	0347	9653	749	6996	18
17659	73	252	5861	16	4139	6211	19	3789	0350	9650	748	6978	18
17732	74	253	5877	17	4123	6230	19	3770	0352	9648	747	6960	17
17806	75	254	5894	16	4106	6249	19	3751	0355	9645	746	6943	18
17881	74	255	5910	16	4090	6268	19	3732	0358	9642	745	6925	17
17955	74	256	5926	16	4074	6287	19	3713	0361	9639	744	6908	18
18029	74	257	5942	16	4058	6306	19	3694	0364	9636	743	6890	17
18103	74	258	5958	16	4042	6325	19	3675	0367	9633	742	6873	17
18177	75	259	5974	16	4026	6344	18	3656	0370	9630	741	6856	18
18252	74	260	5990	15	4010	6362	19	3638	0373	9627	740	6838	17
18326	74	261	6005	16	3995	6381	19	3619	0376	9624	739	6821	17
18400	75	262	6021	16	3979	6400	18	3600	0379	9621	738	6804	17
18475	74	263	6037	15	3963	6418	19	3582	0382	9618	737	6787	17
18549	75	264	6052	16	3948	6437	18	3563	0385	9615	736	6770	17
18624	74	265	6068	15	3932	6455	19	3545	0388	9612	735	6753	17
18698	75	266	6083	15	3917	6474	18	3526	0391	9609	734	6736	16
18773	75	267	6098	16	3902	6492	18	3508	0394	9606	733	6720	17
18848	75	268	6114	15	3886	6510	19	3490	0397	9603	732	6703	17
18923	74	269	6129	15	3871	6529	18	3471	0400	9600	731	6686	16
18997	75	270	6144	15	3856	6547	18	3453	0403	9597	730	6670	17
19072	75	271	6159	15	3841	6565	18	3435	0406	9594	729	6653	16
19147	75	272	6174	15	3826	6583	18	3417	0409	9591	728	6637	17
19222	75	272	6189	15	3811	6601	18	3399	0412	9588	727	6620	16
19297	75	274	6204	15	3796	6619	18	3381	0415	9585	726	6604	17
19372	76	275	6219	14	3781	6637	18	3363	0418	9582	725	6587	16
19448	75	276	6233	15	3767	6655	18	3345	0422	9578	724	6571	16
19523	75	277	6248	15	3752	6673	18	3327	0425	9575	723	6555	16
19598	75	278	6263	14	3737	6691	17	3309	0428	9572	722	6539	16
19673	76	279	6277	15	3723	6708	18	3292	0431	9569	721	6523	16
19749	75	280	6292	14	3708	6726	18	3274	0434	9566	720	6507	16
19824	76	281	6306	15	3694	6744	18	3256	0438	9562	719	6491	16
19900	75	282	6321	14	3679	6762	17	3238	0441	9559	718	6475	16
19975	76	282	6335	14	3665	6779	18	3221	0444	9556	717	6459	16
20051	75	284	6349	15	3651	6797	17	3203	0447	9553	716	6443	16
20126	76	285	6364	14	3636	6814	18	3186	0451	9549	715	6427	15
20202	76	286	6378	14	3622	6832	17	3168	0454	9546	714	6412	16
20278	76	287	6392	14	3608	6849	17	3151	0457	9543	713	6396	16
20354	76	288	6406	14	3594	6866	18	3134	0460	9540	712	6380	15
20430	75	289	6420	14	3580	6884	17	3116	0464	9536	711	6365	16
20505	76	290	6434	14	3566	6901	17	3099	0467	9533	710	6349	15
20581	76	291	6448	14	3552	6918	17	3082	0470	9530	709	6334	16
20657	77	292	6462	13	3538	6935	18	3065	0474	9526	708	6318	15
20734	76	293	6475	14	3525	6953	17	3047	0477	9523	707	6303	16
20810	76	294	6489	14	3511	6970	17	3030	0481	9519	706	6287	15
20886	76	295	6503	13	3497	6987	17	3013	0484	9516	705	6272	15
20962	77	296	6516	14	3484	7004	17	2996	0487	9513	704	6257	15
21039	76	297	6530	14	3470	7021	17	2979	0491	9509	703	6242	15
21115	77	298	6544	13	3456	7038	17	2962	0494	9506	702	6227	15
21192	76	299	6557	13	3443	7055	17	2945	0498	9502	701	6212	16
21268		300	6570		3430	7072		2928	0501	9499	700	6196	
0,		0,q	$\bar{1}$,		0,	$\bar{1}$,		0,	0,	$\bar{1}$,	0,q	0,	
			cosin	d	séc	cotg	d	tang	coséc	sinus	arc		
			1/Ch u		Ch u	1/Sh u		Sh u	1/Tgh u	Tgh u	Amh u	M u	d

XIV. (Suite.) — FONCTIONS CIRCULAIRES

Valeurs naturelles.

u	d	Amh u	Tgh u		1/Tgh u		Sh u		1/Sh u		Ch u		1/Ch u				
		arc	sinus	d	coséc	d	tang	d	cotg	d	séc	d	cosin	d			
0,		0,q	0,				0,						0,		0,q		
4897	18	300	4540	14	2,2027	68	5095	20	1,9626	76	1,1223	9	8910	7	700	1,4268	35
4915	17	301	4554	14	1959	67	5115	20	9550	75	1232	9	8903	7	699	4233	34
4932	18	302	4568	14	1892	67	5135	20	9475	75	1241	9	8896	7	698	4199	34
4950	18	303	4582	14	1825	66	5155	20	9400	75	1250	10	8889	8	697	4165	35
4968	17	304	4596	14	1759	66	5175	20	9325	74	1260	9	8881	7	696	4130	34
4985	18	305	4610	14	2,1693	65	5195	20	1,9251	74	1,1269	9	8874	7	695	1,4096	34
5003	18	306	4624	14	1628	65	5215	20	9177	73	1278	9	8867	7	694	4062	34
5021	18	307	4638	14	1563	65	5235	20	9104	73	1287	9	8860	8	693	4028	34
5039	17	308	4652	13	1498	64	5255	20	9031	72	1296	10	8852	7	692	3994	33
5056	18	309	4665	14	1434	63	5275	20	8959	72	1306	9	8845	7	691	3961	34
5074	18	310	4679	14	2,1371	63	5295	20	1,8887	72	1,1315	10	8838	8	690	1,3927	33
5092	18	311	4693	14	1308	63	5315	20	8815	71	1325	9	8830	7	689	3894	34
5110	18	312	4707	14	1245	63	5335	20	8744	71	1334	10	8823	7	688	3860	33
5128	17	313	4721	14	1182	61	5355	20	8673	70	1344	9	8816	8	687	3827	33
5145	18	314	4735	14	1121	62	5375	21	8603	70	1353	10	8808	7	686	3794	34
5163	18	315	4749	13	2,1059	61	5396	20	1,8533	69	1,1363	9	8801	8	685	1,3760	33
5181	18	316	4762	14	0998	61	5416	20	8464	69	1372	10	8793	7	684	3727	32
5199	18	317	4776	14	0937	60	5436	21	8395	69	1382	10	8786	8	683	3695	33
5217	18	318	4790	14	0877	60	5457	20	8326	68	1392	10	8778	7	682	3662	33
5235	18	319	4804	14	0817	60	5477	21	8258	68	1402	10	8771	8	681	3629	33
5253	18	320	4818	13	2,0757	59	5498	20	1,8190	68	1,1412	9	8763	8	680	1,3596	32
5271	18	321	4831	14	0698	58	5518	21	8122	67	1421	10	8755	7	679	3564	33
5289	18	322	4845	14	0640	59	5539	20	8055	66	1431	10	8748	8	678	3531	32
5307	17	323	4859	14	0581	58	5559	21	7989	67	1441	10	8740	7	677	3499	32
5324	18	324	4873	13	0523	57	5580	20	7922	66	1451	10	8733	8	676	3467	33
5342	18	325	4886	14	2,0466	57	5600	21	1,7856	65	1,1461	10	8725	8	675	1,3434	32
5360	19	326	4900	14	0409	57	5621	21	7791	66	1471	11	8717	7	674	3402	32
5379	18	327	4914	13	0352	57	5642	20	7725	64	1482	10	8710	8	673	3370	32
5397	18	328	4927	14	0295	56	5662	21	7661	65	1492	10	8702	8	672	3338	31
5415	18	329	4941	14	0239	56	5683	21	7596	64	1502	10	8694	8	671	3307	32
5433	18	330	4955	13	2,0183	55	5704	21	1,7532	64	1,1512	11	8686	7	670	1,3275	32
5451	18	331	4968	14	0128	55	5725	21	7468	63	1523	10	8679	8	669	3243	31
5469	18	332	4982	13	0073	55	5746	21	7405	64	1533	11	8671	8	668	3212	32
5487	18	333	4995	14	2,0018	54	5767	20	7341	62	1544	10	8663	8	667	3180	31
5505	18	334	5009	14	1,9964	54	5787	21	7279	63	1554	11	8655	8	666	3149	32
5523	18	335	5023	13	1,9910	54	5808	21	1,7216	62	1,1565	10	8647	8	665	1,3117	31
5541	19	336	5036	14	9856	53	5829	22	7154	62	1575	11	8639	8	664	3086	31
5560	18	337	5050	13	9803	53	5851	21	7092	61	1586	10	8631	8	663	3055	31
5578	18	338	5063	14	9750	53	5872	21	7031	61	1596	11	8623	8	662	3024	31
5596	18	339	5077	13	9697	52	5893	21	6970	61	1607	11	8615	8	661	2993	31
5614	19	340	5090	14	1,9645	52	5914	21	1,6909	60	1,1618	11	8607	8	660	1,2962	31
5633	18	341	5104	13	9593	52	5935	21	6849	61	1629	11	8599	8	659	2931	31
5651	18	342	5117	14	9541	51	5956	22	6788	59	1640	10	8591	8	658	2900	30
5669	18	343	5131	13	9490	51	5978	21	6729	60	1650	11	8583	8	657	2870	31
5687	19	344	5144	14	9439	51	5999	21	6669	59	1661	11	8575	8	656	2839	30
5706	18	345	5158	13	1,9388	51	6020	22	1,6610	59	1,1672	12	8567	8	655	1,2809	31
5724	19	346	5171	14	9337	50	6042	21	6551	59	1684	11	8559	8	654	2778	30
5743	18	347	5185	13	9287	49	6063	22	6492	58	1695	11	8551	8	653	2748	30
5761	18	348	5198	14	9238	50	6085	21	6434	58	1706	11	8543	8	652	2718	30
5779	19	349	5212	13	9188	49	6106	22	6376	57	1717	11	8535	9	651	2688	31
5798	.	350	5225		1,9139		6128		1,6319		1,1728		8526		650	1,2657	
0,		0,q	0,				0,						0,		0,q		
			cosin	d	séc	d	cotg	d	tang	d	coséc	d	sinus	d	arc		
			1/Ch u		Ch u		1/Sh u		Sh u		1/Tgh u		Tgh u		Amh u	u	d

ET HYPERBOLIQUES.

Logarithmes.

M u	d	Amh u — arc	Tgh u — sinus	d	$\frac{1}{\text{Tgh } u}$ — coséc	Sh u — tang	d	$\frac{1}{\text{Sh } u}$ — cotg	Ch u — séc	$\frac{1}{\text{Ch } u}$ — cosin			
0,		$0,^q$	$\bar{1}$,		0,	$\bar{1}$,		0,	0,	$\bar{1}$,	$0,^q$	0,	
2127	7	300	6570	14	3430	7072	17	2928	0501	9499	700	6196	15
2134	8	301	6584	13	3416	7089	16	2911	0505	9495	699	6181	14
2142	8	302	6597	13	3403	7105	17	2895	0508	9492	698	6167	15
2150	7	303	6610	14	3390	7122	17	2878	0512	9488	697	6152	15
2157	8	304	6624	13	3376	7139	17	2861	0515	9485	696	6137	15
2165	8	305	6637	13	3363	7156	16	2844	0519	9481	695	6122	15
2173	8	306	6650	13	3350	7172	17	2828	0522	9478	694	6107	15
2181	7	307	6663	13	3337	7189	16	2811	0526	9474	693	6092	14
2188	8	308	6676	13	3324	7205	17	2795	0529	9471	692	6078	15
2196	8	309	6689	13	3311	7222	16	2778	0533	9467	691	6063	15
2204	7	310	6702	13	3298	7238	17	2762	0537	9463	690	6048	14
2211	8	311	6715	12	3285	7255	16	2745	0540	9460	689	6034	15
2219	8	312	6727	13	3273	7271	17	2729	0544	9456	688	6019	14
2227	8	313	6740	13	3260	7288	16	2712	0548	9452	687	6005	15
2235	7	314	6753	13	3247	7304	16	2696	0551	9449	686	5990	14
2242	8	315	6766	12	3234	7320	17	2680	0555	9445	685	5976	14
2250	8	316	6778	13	3222	7337	16	2663	0559	9441	684	5962	15
2258	8	317	6791	12	3209	7353	16	2647	0562	9438	683	5947	14
2266	7	318	6803	13	3197	7369	17	2631	0566	9434	682	5933	14
2273	8	319	6816	12	3184	7386	16	2614	0570	9430	681	5919	14
2281	8	320	6828	13	3172	7402	16	2598	0573	9427	680	5905	14
2289	8	321	6841	12	3159	7418	16	2582	0577	9423	679	5891	14
2297	8	322	6853	12	3147	7434	16	2566	0581	9419	678	5877	15
2305	7	323	6865	13	3135	7450	16	2550	0585	9415	677	5862	14
2312	8	324	6878	12	3122	7466	16	2534	0589	9411	676	5848	14
2320	8	325	6890	12	3110	7482	16	2518	0592	9408	675	5834	13
2328	8	326	6902	12	3098	7498	16	2502	0596	9404	674	5821	14
2336	8	327	6914	12	3086	7514	16	2486	0600	9400	673	5807	14
2344	8	328	6926	12	3074	7530	16	2470	0604	9396	672	5793	14
2352	7	329	6938	12	3062	7546	16	2454	0608	9392	671	5779	14
2359	8	330	6950	12	3050	7562	16	2438	0612	9388	670	5765	14
2367	8	331	6962	12	3038	7578	15	2422	0616	9384	669	5751	13
2375	8	332	6974	12	3026	7593	16	2407	0619	9381	668	5738	14
2383	8	333	6986	12	3014	7609	16	2391	0623	9377	667	5724	14
2391	8	334	6998	11	3002	7625	16	2375	0627	9373	666	5710	13
2399	8	335	7009	12	2991	7641	15	2359	0631	9369	665	5697	14
2407	8	336	7021	12	2979	7656	16	2344	0635	9365	664	5683	13
2415	7	337	7033	11	2967	7672	16	2328	0639	9361	663	5670	14
2422	8	338	7044	12	2956	7688	15	2312	0643	9357	662	5656	13
2430	8	339	7056	12	2944	7703	16	2297	0647	9353	661	5643	14
2438	8	340	7068	11	2932	7719	15	2281	0651	9349	660	5629	13
2446	8	341	7079	12	2921	7734	16	2266	0655	9345	659	5616	13
2454	8	342	7091	11	2909	7750	15	2250	0659	9341	658	5603	14
2462	8	343	7102	11	2898	7765	16	2235	0663	9337	657	5589	13
2470	8	344	7113	12	2887	7781	15	2219	0668	9332	656	5576	13
2478	8	345	7125	11	2875	7796	16	2204	0672	9328	655	5563	13
2486	8	346	7136	11	2864	7812	15	2188	0676	9324	654	5550	14
2494	8	347	7147	12	2853	7827	16	2173	0680	9320	653	5536	13
2502	8	348	7159	11	2841	7843	15	2157	0684	9316	652	5523	13
2510	8	349	7170	11	2830	7858	15	2142	0688	9312	651	5510	13
2518		350	7181		2819	7873		2127	0692	9308	650	5497	
0,		$0,^q$	$\bar{1}$,		0,	$\bar{1}$,		0,	0,	$\bar{1}$,	$0,^q$	0,	
			cosin	d	séc	cotg	d	tang	coséc	sinus	arc		
			$\frac{1}{\text{Ch } u}$		Ch u	$\frac{1}{\text{Sh } u}$		Sh u	$\frac{1}{\text{Tgh } u}$	Tgh u	Amh u	M u	d

XIV. (Suite.) — FONCTIONS CIRCULAIRES

Valeurs naturelles.

u	d	Amh u	Tgh u		1/Tgh u		Sh u		1/Sh u		Ch u		1/Ch u				
		arc	sinus	d	cosec	d	tang	d	cotg	d	séc	d	cosin	d			
o,		0,q	o,				o,						o,		0,q		
5798	18	350	5225	13	1,9139	49	6128	22	1,6319	58	1,1728	12	8526	8	650	1,2657	30
5816	19	351	5238	14	9090	49	6150	21	6261	57	1740	11	8518	8	649	2627	30
5835	18	352	5252	13	9041	48	6171	22	6204	57	1751	11	8510	8	648	2597	29
5853	19	353	5265	13	8993	48	6193	22	6147	56	1762	12	8502	9	647	2568	30
5872	18	354	5278	14	8945	48	6215	22	6091	57	1774	11	8493	8	646	2538	30
5890	19	355	5292	13	1,8897	47	6237	21	1,6034	55	1,1785	12	8485	8	645	1,2508	30
5909	18	356	5305	13	8850	47	6258	22	5979	56	1797	12	8477	9	644	2478	29
5927	19	357	5318	14	8803	47	6280	22	5923	56	1809	11	8468	8	643	2449	30
5946	18	358	5332	13	8756	47	6302	22	5867	55	1820	12	8460	8	642	2419	29
5964	19	359	5345	18	8709	46	6324	22	5812	55	1832	12	8452	9	641	2390	29
5983	18	360	5358	14	1,8663	46	6346	22	1,5757	54	1,1844	12	8443	8	640	1,2361	30
6001	19	361	5372	13	8617	46	6368	22	5703	54	1856	11	8435	9	639	2331	29
6020	19	362	5385	13	8571	46	6390	22	5649	54	1867	12	8426	8	638	2302	29
6039	18	363	5398	13	8525	45	6412	23	5595	54	1879	12	8418	9	637	2273	29
6057	19	364	5411	13	8480	45	6435	22	5541	54	1891	12	8409	8	636	2244	29
6076	19	365	5424	14	1,8435	45	6457	22	1,5487	53	1,1903	13	8401	9	635	1,2215	29
6095	19	366	5438	13	8390	44	6479	23	5434	53	1916	12	8392	8	634	2186	29
6114	18	367	5451	13	8346	44	6502	22	5381	53	1928	12	8384	9	633	2157	29
6132	19	368	5464	13	8302	44	6524	22	5328	52	1940	12	8375	8	632	2128	28
6151	19	369	5477	13	8258	44	6546	23	5276	52	1952	12	8367	9	631	2100	29
6170	19	370	5490	13	1,8214	43	6569	22	1,5224	52	1,1964	13	8358	9	630	1,2071	29
6189	18	371	5503	13	8171	43	6591	23	5172	52	1977	12	8349	8	629	2042	28
6207	19	372	5516	14	8128	43	6614	22	5120	52	1989	13	8341	9	628	2014	29
6226	19	373	5530	13	8085	43	6636	23	5068	51	2002	12	8332	9	627	1985	28
6245	19	374	5543	13	8042	42	6659	23	5017	51	2014	13	8323	8	626	1957	28
6264	19	375	5556	13	1,8000	43	6682	23	1,4966	51	1,2027	13	8315	9	625	1,1929	28
6283	19	376	5569	13	7957	42	6705	22	4915	50	2040	12	8306	9	624	1901	29
6302	19	377	5582	13	7915	41	6727	23	4865	51	2052	13	8297	9	623	1872	28
6321	19	378	5595	18	7874	42	6750	23	4814	50	2065	13	8288	8	622	1844	28
6340	19	379	5608	13	7832	41	6773	23	4764	49	2078	13	8280	9	621	1816	28
6359	19	380	5621	13	1,7791	41	6796	23	1,4715	50	1,2091	13	8271	9	620	1,1788	28
6378	19	381	5634	13	7750	41	6819	23	4665	49	2104	13	8262	9	619	1760	28
6397	19	382	5647	13	7709	40	6842	23	4616	50	2117	13	8253	9	618	1732	27
6416	19	383	5660	13	7669	41	6865	23	4566	49	2130	13	8244	9	617	1705	28
6435	19	384	5673	13	7628	40	6888	23	4517	48	2143	13	8235	9	616	1677	28
6454	19	385	5686	13	1,7588	40	6911	24	1,4469	49	1,2156	13	8226	9	615	1,1649	27
6473	19	386	5699	12	7548	39	6935	23	4420	48	2169	13	8217	8	614	1622	28
6492	19	387	5711	13	7509	40	6958	23	4372	48	2182	14	8209	9	613	1594	27
6511	19	388	5724	18	7469	39	6981	24	4324	48	2196	13	8200	9	612	1567	28
6530	20	389	5737	13	7430	39	7005	23	4276	47	2209	14	8191	10	611	1539	27
6550	19	390	5750	13	1,7391	39	7028	24	1,4229	48	1,2223	13	8181	9	610	1,1512	27
6569	19	391	5763	13	7352	38	7052	23	4181	47	2236	14	8172	9	609	1485	28
6588	19	392	5776	13	7314	38	7075	24	4134	47	2250	13	8163	9	608	1457	27
6607	20	393	5789	12	7276	39	7099	23	4087	47	2263	14	8154	9	607	1430	27
6627	19	394	5801	13	7237	38	7122	24	4040	46	2277	14	8145	9	606	1403	27
6646	19	395	5814	13	1,7199	37	7146	24	1,3994	47	1,2291	14	8136	9	605	1,1376	27
6665	20	396	5827	13	7162	38	7170	24	3947	46	2305	14	8127	9	604	1349	27
6685	19	397	5840	12	7124	37	7194	24	3901	46	2319	14	8118	9	603	1322	27
6704	19	398	5852	13	7087	37	7218	23	3855	46	2333	14	8109	10	602	1295	26
6723	20	399	5865	13	7050	37	7241	24	3809	45	2347	14	8099	9	601	1269	27
6743		400	5878		1,7013		7265		1,3764		1,2361		8090		600	1,1242	
o,		0,q	o,				o,						o,		0,q		
			cosin	d	séc	d	cotg	d	tang	d	cosec	d	sinus	d	arc		
			1/Ch u		Ch u		1/Sh u		Sh u		1/Tgh u		Tgh u		Amh u	u	d

ET HYPERBOLIQUES.

Logarithmes.

M *u*	d	Amh *u* / arc	Tgh *u* / sinus	d	$\frac{1}{\text{Tgh } u}$ / coséc	Sh *u* / tang	d	$\frac{1}{\text{Sh } u}$ / cotg	Ch *u* / séc	$\frac{1}{\text{Ch } u}$ / cosin			
0,		$0,^{q}$	$\bar{1}$,		0,	$\bar{1}$,		0,	0,	$\bar{1}$,	$0,^{q}$	0,	
2518	8	350	7181	11	2819	7873	15	2127	0692	9308	650	5497	13
2526	8	351	7192	11	2808	7888	16	2112	0697	9303	649	5484	13
2534	8	352	7203	11	2797	7904	15	2096	0701	9299	648	5471	13
2542	8	353	7214	11	2786	7919	15	2081	0705	9295	647	5458	13
2550	8	354	7225	11	2775	7934	15	2066	0709	9291	646	5445	13
2558	8	355	7236	11	2764	7949	16	2051	0713	9287	645	5432	13
2566	8	356	7247	11	2753	7965	15	2035	0718	9282	644	5419	13
2574	8	357	7258	11	2742	7980	15	2020	0722	9278	643	5406	12
2582	8	358	7269	10	2731	7995	15	2005	0726	9274	642	5394	13
2590	8	359	7279	11	2721	8010	15	1990	0731	9269	641	5381	13
2598	8	360	7290	11	2710	8025	15	1975	0735	9265	640	5368	13
2606	8	361	7301	11	2699	8040	15	1960	0739	9261	639	5355	12
2614	9	362	7312	10	2688	8055	15	1945	0744	9256	638	5343	13
2623	8	363	7322	11	2678	8070	15	1930	0748	9252	637	5330	13
2631	8	364	7333	11	2667	8085	15	1915	0752	9248	636	5317	12
2639	8	365	7344	10	2656	8100	15	1900	0757	9243	635	5305	13
2647	8	366	7354	11	2646	8115	15	1885	0761	9239	634	5292	12
2655	8	367	7365	10	2635	8130	15	1870	0766	9234	633	5280	13
2663	8	368	7375	11	2625	8145	15	1855	0770	9230	632	5267	12
2671	9	369	7386	10	2614	8160	15	1840	0774	9226	631	5255	13
2680	8	370	7396	10	2604	8175	15	1825	0779	9221	630	5242	12
2688	8	371	7406	11	2594	8190	15	1810	0783	9217	629	5230	12
2696	8	372	7417	10	2583	8205	14	1795	0788	9212	628	5218	13
2704	8	373	7427	10	2573	8219	15	1781	0792	9208	627	5205	12
2712	8	374	7437	10	2563	8234	15	1766	0797	9203	626	5193	12
2720	9	375	7447	11	2553	8249	15	1751	0802	9198	625	5181	13
2729	8	376	7458	10	2542	8264	14	1736	0806	9194	624	5168	12
2737	8	377	7468	10	2532	8278	15	1722	0811	9189	623	5156	12
2745	8	378	7478	10	2522	8293	15	1707	0815	9185	622	5144	12
2753	9	379	7488	10	2512	8308	15	1692	0820	9180	621	5132	12
2762	8	380	7498	10	2502	8323	14	1677	0825	9175	620	5120	13
2770	8	381	7508	10	2492	8337	15	1663	0829	9171	619	5107	12
2778	8	382	7518	10	2482	8352	14	1648	0834	9166	618	5095	12
2786	9	383	7528	10	2472	8366	15	1634	0839	9161	617	5083	12
2795	8	384	7538	10	2462	8381	15	1619	0843	9157	616	5071	12
2803	8	385	7548	10	2452	8396	14	1604	0848	9152	615	5059	12
2811	9	386	7558	9	2442	8410	15	1590	0853	9147	614	5047	12
2820	8	387	7567	10	2433	8425	14	1575	0857	9143	613	5035	12
2828	8	388	7577	10	2423	8439	15	1561	0862	9138	612	5023	12
2836	8	389	7587	10	2413	8454	14	1546	0867	9133	611	5011	11
2844	9	390	7597	9	2403	8468	15	1532	0872	9128	610	5000	12
2853	8	391	7606	10	2394	8483	14	1517	0876	9124	609	4988	12
2861	9	392	7616	10	2384	8497	15	1503	0881	9119	608	4976	12
2870	8	393	7626	9	2374	8512	14	1488	0886	9114	607	4964	12
2878	8	394	7635	10	2365	8526	15	1474	0891	9109	606	4952	11
2886	9	395	7645	9	2355	8541	14	1459	0896	9104	605	4941	12
2895	8	396	7654	10	2346	8555	15	1445	0901	9099	604	4929	12
2903	8	397	7664	9	2336	8570	14	1430	0906	9094	603	4917	11
2911	9	398	7673	10	2327	8584	14	1416	0911	9089	602	4906	12
2920	8	399	7683	9	2317	8598	15	1402	0915	9085	601	4894	12
2928		400	7692		2308	8613		1387	0920	9080	600	4882	
0,		$0,^{q}$	$\bar{1}$,		0,	$\bar{1}$,		0,	0,	$\bar{1}$,	$0,^{q}$	0,	
			cosin	d	séc	cotg	d	tang	coséc	sinus	arc		
			$\frac{1}{\text{Ch } u}$		Ch *u*	$\frac{1}{\text{Sh } u}$		Sh *u*	$\frac{1}{\text{Tgh } u}$	Tgh *u*	Amh *u*	M *u*	d

XIV. (Suite.) — FONCTIONS CIRCULAIRES

Valeurs naturelles.

u	d	Amh *u*	Tgh *u*		$\frac{1}{\text{Tgh } u}$		Sh *u*		$\frac{1}{\text{Sh } u}$		Ch *u*		$\frac{1}{\text{Ch } u}$				
		arc	**sinus**	**d**	**coséc**	**d**	**tang**	**d**	**cotg**	**d**	**séc**	**d**	**cosin**	**d**			
0,		$0,^{q}$	0,				0,						0,		$0,^{q}$		
6743	19	**400**	5878	13	1,7013	37	7265	24	1,3764	46	1,2361	14	8090	9	**600**	1,1242	27
6762	20	**401**	5891	12	6976	36	7289	25	3718	45	2375	14	8081	9	**599**	1215	27
6782	19	**402**	5903	13	6940	36	7314	24	3673	45	2389	14	8072	10	**598**	1188	26
6801	20	**403**	5916	13	6904	37	7338	24	3628	44	2403	15	8062	9	**597**	1162	27
6821	19	**404**	5929	12	6867	35	7362	24	3584	45	2418	14	8053	9	**596**	1135	26
6840	20	**405**	5941	13	1,6832	36	7386	24	1,3539	44	1,2432	14	8044	10	**595**	1,1109	27
6860	19	**406**	5954	12	6796	36	7410	25	3495	45	2446	15	8034	9	**594**	1082	26
6879	20	**407**	5966	13	6760	35	7435	24	3450	44	2461	15	8025	9	**593**	1056	26
6899	19	**408**	5979	13	6725	35	7459	25	3406	44	2476	14	8016	10	**592**	1030	26
6918	20	**409**	5992	12	6690	35	7484	24	3362	43	2490	15	8006	9	**591**	1004	27
6938	20	**410**	6004	13	1,6655	35	7508	25	1,3319	44	1,2505	15	7997	10	**590**	1,0977	26
6958	19	**411**	6017	12	6620	34	7533	24	3275	43	2520	15	7987	9	**589**	0951	26
6977	20	**412**	6029	13	6586	35	7557	25	3232	43	2535	14	7978	10	**588**	0925	26
6997	20	**413**	6042	12	6551	34	7582	25	3189	43	2549	15	7968	9	**587**	0899	26
7017	20	**414**	6054	13	6517	34	7607	25	3146	43	2564	15	7959	10	**586**	0873	26
7037	19	**415**	6067	12	1,6483	34	7632	25	1,3103	42	1,2579	16	7949	9	**585**	1,0847	26
7056	20	**416**	6079	13	6449	33	7657	25	3061	43	2595	15	7940	10	**584**	0821	25
7076	20	**417**	6092	12	6416	34	7682	25	3018	42	2610	15	7930	9	**583**	0796	26
7096	20	**418**	6104	13	6382	33	7707	25	2976	42	2625	15	7921	10	**582**	0770	26
7116	20	**419**	6117	12	6349	33	7732	25	2934	42	2640	16	7911	9	**581**	0744	26
7136	20	**420**	6129	12	1,6316	33	7757	25	1,2892	42	1,2656	15	7902	10	**580**	1,0718	25
7156	19	**421**	6141	13	6283	33	7782	25	2850	41	2671	16	7892	10	**579**	0693	26
7175	20	**422**	6154	12	6250	33	7807	26	2809	42	2687	15	7882	9	**578**	0667	25
7195	20	**423**	6166	13	6217	32	7833	25	2767	41	2702	16	7873	10	**577**	0642	26
7215	20	**424**	6179	12	6185	32	7858	25	2726	41	2718	16	7863	10	**576**	0616	25
7235	20	**425**	6191	12	1,6153	32	7883	26	1,2685	41	1,2734	16	7853	10	**575**	1,0591	25
7255	20	**426**	6203	13	6121	32	7909	25	2644	41	2750	15	7843	9	**574**	0566	26
7275	20	**427**	6216	12	6089	32	7934	26	2603	40	2765	16	7834	10	**573**	0540	25
7295	21	**428**	6228	12	6057	32	7960	26	2563	41	2781	16	7824	10	**572**	0515	25
7316	20	**429**	6240	12	6025	31	7986	26	2522	40	2797	16	7814	10	**571**	0490	25
7336	20	**430**	6252	13	1,5994	31	8012	25	1,2482	40	1,2813	17	7804	10	**570**	1,0465	25
7356	20	**431**	6265	12	5963	32	8037	26	2442	40	2830	16	7794	9	**569**	0440	25
7376	20	**432**	6277	12	5931	31	8063	26	2402	40	2846	16	7785	10	**568**	0415	25
7396	20	**433**	6289	12	5900	30	8089	26	2362	39	2862	17	7775	10	**567**	0390	25
7416	21	**434**	6301	13	5870	31	8115	26	2323	40	2879	16	7765	10	**566**	0365	25
7437	20	**435**	6314	12	1,5839	30	8141	26	1,2283	39	1,2895	17	7755	10	**565**	1,0340	25
7457	20	**436**	6326	12	5809	31	8167	27	2244	39	2912	16	7745	10	**564**	0315	25
7477	21	**437**	6338	12	5778	30	8194	26	2205	39	2928	17	7735	10	**563**	0290	25
7498	20	**438**	6350	12	5748	30	8220	26	2166	39	2945	17	7725	10	**562**	0265	24
7518	20	**439**	6362	12	5718	30	8246	27	2127	39	2962	16	7715	10	**561**	0241	25
7538	21	**440**	6374	12	1,5688	30	8273	26	1,2088	39	1,2978	17	7705	10	**560**	1,0216	25
7559	20	**441**	6386	12	5658	29	8299	27	2049	38	2995	17	7695	10	**559**	0191	24
7579	21	**442**	6398	12	5629	30	8326	26	2011	38	3012	17	7685	10	**558**	0167	25
7600	20	**443**	6410	13	5599	29	8352	27	1973	39	3029	17	7675	10	**557**	0142	24
7620	20	**444**	6423	12	5570	29	8379	27	1934	38	3046	18	7665	10	**556**	0118	25
7640	21	**445**	6435	12	1,5541	29	8406	27	1,1896	37	1,3064	17	7655	10	**555**	1,0093	24
7661	21	**446**	6447	12	5512	29	8433	27	1859	38	3081	17	7645	10	**554**	0069	24
7682	20	**447**	6459	12	5483	28	8460	27	1821	38	3098	18	7635	11	**553**	0045	25
7702	21	**448**	6471	12	5455	29	8487	27	1783	37	3116	17	7624	10	**552**	0020	24
7723	20	**449**	6483	11	5426	28	8514	27	1746	38	3133	18	7614	10	**551**	0,9996	24
7743		**450**	6494		1,5398		8541		1,1708		1,3151		7604		**550**	0,9972	
0,		$0,^{q}$	0,				0,						0,		$0,^{q}$		
			cosin	**d**	**séc**	**d**	**cotg**	**d**	**tang**	**d**	**coséc**	**d**	**sinus**	**d**	**arc**		
			$\frac{1}{\text{Ch } u}$		Ch *u*		$\frac{1}{\text{Sh } u}$		Sh *u*		$\frac{1}{\text{Tgh } u}$		Tgh *u*		Amh *u*	*u*	d

ET HYPERBOLIQUES.

Logarithmes.

M u	d	Amh u arc	Tgh u sinus	d	$\frac{1}{\text{Tgh } u}$ coséc	Sh u tang	d	$\frac{1}{\text{Sh } u}$ cotg	Ch u séc	d	$\frac{1}{\text{Ch } u}$ cosin			
0,		$0,^q$	$\bar{1},$		0,	$\bar{1},$		0,	0,		$\bar{1},$	$0,^q$	0,	
2928	9	400	7692	10	2308	8613	14	1387	0920	5	9080	600	4882	11
2937	8	401	7702	9	2298	8627	14	1373	0925	5	9075	599	4871	12
2945	9	402	7711	9	2289	8641	15	1359	0930	5	9070	598	4859	11
2954	8	403	7720	9	2280	8656	14	1344	0935	5	9065	597	4848	12
2962	9	404	7729	10	2271	8670	14	1330	0940	5	9060	596	4836	11
2971	8	405	7739	9	2261	8684	14	1316	0945	5	9055	595	4825	12
2979	9	406	7748	9	2252	8698	15	1302	0950	6	9050	594	4813	11
2988	8	407	7757	9	2243	8713	14	1287	0956	5	9044	593	4802	12
2996	9	408	7766	9	2234	8727	14	1273	0961	5	9039	592	4790	11
3005	8	409	7775	10	2225	8741	14	1259	0966	5	9034	591	4779	12
3013	9	410	7785	9	2215	8755	15	1245	0971	5	9029	590	4767	11
3022	8	411	7794	9	2206	8770	14	1230	0976	5	9024	589	4756	11
3030	9	412	7803	9	2197	8784	14	1216	0981	5	9019	588	4745	12
3039	8	413	7812	9	2188	8798	14	1202	0986	5	9014	587	4733	11
3047	9	414	7821	9	2179	8812	14	1188	0991	6	9009	586	4722	11
3056	9	415	7830	9	2170	8826	14	1174	0997	5	9003	585	4711	11
3065	8	416	7839	8	2161	8840	15	1160	1002	5	8998	584	4700	12
3073	9	417	7847	9	2153	8855	14	1145	1007	5	8993	583	4688	11
3082	8	418	7856	9	2144	8869	14	1131	1012	6	8988	582	4677	11
3090	9	419	7865	9	2135	8883	14	1117	1018	5	8982	581	4666	11
3099	9	420	7874	9	2126	8897	14	1103	1023	5	8977	580	4655	11
3108	8	421	7883	8	2117	8911	14	1089	1028	5	8972	579	4644	11
3116	9	422	7891	9	2109	8925	14	1075	1033	6	8967	578	4633	11
3125	9	423	7900	9	2100	8939	14	1061	1039	5	8961	577	4622	11
3134	8	424	7909	9	2091	8953	14	1047	1044	6	8956	576	4611	11
3142	9	425	7918	8	2082	8967	14	1033	1050	5	8950	575	4600	11
3151	9	426	7926	9	2074	8981	14	1019	1055	5	8945	574	4589	11
3160	8	427	7935	8	2065	8995	14	1005	1060	6	8940	573	4578	11
3168	9	428	7943	9	2057	9009	14	0991	1066	5	8934	572	4567	11
3177	9	429	7952	8	2048	9023	14	0977	1071	6	8929	571	4556	11
3186	9	430	7960	9	2040	9037	14	0963	1077	5	8923	570	4545	11
3195	8	431	7969	8	2031	9051	14	0949	1082	6	8918	569	4534	11
3203	9	432	7977	9	2023	9065	14	0935	1088	5	8912	568	4523	11
3212	9	433	7986	8	2014	9079	14	0921	1093	6	8907	567	4512	11
3221	9	434	7994	9	2006	9093	14	0907	1099	5	8901	566	4501	11
3230	8	435	8003	8	1997	9107	14	0893	1104	6	8896	565	4490	10
3238	9	436	8011	8	1989	9121	14	0879	1110	5	8890	564	4480	11
3247	9	437	8019	9	1981	9135	14	0865	1115	6	8885	563	4469	11
3256	9	438	8028	8	1972	9149	14	0851	1121	6	8879	562	4458	11
3265	9	439	8036	8	1964	9163	13	0837	1127	5	8873	561	4447	10
3274	9	440	8044	9	1956	9176	14	0824	1132	6	8868	560	4437	11
3283	9	441	8053	8	1947	9190	14	0810	1138	6	8862	559	4426	11
3292	8	442	8061	8	1939	9204	14	0796	1144	5	8856	558	4415	10
3300	9	443	8069	8	1931	9218	14	0782	1149	6	8851	557	4405	11
3309	9	444	8077	8	1923	9232	14	0768	1155	6	8845	556	4394	11
3318	9	445	8085	8	1915	9246	14	0754	1161	5	8839	555	4383	10
3327	9	446	8093	8	1907	9260	14	0740	1166	6	8834	554	4373	11
3336	9	447	8101	8	1899	9274	13	0726	1172	6	8828	553	4362	10
3345	9	448	8109	8	1891	9287	14	0713	1178	6	8822	552	4352	11
3354	9	449	8117	8	1883	9301	14	0699	1184	6	8816	551	4341	10
3363		450	8125		1875	9315		0685	1190		8810	550	4331	
0,		$0,^q$	$\bar{1},$		0,	$\bar{1},$		0,	0,		$\bar{1},$	$0,^q$	0,	
			cosin $\frac{1}{\text{Ch } u}$	d	séc Ch u	cotg $\frac{1}{\text{Sh } u}$	d	tang Sh u	coséc $\frac{1}{\text{Tgh } u}$	d	sinus Tgh u	arc Amh u	M u	d

XIV. (Suite.) — FONCTIONS CIRCULAIRES

Valeurs naturelles.

u	d	Amh u / arc	Tgh u / sinus	d	1/Tgh u / coséc	d	Sh u / tang	d	1/Sh u / cotg	d	Ch u / séc	d	1/Ch u / cosin	d			d
0,		0,[q]	0,				0,						0,		0,[q]	0,	
7743	21	**450**	6494	12	1,5398	29	8541	27	1,1708	37	1,3151	18	7604	10	**550**	9972	24
7764	21	**451**	6506	12	5369	28	8568	27	1671	37	3169	17	7594	10	**549**	9948	25
7785	21	**452**	6518	12	5341	28	8595	28	1634	37	3186	18	7584	11	**548**	9923	24
7806	20	**453**	6530	12	5313	27	8623	27	1597	36	3204	18	7573	10	**547**	9899	24
7826	21	**454**	6542	12	5286	28	8650	28	1561	37	3222	18	7563	10	**546**	9875	24
7847	21	**455**	6554	12	1,5258	28	8678	27	1,1524	37	1,3240	18	7553	10	**545**	9851	24
7868	21	**456**	6566	12	5230	27	8705	28	1487	36	3258	18	7543	11	**544**	9827	23
7889	21	**457**	6578	12	5203	27	8733	28	1451	36	3276	19	7532	10	**543**	9804	24
7910	20	**458**	6590	11	5176	28	8761	27	1415	36	3295	18	7522	11	**542**	9780	24
7930	21	**459**	6601	12	5148	27	8788	28	1379	36	3313	18	7511	10	**541**	9756	24
7951	21	**460**	6613	12	1,5121	26	8816	28	1,1343	36	1,3331	19	7501	10	**540**	9732	24
7972	21	**461**	6625	12	5095	27	8844	28	1307	36	3350	18	7491	11	**539**	9708	23
7993	21	**462**	6637	11	5068	27	8872	28	1271	35	3368	19	7480	10	**538**	9685	24
8014	21	**463**	6648	12	5041	26	8900	28	1236	36	3387	19	7470	11	**537**	9661	24
8035	21	**464**	6660	12	5015	27	8928	29	1200	35	3406	19	7459	10	**536**	9637	23
8056	22	**465**	6672	12	1,4988	26	8957	28	1,1165	35	1,3425	19	7449	11	**535**	9614	24
8078	21	**466**	6684	11	4962	26	8985	29	1130	36	3444	19	7438	10	**534**	9590	23
8099	21	**467**	6695	12	4936	26	9014	28	1094	35	3463	19	7428	11	**533**	9567	24
8120	21	**468**	6707	11	4910	26	9042	29	1059	34	3482	19	7417	10	**532**	9543	23
8141	21	**469**	6718	12	4884	25	9071	28	1025	35	3501	19	7407	11	**531**	9520	23
8162	22	**470**	6730	12	1,4859	26	9099	29	1,0990	35	1,3520	20	7396	10	**530**	9497	24
8184	21	**471**	6742	11	4833	25	9128	29	0955	34	3540	19	7386	11	**529**	9473	23
8205	21	**472**	6753	12	4808	26	9157	29	0921	35	3559	20	7375	10	**528**	9450	23
8226	21	**473**	6765	11	4782	25	9186	29	0886	34	3579	19	7365	11	**527**	9427	23
8247	22	**474**	6776	12	4757	25	9215	29	0852	34	3598	20	7354	11	**526**	9404	24
8269	21	**475**	6788	12	1,4732	25	9244	29	1,0818	34	1,3618	20	7343	10	**525**	9380	23
8290	22	**476**	6800	11	4707	25	9273	29	0784	34	3638	20	7333	11	**524**	9357	23
8312	21	**477**	6811	12	4682	25	9302	30	0750	34	3658	20	7322	11	**523**	9334	23
8333	22	**478**	6823	11	4657	24	9332	29	0716	34	3678	20	7311	11	**522**	9311	23
8355	21	**479**	6834	11	4633	25	9361	30	0682	33	3698	20	7300	10	**521**	9288	23
8376	22	**480**	6845	12	1,4608	24	9391	29	1,0649	34	1,3718	20	7290	11	**520**	9265	23
8398	21	**481**	6857	11	4584	24	9420	30	0615	33	3738	21	7279	11	**519**	9242	23
8419	22	**482**	6868	12	4560	25	9450	30	0582	33	3759	20	7268	11	**518**	9219	22
8441	22	**483**	6880	11	4535	24	9480	30	0549	33	3779	21	7257	10	**517**	9197	23
8463	21	**484**	6891	12	4511	24	9510	30	0516	33	3800	20	7247	11	**516**	9174	23
8484	22	**485**	6903	11	1,4487	23	9540	30	1,0483	33	1,3820	21	7236	11	**515**	9151	23
8506	22	**486**	6914	11	4464	24	9570	30	0450	33	3841	21	7225	11	**514**	9128	22
8528	22	**487**	6925	12	4440	24	9600	30	0417	33	3862	21	7214	11	**513**	9106	23
8550	21	**488**	6937	11	4416	23	9630	30	0384	32	3883	21	7203	11	**512**	9083	23
8571	22	**489**	6948	11	4393	23	9660	31	0352	33	3904	21	7192	11	**511**	9060	22
8593	22	**490**	6959	11	1,4370	24	9691	30	1,0319	32	1,3925	21	7181	11	**510**	9038	23
8615	22	**491**	6970	12	4346	23	9721	31	0287	32	3946	22	7170	11	**509**	9015	22
8637	22	**492**	6982	11	4323	23	9752	30	0255	33	3968	21	7159	11	**508**	8993	23
8659	22	**493**	6993	11	4300	23	9782	31	0222	32	3989	22	7148	11	**507**	8970	22
8681	22	**494**	7004	11	4277	22	9813	31	0190	32	4011	21	7137	11	**506**	8948	23
8703	22	**495**	7015	11	1,4255	23	9844	31	1,0158	32	1,4032	22	7126	11	**505**	8925	22
8725	22	**496**	7026	12	4232	23	9875	31	0126	31	4054	22	7115	11	**504**	8903	22
8747	22	**497**	7038	11	4209	22	9906	31	0095	32	4076	22	7104	11	**503**	8881	23
8769	23	**498**	7049	11	4187	23	9937	32	0063	32	4098	22	7093	11	**502**	8858	22
8792	22	**499**	7060	11	4164	22	9969	31	0031	31	4120	22	7082	11	**501**	8836	22
8814		**500**	7071		1,4142		•000		1,0000		1,4142		7071		**500**	8814	22
0,		0,[q]	0,				0,						0,		0,[q]	0,	
			cosin / 1/Ch u	d	séc / Ch u	d	cotg / 1/Sh u	d	tang / Sh u	d	coséc / 1/Tgh u	d	sinus / Tgh u	d	arc / Amb u	n	d

ET HYPERBOLIQUES.

Logarithmes.

M u	d	Amh u	Tgh u		1/Tgh u	Sh u		1/Sh u	Ch u		1/Ch u			
		arc	sinus	d	coséc	tang	d	cotg	séc	d	cosin			
0,		**0,q**	$\bar{1}$,		0,	$\bar{1}$,		0,	0,		$\bar{1}$,	**0,q**	0,	
3363	9	**450**	8125	8	1875	9315	14	0685	1190	5	8810	**550**	4331	11
3372	9	**451**	8133	8	1867	9329	14	0671	1195	6	8805	**549**	4320	10
3381	9	**452**	8141	8	1859	9343	13	0657	1201	6	8799	**548**	4310	11
3390	9	**453**	8149	8	1851	9356	14	0644	1207	6	8793	**547**	4299	10
3399	9	**454**	8157	8	1843	9370	14	0630	1213	6	8787	**546**	4289	11
3408	9	**455**	8165	8	1835	9384	14	0616	1219	6	8781	**545**	4278	10
3417	9	**456**	8173	8	1827	9398	14	0602	1225	6	8775	**544**	4268	10
3426	9	**457**	8181	8	1819	9412	13	0588	1231	6	8769	**543**	4258	11
3435	9	**458**	8189	7	1811	9425	14	0575	1237	6	8763	**542**	4247	10
3444	9	**459**	8196	8	1804	9439	14	0561	1243	6	8757	**541**	4237	10
3453	9	**460**	8204	8	1796	9453	14	0547	1249	6	8751	**540**	4227	11
3462	9	**461**	8212	7	1788	9467	13	0533	1255	6	8745	**539**	4216	10
3471	10	**462**	8219	8	1781	9480	14	0520	1261	6	8739	**538**	4206	10
3481	9	**463**	8227	8	1773	9494	14	0506	1267	6	8733	**537**	4196	11
3490	9	**464**	8235	7	1765	9508	14	0492	1273	6	8727	**536**	4185	10
3499	9	**465**	8242	8	1758	9522	13	0478	1279	6	8721	**535**	4175	10
3508	9	**466**	8250	8	1750	9535	14	0465	1285	6	8715	**534**	4165	10
3517	9	**467**	8258	7	1742	9549	14	0451	1291	6	8709	**533**	4155	10
3526	10	**468**	8265	8	1735	9563	13	0437	1297	7	8703	**532**	4145	11
3536	9	**469**	8273	7	1727	9576	14	0424	1304	6	8696	**531**	4134	10
3545	9	**470**	8280	8	1720	9590	14	0410	1310	6	8690	**530**	4124	10
3554	9	**471**	8288	7	1712	9604	13	0396	1316	6	8684	**529**	4114	10
3563	10	**472**	8295	8	1705	9617	14	0383	1322	7	8678	**528**	4104	10
3573	9	**473**	8303	7	1697	9631	14	0369	1329	6	8671	**527**	4094	10
3582	9	**474**	8310	7	1690	9645	14	0355	1335	6	8665	**526**	4084	10
3591	9	**475**	8317	8	1683	9659	13	0341	1341	6	8659	**525**	4074	10
3600	10	**476**	8325	7	1675	9672	14	0328	1347	7	8653	**524**	4064	10
3610	9	**477**	8332	7	1668	9686	14	0314	1354	6	8646	**523**	4054	10
3619	9	**478**	8339	8	1661	9700	13	0300	1360	7	8640	**522**	4044	10
3628	10	**479**	8347	7	1653	9713	14	0287	1367	6	8633	**521**	4034	10
3638	9	**480**	8354	7	1646	9727	14	0273	1373	6	8627	**520**	4024	10
3647	9	**481**	8361	8	1639	9741	13	0259	1379	7	8621	**519**	4014	10
3656	10	**482**	8369	7	1631	9754	14	0246	1386	6	8614	**518**	4004	10
3666	9	**483**	8376	7	1624	9768	14	0232	1392	7	8608	**517**	3994	10
3675	10	**484**	8383	7	1617	9782	13	0218	1399	6	8601	**516**	3984	10
3685	9	**485**	8390	7	1610	9795	14	0205	1405	7	8595	**515**	3974	10
3694	10	**486**	8397	7	1603	9809	14	0191	1412	6	8588	**514**	3964	10
3704	9	**487**	8404	7	1596	9823	13	0177	1418	7	8582	**513**	3954	9
3713	10	**488**	8411	7	1589	9836	14	0164	1425	6	8575	**512**	3945	10
3723	9	**489**	8418	8	1582	9850	14	0150	1431	7	8569	**511**	3935	10
3732	10	**490**	8426	7	1574	9864	13	0136	1438	7	8562	**510**	3925	10
3742	9	**491**	8433	7	1567	9877	14	0123	1445	6	8555	**509**	3915	10
3751	10	**492**	8440	7	1560	9891	13	0109	1451	7	8549	**508**	3905	9
3761	9	**493**	8447	7	1553	9904	14	0096	1458	7	8542	**507**	3896	10
3770	10	**494**	8454	6	1546	9918	14	0082	1465	6	8535	**506**	3886	10
3780	9	**495**	8460	7	1540	9932	13	0068	1471	7	8529	**505**	3876	10
3789	10	**496**	8467	7	1533	9945	14	0055	1478	7	8522	**504**	3866	9
3799	9	**497**	8474	7	1526	9959	14	0041	1485	7	8515	**503**	3857	10
3808	10	**498**	8481	7	1519	9973	13	0027	1492	6	8508	**502**	3847	10
3818	10	**499**	8488	7	1512	9986	14	0014	1498	7	8502	**501**	3837	9
3828		**500**	8495		1505	10000		0000	1505		8495	**500**	3828	
0,		**0,q**	$\bar{1}$,		0,	$\bar{1}$,		0,	0,		$\bar{1}$,	**0,q**	0,	
			cosin	d	séc	cotg	d	tang	coséc	d	sinus	arc		
			1/Ch u		Ch u	1/Sh u		Sh u	1/Tgh u		Tgh u	Amh u	M u	d

XV. — FONCTIONS CIRCULAIRES NATURELLES A DIX DÉCIMALES.

Arc.	Sinus.	Tangente.	Cotangente.	Cosinus.	
0,00 (q)	0,0000 0000 00	0,0000 0000 00	∞	1,0000 0000 00	1,00 (q)
01	0,0157 0731 73	0,0157 0925 53	63,6567 4116 29	0,9998 7663 25	0.99
02	0,0314 1075 91	0,0314 2626 60	31,8205 1595 38	0,9995 0656 04	98
03	0,0471 0645 07	0,0471 5880 29	21,2049 4878 97	0,9988 8987 50	97
04	0,0627 9051 95	0,0629 1466 73	15,8945 4484 39	0,9980 2672 84	96
0,05	0,0784 5909 57	0,0787 0170 68	12,7062 0473 62	0,9969 1733 37	0,95
06	0,0941 0831 33	0,0945 2783 12	10,5788 9499 34	0,9955 6196 46	94
07	0,1097 3431 11	0,1104 0102 78	9,0578 8668 62	0,9939 6095 55	93
08	0,1253 3323 36	0,1263 2937 84	7,9158 1508 83	0,9921 1470 13	92
09	0,1409 0123 19	0,1423 2107 57	7,0263 6622 90	0,9900 2365 77	91
0,10	0,1564 3446 50	0,1583 8444 03	6,3137 5151 47	0,9876 8834 06	0,90
11	0,1719 2910 03	0,1745 2793 89	5,7297 4164 67	0,9851 0932 62	89
12	0,1873 8131 46	0,1907 6020 22	5,2421 8358 11	0,9822 8725 07	88
13	0,2027 8729 54	0,2070 9004 44	4,8288 1735 22	0,9792 2281 06	87
14	0,2181 4324 14	0,2235 2648 29	4,4737 4282 92	0,9759 1676 19	86
0,15	0,2334 4536 39	0,2400 7875 91	4,1652 9977 01	0,9723 6992 04	0,85
16	0,2486 8988 72	0,2567 5636 04	3,8947 4285 49	0,9685 8316 11	84
17	0,2638 7305 00	0,2735 6904 31	3,6553 8435 47	0,9645 5741 85	83
18	0,2789 9110 60	0,2905 2685 67	3,4420 2257 67	0,9602 9368 57	82
19	0,2940 4032 52	0,3076 4016 97	3,2505 5080 13	0,9557 9301 48	81
0,20	0,3090 1699 44	0,3249 1969 62	3,0776 8353 72	0,9510 5651 63	0,80
21	0,3239 1741 82	0,3423 7652 57	2,9207 6098 93	0,9460 8535 88	79
22	0,3387 3792 02	0,3600 2215 31	2,7776 0685 39	0,9408 8076 90	78
23	0,3534 7484 38	0,3778 6851 18	2,6464 2321 03	0,9354 4403 08	77
24	0,3681 2455 27	0,3959 2800 88	2,5257 1168 94	0,9297 7648 59	76
0,25	0,3826 8343 24	0,4142 1356 24	2,4142 1356 24	0,9238 7953 25	0,75
26	0,3971 4789 06	0,4327 3864 22	2,3108 6365 39	0,9177 5462 57	74
27	0,4115 1435 86	0,4515 1731 31	2,2147 5449 78	0,9114 0327 66	73
28	0,4257 7929 16	0,4705 6428 12	2,1251 0817 32	0,9048 2705 25	72
29	0,4399 3916 99	0,4898 9494 50	2,0412 5396 71	0,8980 2757 58	71
0,30	0,4539 9049 97	0,5095 2544 95	1,9626 1050 55	0,8910 0652 42	0,70
31	0,4679 2981 43	0,5294 7274 52	1,8886 7134 16	0,8837 6563 01	69
32	0,4817 5367 41	0,5497 5465 22	1,8189 9324 73	0,8763 0668 00	68
33	0,4954 5866 84	0,5703 8992 97	1,7531 8663 25	0,8686 3151 44	67
34	0,5090 4141 58	0,5913 9835 14	1,6909 0765 58	0,8607 4202 70	66
0,35	0,5224 9856 47	0,6128 0078 81	1,6318 5168 71	0,8526 4016 44	0,65
36	0,5358 2679 50	0,6346 1929 75	1,5757 4786 00	0,8443 2792 55	64
37	0,5490 2281 80	0,6568 7722 24	1,5223 5450 69	0,8358 0736 14	63
38	0,5620 8337 79	0,6795 9929 82	1,4714 5531 58	0,8270 8057 43	62
39	0,5750 0525 20	0,7028 1177 12	1,4228 5607 74	0,8181 4971 74	61
0,40	0,5877 8525 23	0,7265 4252 80	1,3763 8192 05	0,8090 1699 44	0,60
41	0,6004 2022 53	0,7508 2123 80	1,3318 7495 15	0,7996 8465 85	59
42	0,6129 0705 37	0,7756 7951 10	1,2891 9223 18	0,7901 5501 24	58
43	0,6252 4265 63	0,8011 5107 06	1,2482 0403 64	0,7804 3040 73	57
44	0,6374 2398 97	0,8272 7194 60	1,2087 9235 04	0,7705 1324 28	56
0,45	0,6494 4804 83	0,8540 8068 55	1,1708 4956 61	0,7604 0596 56	0,55
46	0,6613 1186 53	0,8816 1859 24	1,1342 7734 93	0,7501 1106 96	54
47	0,6730 1251 35	0,9099 2998 82	1,0989 8565 05	0,7396 3109 50	53
48	0,6845 4710 59	0,9390 6250 58	1,0648 9184 03	0,7289 6862 74	52
49	0,6959 1279 66	0,9690 6741 72	1,0319 1994 93	0,7181 2629 78	51
0,50 (q)	0,7071 0678 12	1,0000 0000 00	1,0000 0000 00	0,7071 0678 12	0,50 (q)
	Cosinus.	Cotangente.	Tangente.	Sinus.	Arc.

Dix-millièmes.	0,000 (q)			0,001 (q)			0,002 (q)			0,003 (q)			0,004 (q)		
	0,00	Sin.	Tg.	0,00	Sin.	Tg.	0,00	Sin.	Tg.	0,00	Sin.	Tg.	0,00	Sin.	Tg.
1	015707	96	96	17278	751	777	3298	6663	6843	4869	4494	5071	6440	2204	3540
2	031415	93	93	18849	545	578	3455	7450	7657	5026	5271	5906	6597	2967	4403
3	047123	89	89	20420	338	381	3612	8237	8473	5183	6047	6743	6754	3728	5269
4	062831	85	86	21991	131	184	3769	9023	9290	5340	6821	7583	6911	4488	6139
5	078539	81	83	23561	923	989	3926	9807	*0110	5497	7594	8425	7068	5246	7012
6	094247	77	81	25132	715	794	4084	0591	0932	5654	8366	9271	7225	6002	7889
7	109955	72	79	26703	506	601	4241	1374	1755	5811	9137	*0119	7382	6757	8769
8	125663	67	77	28274	296	409	4398	2155	2581	5968	9906	*0969	7539	7509	9652
9	141371	62	76	29845	086	219	4555	2936	3409	6126	0674	1823	7696	8260	*0540
10	157079	57	76	31415	875	*030	4712	3715	4239	6283	1440	2680	7853	9009	*1431

XVI. — FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Fonctions du module.

log k	θ	log K	log $\frac{2K}{\pi}$	log q	α	log E	log E′	log q'	log $\frac{2K'}{\pi}$	β	log K′	$\frac{\pi}{2}-\theta$	log k'
	0^q,	0,				0,	0,				0,		
»	00	1961	0	»	0	1961	0000	0,0000	∞	0	∞	100	0,0000
$\bar{2}$,1961	01	1961	0	$\bar{5}$,1881	1	1961	0003	$\bar{1}$,6131	5474	0	7435	99	$\bar{1}$,9999
4971	02	1962	1	$\bar{5}$,7903	2	1960	0009	5578	4894	1	6855	98	9998
6731	03	1964	2	$\bar{4}$,1425	5	1959	0019	5174	4516	2	6477	97	9995
7979	04	1965	4	3925	9	1957	0031	4840	4227	3	6188	96	9991
$\bar{2}$,8946	05	1968	7	$\bar{4}$,5865	13	1955	0046	$\bar{1}$,4547	3989	5	5951	95	$\bar{1}$,9987
$\bar{2}$,9736	06	1971	10	7451	19	1952	0062	4281	3786	7	5747	94	9981
$\bar{1}$,0403	07	1974	13	8792	26	1948	0081	4035	3606	9	5568	93	9974
0981	08	1978	17	$\bar{4}$,9954	34	1944	0100	3804	3446	12	5407	92	9966
1489	09	1983	22	$\bar{3}$,0981	43	1940	0122	3585	3299	15	5260	91	9956
$\bar{1}$,1943	10	1988	27	$\bar{3}$,1899	54	1934	0144	$\bar{1}$,3376	3165	19	5126	90	$\bar{1}$,9946
2353	11	1994	33	2731	65	1929	0168	3174	3040	22	5001	89	9935
2727	12	2000	39	3491	77	1923	0193	2978	2923	26	4885	88	9922
3070	13	2007	45	4190	91	1916	0219	2787	2814	30	4775	87	9909
3387	14	2014	53	4839	105	1909	0245	2602	2711	35	4672	86	9894
$\bar{1}$,3682	15	2022	61	$\bar{3}$,5444	121	1901	0273	$\bar{1}$,2419	2613	39	4574	85	$\bar{1}$,9878
3957	16	2030	69	6010	138	1893	0301	2240	2520	44	4481	84	9861
4214	17	2039	78	6542	156	1884	0329	2064	2432	49	4393	83	9843
4456	18	2049	88	7045	175	1875	0359	1890	2347	55	4308	82	9824
4684	19	2059	98	7522	195	1865	0388	1719	2266	60	4227	81	9804
$\bar{1}$,4900	20	2069	108	$\bar{3}$,7974	216	1854	0418	$\bar{1}$,1548	2188	66	4149	80	$\bar{1}$,9782
5104	21	2081	120	8406	238	1843	0448	1380	2114	72	4075	79	9759
5299	22	2093	131	8818	262	1832	0479	1212	2042	78	4003	78	9735
5484	23	2105	144	9212	286	1820	0510	1045	1972	84	3934	77	9710
5660	24	2118	157	9591	312	1807	0541	0879	1906	91	3867	76	9684
$\bar{1}$,5828	25	2131	170	$\bar{3}$,9954	339	1794	0572	$\bar{1}$,0714	1841	97	3802	75	$\bar{1}$,9656
5990	26	2146	184	$\bar{2}$,0305	367	1781	0603	0548	1779	104	3740	74	9627
6144	27	2160	199	0642	396	1767	0635	0384	1718	111	3679	73	9597
6292	28	2176	214	0969	426	1752	0666	0219	1660	118	3621	72	9566
6434	29	2192	230	1284	458	1737	0697	$\bar{1}$,0054	1603	125	3564	71	9533
$\bar{1}$,6570	30	2208	247	$\bar{2}$,1590	490	1721	0728	$\bar{2}$,9888	1548	133	3509	70	$\bar{1}$,9499
6702	31	2225	264	1887	524	1705	0759	9723	1495	140	3456	69	9463
6828	32	2243	282	2175	559	1689	0790	9557	1443	148	3404	68	9427
6950	33	2262	300	2454	596	1671	0821	9390	1393	155	3354	67	9388
7068	34	2281	320	2727	633	1654	0852	9223	1344	163	3305	66	9349
$\bar{1}$,7181	35	2300	339	$\bar{2}$,2992	672	1636	0883	$\bar{2}$,9055	1296	171	3258	65	$\bar{1}$,9308
7290	36	2321	360	3251	712	1617	0913	8886	1250	179	3211	64	9265
7396	37	2342	381	3503	753	1598	0943	8716	1205	187	3167	63	9221
7498	38	2364	402	3750	795	1578	0973	8544	1162	195	3123	62	9175
7597	39	2386	425	3991	839	1558	1002	8372	1119	203	3080	61	9128
$\bar{1}$,7692	40	2409	448	$\bar{2}$,4227	884	1537	1032	$\bar{2}$,8198	1078	211	3039	60	$\bar{1}$,9080
7785	41	2433	472	4458	930	1516	1061	8023	1038	219	2999	59	9029
7874	42	2458	496	4684	978	1495	1089	7846	998	228	2960	58	8977
7960	43	2483	522	4906	1027	1473	1118	7667	960	236	2921	57	8923
8044	44	2509	548	5124	1077	1450	1146	7486	923	244	2884	56	8868
$\bar{1}$,8125	45	2536	574	$\bar{2}$,5338	1129	1427	1173	$\bar{2}$,7304	887	252	2848	55	$\bar{1}$,8810
8204	46	2563	602	5549	1182	1404	1200	7119	852	261	2813	54	8751
8280	47	2591	630	5755	1236	1380	1227	6932	817	269	2779	53	8690
8354	48	2621	659	5959	1292	1355	1254	6743	784	277	2745	52	8627
8426	49	2651	689	6159	1349	1331	1280	6551	752	285	2713	51	8562
$\bar{1}$,8495	50	2681	720	$\bar{2}$,6356	1408	1305	1305	$\bar{2}$,6356	720	294	2681	50	$\bar{1}$,8495
		0,				0,	0,				0,	0^q;	
log k'	$\frac{\pi}{2}-\theta$	log K′	log $\frac{2K'}{\pi}$	log q'	α	log E′	log E	log q	log $\frac{2K}{\pi}$	β	log K	θ	log k

Pour k très-petit :

$$\log q = \log\frac{k^2}{16} + \alpha, \qquad \log\frac{1}{16} = \bar{2},7958\ 8002;$$

$$\log q' = \frac{M^2\pi^2}{\log q}, \qquad \log M^2\pi^2 = 0,2698\ 6837;$$

$$\log K' = \log\left(\log\frac{4}{k}\right) + \log\frac{1}{M} + \beta, \qquad \log\frac{1}{M} = 0,3622\ 1569.$$

XVI. (Suite.) — FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Intégrales de première espèce.

Valeurs naturelles de $u = F(\varphi)$.

am $u = \varphi$	$\theta = 0^q,0$	$0^q,1$	$0^q,2$	$0^q,3$	$0^q,4$	$0^q,5$	$0^q,6$	$0^q,7$	$0^q,8$	$0^q,9$	$1^q,0$
$0^q,0$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	1571	1571	1571	1572	1573	1574	1575	1576	1577	1577	1577
2	3142	3143	3146	3152	3159	3167	3176	3183	3189	3193	3195
3	4712	4716	4728	4747	4772	4800	4829	4856	4878	4892	4897
4	6283	6293	6320	6365	6423	6491	6563	6633	6690	6729	6743
$0^q,5$	0,7854	0,7872	0,7924	0,8009	0,8123	0,8260	0,8411	0,8561	0,8692	0,8781	0,8814
6	9425	9454	9540	9682	9879	1,0124	1,0405	1,0700	1,0971	1,1169	1,1242
7	1,0996	1,1039	1,1168	1,1386	1,1694	2093	2575	3118	3664	4097	4268
8	2566	2626	2807	3116	3564	4167	4939	5886	6964	7972	8427
9	4137	4215	4454	4866	5478	6328	7481	9028	2,1094	2,3685	2,5421
$1^q,0$	1,5708	1,5805	1,6105	1,6627	1,7415	1,8541	2,0133	2,2435	2,5998	3,2553	log ∞

Valeurs logarithmiques de $u = F(\varphi)$.

am $u = \varphi$	$\theta = 0^q,0$	$0^q,1$	$0^q,2$	$0^q,3$	$0^q,4$	$0^q,5$	$0^q,6$	$0^q,7$	$0^q,8$	$0^q,9$	$1^q,0$
$0^q,0$	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
1	$\bar{1}$,1961	1962	1963	1965	1967	1970	1973	1975	1977	1979	1979
2	4971	4973	4978	4986	4996	5007	5018	5029	5037	5042	5044
3	6732	6736	6747	6765	6787	6812	6838	6863	6882	6895	6899
4	7982	7988	8007	8038	8077	8123	8171	8217	8255	8280	8288
$0^q,5$	$\bar{1}$,8951	8961	8989	9036	9097	9170	9248	9325	9391	9436	9452
6	9743	9756	9795	9860	9947	*0053	*0172	*0294	*0403	*0480	*0508
7	0,0412	0429	0480	0564	0680	0825	0995	1179	1356	1491	1544
8	0992	1013	1074	1178	1324	1513	1743	2010	2295	2546	2655
9	1504	1528	1600	1722	1897	2129	2426	2794	3242	3745	4052
$1^q,0$	0,1961	1988	2069	2208	2409	2581	3039	3509	4149	5126	∞

am $u = \varphi$	$\theta = 0^q,90$	$0^q,91$	$0^q,92$	$0^q,93$	$0^q,94$	$0^q,95$	$0^q,96$	$0^q,97$	$0^q,98$	$0^q,99$	$1^q,00$
$0^q,90$	0,3745	3793	3839	3883	3923	3960	3991	4017	4036	4048	4052
91	3877	3930	3982	4032	4078	4120	4157	4187	4210	4224	4229
92	4012	4071	4130	4186	4239	4288	4332	4368	4396	4413	4418
93	4148	4215	4281	4345	4407	4465	4517	4561	4595	4616	4624
94	4287	4362	4436	4510	4582	4651	4714	4769	4812	4840	4849
$0^q,95$	0,4428	4511	4595	4680	4765	4848	4926	4995	5051	5088	5101
96	4569	4662	4757	4855	4955	5055	5152	5243	5319	5372	5391
97	4710	4813	4921	5033	5150	5272	5395	5517	5626	5707	5738
98	4851	4965	5085	5213	5350	5497	5654	5818	5984	6124	6184
99	4990	5114	5248	5392	5550	5725	5921	6145	6401	6688	6854
$1^q,00$	0,5126	5260	5407	5568	5747	5951	6188	6477	6855	7435	∞

Intégrales de seconde espèce.

Valeurs naturelles de $E(\varphi)$.

am $u = \varphi$	$\theta = 0^q,0$	$0^q,1$	$0^q,2$	$0^q,3$	$0^q,4$	$0^q,5$	$0^q,6$	$0^q,7$	$0^q,8$	$0^q,9$	$1^q,0$
$0^q,0$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	1571	1571	1570	1569	1569	1568	1567	1566	1565	1566	1564
2	3142	3140	3137	3131	3124	3116	3108	3101	3095	3091	3090
3	4712	4708	4696	4678	4654	4628	4601	4576	4557	4544	4540
4	6283	6274	6247	6204	6149	6087	6024	5966	5919	5888	5878
$0^q,5$	0,7854	0,7836	0,7785	0,7704	0,7600	0,7482	0,7360	0,7246	0,7153	0,7092	1,7071
6	9425	9396	9312	9179	9006	8806	8598	8401	8237	8129	8090
7	1,0996	1,0953	1,0828	1,0627	1,0365	1,0060	9736	9423	9156	8976	8910
8	2566	2507	2333	2053	1685	1250	1,0780	1,0315	9907	9617	9511
9	4137	4060	3831	3463	2974	2391	1751	1102	1,0507	1,0057	9877
$1^q,0$	1,5708	1,5611	1,5326	1,4864	1,4248	1,3506	1,2681	1,1826	1,1011	1,0338	1,0000

Valeurs logarithmiques de $E(\varphi)$.

am $u = \varphi$	$\theta = 0^q,0$	$0^q,1$	$0^q,2$	$0^q,3$	$0^q,4$	$0^q,5$	$0^q,6$	$0^q,7$	$0^q,8$	$0^q,9$	$1^q,0$
$0^q,0$	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
1	$\bar{1}$,1961	$\bar{1}$,1961	$\bar{1}$,1960	$\bar{1}$,1958	$\bar{1}$,1955	$\bar{1}$,1952	$\bar{1}$,1950	$\bar{1}$,1947	$\bar{1}$,1945	$\bar{1}$,1946	$\bar{1}$,1943
2	4971	4970	4965	4957	4947	4936	4925	4915	4907	4902	4900
3	6732	6729	6718	6700	6678	6654	6628	6605	6587	6575	6570
4	7982	7975	7956	7926	7888	7844	7799	7757	7722	7700	7692
$0^q,5$	$\bar{1}$,8951	$\bar{1}$,8941	$\bar{1}$,8913	$\bar{1}$,8867	$\bar{1}$,8808	$\bar{1}$,8740	$\bar{1}$,8669	$\bar{1}$,8601	$\bar{1}$,8545	$\bar{1}$,8508	$\bar{1}$,8495
6	9743	9729	9691	9628	9545	9448	9344	9243	9158	9100	9080
7	0,0412	0,0395	0,0345	0,0264	0,0156	0,0026	9884	9742	9617	9530	9499
8	0992	0972	0911	0811	0676	0511	0,0326	0,0135	9959	9831	9782
9	1504	1480	1409	1291	1131	0931	0701	0454	0,0215	0,0024	9946
$1^q,0$	0,1961	0,1934	0,1854	0,1721	0,1537	0,1305	0,1032	0,0728	0,0418	0,0144	0,0000

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Valeurs naturelles de $\frac{u}{K} = \frac{2}{\pi}x$ en parties du rayon, ou de $x = \frac{\pi u}{2K}$ en parties du quadrant

$\varphi = \text{am}\, u$	$\theta=0^q,0$	$0^q,1$	$0^q,2$	$0^q,3$	$0^q,4$	$0^q,5$	$0^q,6$	$0^q,7$	$0^q,8$	$0^q,9$	$1^q,0$
$0^q,0$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	1000	0994	0976	0945	0903	0849	0782	0702	0606	0484	0000
2	2000	1988	1954	1896	1814	1708	1577	1419	1227	0981	0000
3	3000	2984	2936	2855	2740	2589	2399	2164	1876	1503	0000
4	4000	3981	3925	3828	3688	3501	3260	2956	2573	2067	0000
$0^q,5$	0,5000	0,4980	0,4920	0,4817	0,4664	0,4455	0,4178	0,3816	0,3343	0,2698	0,0000
6	6000	5981	5924	5823	5673	5460	5168	4769	4220	3431	0000
7	7000	6984	6935	6848	6715	6522	6246	5847	5256	4329	0000
8	8000	7988	7952	7888	7749	7641	7420	7081	6525	5521	0000
9	9000	8994	8975	8936	8887	8807	8683	8481	8114	7276	0,0000
$1^q,0$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Valeurs logarithmiques des fonctions ϑ et de leurs dérivées logarithmiques.

	x	$\theta=0^q,0$	$0^q,1$	$0^q,2$	$0^q,3$	$0^q,4$	$0^q,5$	$0^q,6$	$0^q,7$	$0^q,8$	$0^q,9$	x_1
$\vartheta(x) = \vartheta_1(x_1)$.	$0^q,0$	0,0000	$\bar{1}$,9987	$\bar{1}$,9945	$\bar{1}$,9873	$\bar{1}$,9764	$\bar{1}$,9607	$\bar{1}$,9385	$\bar{1}$,9059	$\bar{1}$,8544	$\bar{1}$,7554	$1^q,0$
	1	0000	9987	9948	9879	9776	9636	9417	9110	8627	7707	0,9
	2	0000	9989	9956	9897	9810	9685	9509	9255	8860	8125	8
	3	0000	9992	9968	9926	9863	9774	9649	9471	9200	8709	7
	4	0000	9996	9983	9961	9928	9882	9819	9730	9595	9360	6
	$0^q,5$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	$\bar{1}$,9999	$\bar{1}$,9996	$\bar{1}$,9981	$0^q,5$
	6	0000	0004	0017	0039	0070	0114	0174	0,0253	0,0365	0,0534	4
	7	0000	0008	0032	0073	0133	0215	0325	0471	0673	0984	3
	8	0000	0011	0044	0100	0182	0294	0441	0636	0904	1314	2
	9	0000	0013	0052	0118	0213	0336	0514	0739	1046	1515	1
	$1^q,0$	0,0000	0,0013	0,0054	0,0123	0,0225	0,0360	0,0539	0,0774	0,1094	0,1582	$0^q,0$
$\vartheta_1(x) = \vartheta(x_1)$.	$0^q,0$	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	$1^q,0$
	1	»	$\bar{2}$,7928	$\bar{2}$,9447	$\bar{1}$,0349	$\bar{1}$,1002	$\bar{1}$,1519	$\bar{1}$,1948	$\bar{1}$,2304	$\bar{1}$,2576	$\bar{1}$,2656	0,9
	2	»	$\bar{1}$,0885	$\bar{1}$,2403	3305	3959	4478	4910	5273	5559	5680	8
	3	»	2556	4074	4976	5631	6152	6589	6962	7271	7453	7
	4	»	3677	5196	6099	6754	7278	7721	8107	8444	8700	6
	$0^q,5$	»	$\bar{1}$,4480	$\bar{1}$,5999	$\bar{1}$,6902	$\bar{1}$,7559	$\bar{1}$,8086	$\bar{1}$,8536	$\bar{1}$,8936	$\bar{1}$,9303	$\bar{1}$,9638	$0^q,5$
	6	»	5065	6583	7487	8145	8676	9132	9546	9943	0,0354	4
	7	»	5484	7003	7907	8566	9100	9562	9988	0,0412	0889	3
	8	»	5767	7286	8190	8851	9386	9854	0,0288	0734	1261	2
	9	»	5931	7450	8355	9016	9553	0,0023	0466	0923	1482	1
	$1^q,0$	»	$\bar{1}$,5985	$\bar{1}$,7504	$\bar{1}$,8409	$\bar{1}$,9071	$\bar{1}$,9607	0,0103	0,0531	0,0977	0,1555	$0^q,0$
$D_x \log \vartheta(x) = -D_{x_1} \log \vartheta_1(x_1)$.	$0^q,0$	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	$1^q,0$
	1	»	$\bar{3}$,2832	$\bar{3}$,8947	$\bar{2}$,2631	$\bar{2}$,5371	$\bar{2}$,7639	$\bar{2}$,9696	$\bar{1}$,1683	$\bar{1}$,3803	$\bar{1}$,6415	0,9
	2	»	5623	$\bar{2}$,1731	5405	8130	$\bar{1}$,0383	$\bar{1}$,2397	4333	6368	8816	8
	3	»	7007	3107	6764	9464	1682	3646	5508	7425	9660	7
	4	»	7706	3794	7432	$\bar{1}$,0101	2276	4180	5957	7743	9763	6
	$0^q,5$	»	3,7920	$\bar{2}$,3995	$\bar{2}$,7611	$\bar{1}$,0248	$\bar{1}$,2377	$\bar{1}$,4219	$\bar{1}$,5910	$\bar{1}$,7573	$\bar{1}$,9416	$0^q,5$
	6	»	7696	3760	7354	$\bar{2}$,9959	2045	3829	5443	6999	8699	4
	7	»	6991	3043	6617	9194	1242	2976	4527	5999	7595	3
	8	»	5601	1643	5203	7758	$\bar{2}$,9777	1474	2978	4390	5917	2
	9	»	2807	$\bar{3}$,8843	2393	4935	6942	$\bar{2}$,8609	0085	1461	2948	1
	$1^q,0$	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	$0^q,0$
$D_x \log \vartheta_1(x) = -D_{x_1} \log \vartheta(x_1)$.	$0^q,0$	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	$1^q,0$
	1	»	0,8003	0,8003	0,8003	0,8003	0,8004	0,8007	0,8011	0,8021	0,8051	0,9
	2	»	4882	4882	4883	4885	4888	4897	4914	4953	5076	8
	3	»	2928	2929	2930	2933	2942	2960	2997	3077	3288	7
	4	»	1387	1388	1390	1396	1410	1440	1502	1633	1960	6
	$0^q,5$	»	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0032	0,0075	0,0163	0,0347	0,0785	$0^q,5$
	6	»	$\bar{1}$,8613	$\bar{1}$,8614	$\bar{1}$,8617	$\bar{1}$,8629	$\bar{1}$,8655	$\bar{1}$,8711	$\bar{1}$,8824	$\bar{1}$,9057	$\bar{1}$,9590	4
	7	»	7072	7073	7077	7091	7123	7190	7326	7599	8208	3
	8	»	5118	5119	5124	5140	5176	5252	5407	5709	6371	2
	9	»	1997	1998	2004	2021	2060	2142	2305	2628	3321	1
	$1^q,0$	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	$0^q,0$
	x	$\theta=0^q,0$	$0^q,1$	$0^q,2$	$0^q,3$	$0^q,4$	$0^q,5$	$0^q,6$	$0^q,7$	$0^q,8$	$0^q,9$	x_1

XVII. — TABLES DE DIVERSES TRANSCENDANTES.

Valeurs logarithmiques de la fonction $\Gamma(1+x)=\int_0^{\infty} e^{-\alpha}\alpha^x\,d\alpha=\int_0^1\left[\log\frac{1}{\beta}\right]^x d\beta.$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d
0,0	$\bar{1}$,00000	99753	99513	99280	99053	98834	98621	98415	98215	98021	−187
1	97834	97653	97478	97310	97147	96990	96839	96694	96554	96421	−129
2	96292	96169	96052	95940	95833	95732	95636	95545	95459	95378	− 76
3	95302	95231	95165	95104	95047	94995	94948	94905	94868	94834	− 29
4	94805	94781	94761	94745	94734	94727	94724	94725	94731	94741	+ 13
0,5	$\bar{1}$,94754	94772	94794	94820	94850	94884	94921	94963	95008	95057	+ 53
6	95110	95167	95227	95291	95359	95430	95505	95583	95665	95750	+ 89
7	95839	95931	96027	96126	96229	96335	96444	96556	96672	96791	+122
8	96913	97038	97167	97298	97433	97571	97712	97856	98004	98154	+153
9	98307	98463	98622	98784	98949	99117	99288	99462	99638	99818	+182

Pour x entier, $\Gamma(1+x)=1.2.3\ldots x=x!$

x	Log Γ(1+x)	x	Log Γ(1+x)	x	Log Γ(1+x)	x	Log Γ(1+x)	x	Log Γ(1+x)
0	0,0000 0000	**20**	18,3861 2462	**40**	47,9116 4507	**60**	81,9201 7485	**80**	118,8547 2772
1	0,0000 0000	**21**	19,7083 4391	**41**	49,5244 2892	**61**	83,7055 0468	**81**	120,7632 1274
2	0,3010 3000	**22**	21,0507 6659	**42**	51,1476 7822	**62**	85,4978 9637	**82**	122,6770 2659
3	0,7781 5125	**23**	22,4124 9443	**43**	52,7811 4667	**63**	87,2972 3692	**83**	124,5961 0469
4	1,3802 1124	**24**	23,7927 0567	**44**	54,4245 9935	**64**	89,1034 1690	**84**	126,5203 8397
5	2,0791 8125	**25**	25,1906 4568	**45**	56,0778 1186	**65**	90,9163 3025	**85**	128,4498 0290
6	2,8573 3250	**26**	26,6056 1903	**46**	57,7405 6969	**66**	92,7358 7419	**86**	130,3843 0135
7	3,7024 3054	**27**	28,0369 8279	**47**	59,4126 6755	**67**	94,5619 4899	**87**	132,3238 2060
8	4,6055 2052	**28**	29,4841 4082	**48**	61,0939 0879	**68**	96,3944 5790	**88**	134,2683 0327
9	5,5597 6303	**29**	30,9465 3882	**49**	62,7841 0487	**69**	98,2333 0700	**89**	136,2176 9328
10	6,5597 6303	**30**	32,4236 6007	**50**	64,4830 7487	**70**	100,0784 0504	**90**	138,1719 3579
11	7,6011 5572	**31**	33,9150 2177	**51**	66,1906 4505	**71**	101,9296 6338	**91**	140,1309 7718
12	8,6803 3696	**32**	35,4201 7175	**52**	67,9066 4839	**72**	103,7869 9588	**92**	142,0947 6501
13	9,7942 8032	**33**	36,9386 8569	**53**	69,6309 2426	**73**	105,6503 1874	**93**	144,0632 4796
14	10,9404 0835	**34**	38,4701 6460	**54**	71,3633 1802	**74**	107,5195 5046	**94**	146,0363 7581
15	12,1164 9961	**35**	40,0142 3265	**55**	73,1036 8071	**75**	109,3946 1172	**95**	148,0140 9942
16	13,3206 1959	**36**	41,5705 3515	**56**	74,8518 6874	**76**	111,2754 2532	**96**	149,9963 7065
17	14,5510 6852	**37**	43,1387 3687	**57**	76,6077 4359	**77**	113,1619 1604	**97**	151,9831 4238
18	15,8063 4102	**38**	44,7185 2047	**58**	78,3711 7159	**78**	115,0540 1064	**98**	153,9743 6846
19	17,0850 9462	**39**	46,3095 8508	**59**	80,1420 2360	**79**	116,9516 3774	**99**	155,9700 0365

Pour $-1<x<1$, $\log\Gamma(1+x)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi x}{\sin\pi x}\cdot\frac{1-x}{1+x}\right)+a_1x-a_3x^3-a_5x^5-a_7x^7-\ldots$

Pour x très-grand, $\log\Gamma(1+x)=\log\sqrt{2\pi}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x-\mathrm{M}x+\frac{b_1}{x}-\frac{b_3}{x^3}+\frac{b_5}{x^5}-\frac{b_7}{x^7}+\ldots$

	Log		Log		Log		Log		Log
a_1	$\bar{1}$,2639 0320	a_9	$\bar{5}$,9863 90	$\sqrt{2\pi}$	0,3990 8993	b_5	$\bar{4}$,5374 14	b_{13}	$\bar{3}$,4447
a_3	$\bar{2}$,4661 3675	a_{11}	$\bar{5}$,2902 8	M	$\bar{1}$,6377 8431 13	b_7	$\bar{4}$,4124 75	b_{15}	$\bar{2}$,1084
a_5	$\bar{3}$,5061 672	a_{13}	$\bar{6}$,6127 3	b_1	$\bar{2}$,5586 0307	b_9	$\bar{4}$,5629 7	b_{17}	$\bar{2}$,8922
a_7	$\bar{4}$,7143 35	a_{15}	$\bar{7}$,9472	b_3	$\bar{3}$,0814 818	b_{11}	$\bar{4}$,9205 3	b_{19}	$\bar{1}$,7816

$a_1=0,1836\ 1290\ 38.$ $\mathrm{M}=0,4342\ 9448\ 1903.$ $b_{2n+1}=\frac{\mathrm{MB}_{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)}.$

Logarithmes des nombres de Bernoulli.

$B_1=\frac{1}{6}$	$\bar{1}$,2218 4875	B_{15}	0,8507 7833	B_{27}	7,4361 3451	B_{39}	16,2854 8033	B_{51}	26,7023 2523
$B_3=\frac{1}{30}$	$\bar{2}$,5228 7875	B_{17}	1,7401 3504	B_{29}	8,7792 9402	B_{41}	17,9251 5374	B_{53}	28,5626 3513
$B_5=\frac{1}{42}$	$\bar{2}$,3767 5071	B_{19}	2,7235 5766	B_{31}	10,1794 4596	B_{43}	19,6057 1514	B_{55}	30,4548 2611
$B_7=\frac{1}{30}$	$\bar{2}$,5228 7875	B_{21}	3,7918 3959	B_{33}	11,6330 7908	B_{45}	21,3253 2574	B_{57}	32,3777 6922
$B_9=\frac{5}{66}$	$\bar{2}$,8794 2607	B_{23}	4,9374 1885	B_{35}	13,1370 8988	B_{47}	23,0823 0510	B_{59}	34,3304 1274
$B_{11}=\frac{691}{2730}$	$\bar{1}$,4033 1540	B_{25}	6,1539 7245	B_{37}	14,6887 1547	B_{49}	24,8751 1145	B_{61}	36,3117 7453
$B_{13}=\frac{7}{6}$	0,0669 4679								

TABLES DE DIVERSES TRANSCENDANTES.

Logarithme intégral $\mathrm{li}\,x = \int_0^x \frac{dx}{\log x}$.

log x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{7}$,	−0,00012	00013	00014	00016	00018	00020	00023	00026	00029	00032
$\bar{6}$,	−0,00036	00040	00045	00051	00057	00064	00072	00081	00091	00102
$\bar{5}$,	−0,00115	00121	00145	00164	00184	00207	00234	00263	00297	00335
$\bar{4}$,	−0,00378	00427	00482	00545	00616	00697	00789	00894	01013	01149
$\bar{3}$,	−0,01305	01482	01686	01918	02185	02491	02844	03250	03719	04261
$\bar{2}$,	−0,04890	05620	06471	07465	08631	10002	11622	13545	15841	18599
$\bar{1}$,	−0,2194	−0,2602	−0,3106	−0,3738	−0,4544	−0,5598	−0,7024	−0,9057	−1,2227	−1,8229
0,	−∞	−1,6228	−0,8218	−0,3027	+0,1048	+0,4542	+0,7699	+1,0649	+1,3474	+1,6228
1,	+ 1,8951	2,1674	2,4421	2,7214	3,0072	3,3013	3,6053	3,9210	4,2499	4,5937
2,	+ 4,9542	5,3332	5,7326	6,1544	6,6007	7,0738	7,5761	8,1103	8,6793	9,2860
3,	+ 9,9338	10,6263	11,3673	12,1610	13,0121	13,9254	14,9063	15,9606	17,0948	18,3157
4,	+19,631	21,048	22,577	24,227	26,009	27,934	30,014	32,264	34,698	37,332
5,	+40,185	43,276	46,625	50,256	54,193	58,466	63,102	68,135	73,601	79,538
6,	+85,990	93,002	100,626	108,916	117,935	127,747	138,426	150,050	162,707	176,491

log x	x	li x	log x	x	li x	log x	x	li x	log x	x	li x
−10	$0{,}0^4 454$	$-0{,}0^5 416$	−0,5	0,6065	−0,5598	0,01	1,0101	−4,0179	1	2,718	1,895
− 9	$0{,}0^3 123$	$-0{,}0^4 124$	−0,4	0,6703	−0,7024	0,02	1,0202	−3,3147	2	7,389	4,954
− 8	$0{,}0^3 335$	$-0{,}0^4 377$	−0,3	0,7408	−0,9057	0,03	1,0305	−2,8991	3	20,086	9,934
− 7	$0{,}0^3 912$	$-0{,}0^3 115$	−0,2	0,8187	−1,2227	0,04	1,0408	−2,6013	4	54,598	19,631
− 6	$0{,}0^2 248$	$-0{,}0^3 360$	−0,1	0,9048	−1,8229	0,05	1,0513	−2,3679	5	148,413	40,185
− 5	$0{,}0^2 674$	$-0{,}0^2 115$	−0,05	0,9512	−2,4679	0,1	1,1052	−1,6228	6	403,43	85,99
− 4	0,01832	$-0{,}0^2 378$	−0,04	0,9608	−2,6813	0,2	1,2214	−0,8218	7	1096,63	191,50
− 3	0,04979	−0,01305	−0,03	0,9704	−2,9591	0,3	1,3499	−0,3027	8	2980,96	440,38
− 2	0,13534	−0,04890	−0,02	0,9802	−3,3547	0,4	1,4918	+0,1048	9	8103,08	1037,88
− 1	0,36788	−0,21938	−0,01	0,9900	−4,0379	0,5	1,6487	+0,4542	10	22026,47	2492,23

Valeurs de la fonction $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2}\,dx$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d
0,0	0,0000	0113	0226	0338	0451	0564	0676	0789	0901	1013	112
1	1125	1236	1348	1459	1569	1680	1790	1900	2009	2118	109
2	2227	2335	2443	2550	2657	2763	2869	2974	3079	3183	103
3	3286	3389	3491	3593	3694	3794	3893	3992	4090	4187	97
4	4284	4380	4475	4569	4662	4755	4847	4937	5028	5117	88
0,5	0,5205	5292	5379	5465	5549	5633	5716	5798	5879	5959	80
6	6039	6117	6194	6270	6346	6420	6494	6566	6638	6708	70
7	6778	6847	6914	6981	7047	7112	7175	7238	7300	7361	60
8	7421	7480	7538	7595	7651	7707	7761	7814	7867	7918	51
9	7969	8019	8068	8116	8163	8209	8254	8299	8342	8385	42
1,0	0,8427	8468	8508	8548	8586	8624	8661	8698	8733	8768	34
1	8802	8835	8868	8900	8931	8961	8991	9020	9048	9076	27
2	9103	9130	9155	9181	9205	9229	9252	9275	9297	9319	21
3	9340	9361	9381	9400	9419	9438	9456	9473	9490	9507	16
4	9523	9539	9554	9569	9583	9597	9611	9624	9637	9649	12
1,5	0,9661	9673	9684	9695	9706	9716	9726	9736	9745	9755	8
6	9763	9772	9780	9788	9796	9804	9811	9818	9825	9832	6
7	9838	9844	9850	9856	9861	9867	9872	9877	9882	9886	5
8	9891	9895	9899	9903	9907	9911	9915	9918	9922	9925	3
9	9928	9931	9934	9937	9939	9942	9944	9947	9949	9951	2
2,	0,9953	9970	9981	9989	9993	9996	9998	9999	9999	*0000	

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2}\,dx = a_1 x - a_3 x^3 + a_5 x^5 - \ldots = 1 - e^{-x^2}\left(\frac{b_1}{x} - \frac{b_3}{x^3} + \frac{b_5}{x^5} - \ldots\right).$$

$$a_{2n+1} = \frac{2}{1.2.3\ldots n.(2n+1)\sqrt{\pi}}, \qquad b_{2n+1} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n\sqrt{\pi}}.$$

a_1	0,0524 5506	a_9	$\bar{3}$,7180 0131	b_1	$\bar{1}$,7514 2506	b_9	0,5684 9438
a_3	$\bar{1}$,5753 3380	a_{11}	$\bar{4}$,9318 8113	b_3	$\bar{1}$,4503 9507	b_{11}	1,2217 0689
a_5	$\bar{1}$,0524 5506	a_{13}	$\bar{4}$,0811 7921	b_5	$\bar{1}$,6264 8633	b_{13}	1,9620 6958
a_7	$\bar{2}$,4292 0577	a_{15}	$\bar{5}$,1739 3326	b_7	0,0244 2634	b_{15}	2,7749 8294

XVIII. — TABLE DES CARRÉS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d
0,00	0,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0001	0
01	0001	0001	0001	0002	0002	0002	0003	0003	0003	0004	0
02	0004	0004	0005	0005	0006	0006	0007	0007	0008	0008	1
03	0009	0010	0010	0011	0012	0012	0013	0014	0014	0015	1
04	0016	0017	0018	0018	0019	0020	0021	0022	0023	0024	1
0,05	0,0025	0026	0027	0028	0029	0030	0031	0032	0034	0035	1
06	0036	0037	0038	0040	0041	0042	0044	0045	0046	0048	1
07	0049	0050	0052	0053	0055	0056	0058	0059	0061	0062	2
08	0064	0066	0067	0069	0071	0072	0074	0076	0077	0079	2
09	0081	0083	0085	0086	0088	0090	0092	0094	0096	0098	2
0,10	0,0100	0102	0104	0106	0108	0110	0112	0114	0117	0119	2
11	0121	0123	0125	0128	0130	0132	0135	0137	0139	0142	2
12	0144	0146	0149	0151	0154	0156	0159	0161	0164	0166	3
13	0169	0172	0174	0177	0180	0182	0185	0188	0190	0193	3
14	0196	0199	0202	0204	0207	0210	0213	0216	0219	0222	3
0,15	0,0225	0228	0231	0234	0237	0240	0243	0246	0250	0253	3
16	0256	0259	0262	0266	0269	0272	0276	0279	0282	0286	3
17	0289	0292	0296	0299	0303	0306	0310	0313	0317	0320	4
18	0324	0328	0331	0335	0339	0342	0346	0350	0353	0357	4
19	0361	0365	0369	0372	0376	0380	0384	0388	0392	0396	4
0,20	0,0400	0404	0408	0412	0416	0420	0424	0428	0433	0437	4
21	0441	0445	0449	0454	0458	0462	0467	0471	0475	0480	4
22	0484	0488	0493	0497	0502	0506	0511	0515	0520	0524	5
23	0529	0534	0538	0543	0548	0552	0557	0562	0566	0571	5
24	0576	0581	0586	0590	0595	0600	0605	0610	0615	0620	5
0,25	0,0625	0630	0635	0640	0645	0650	0655	0660	0666	0671	5
26	0676	0681	0686	0692	0697	0702	0708	0713	0718	0724	5
27	0729	0734	0740	0745	0751	0756	0762	0767	0773	0778	6
28	0784	0790	0795	0801	0807	0812	0818	0824	0829	0835	6
29	0841	0847	0853	0858	0864	0870	0876	0882	0888	0894	6
0,30	0,0900	0906	0912	0918	0924	0930	0936	0942	0949	0955	6
31	0961	0967	0973	0980	0986	0992	0999	1005	1011	1018	6
32	1024	1030	1037	1043	1050	1056	1063	1069	1076	1082	7
33	1089	1096	1102	1109	1116	1122	1129	1136	1142	1149	7
34	1156	1163	1170	1176	1183	1190	1197	1204	1211	1218	7
0,35	0,1225	1232	1239	1246	1253	1260	1267	1274	1282	1289	7
36	1296	1303	1310	1318	1325	1332	1340	1347	1354	1362	7
37	1369	1376	1384	1391	1399	1406	1414	1421	1429	1436	8
38	1444	1452	1459	1467	1475	1482	1490	1498	1505	1513	8
39	1521	1529	1537	1544	1552	1560	1568	1576	1584	1592	8
0,40	0,1600	1608	1616	1624	1632	1640	1648	1656	1665	1673	8
41	1681	1689	1697	1706	1714	1722	1731	1739	1747	1756	8
42	1764	1772	1781	1789	1798	1806	1815	1823	1832	1840	9
43	1849	1858	1866	1875	1884	1892	1901	1910	1918	1927	9
44	1936	1945	1954	1962	1971	1980	1989	1998	2007	2016	9
0,45	0,2025	2034	2043	2052	2061	2070	2079	2088	2098	2107	9
46	2116	2125	2134	2144	2153	2162	2172	2181	2190	2200	9
47	2209	2218	2228	2237	2247	2256	2266	2275	2285	2294	10
48	2304	2314	2323	2333	2343	2352	2362	2372	2381	2391	10
49	2401	2411	2421	2430	2440	2450	2460	2470	2480	2490	10
0,50	0,2500	2510	2520	2530	2540	2550	2560	2570	2581	2591	10
51	2601	2611	2621	2632	2642	2652	2663	2673	2683	2694	10
52	2704	2714	2725	2735	2746	2756	2767	2777	2788	2798	11
53	2809	2820	2830	2841	2852	2862	2873	2884	2894	2905	11
54	2916	2927	2938	2948	2959	2970	2981	2992	3003	3014	11
0,55	0,3025	3036	3047	3058	3069	3080	3091	3102	3114	3125	11
56	3136	3147	3158	3170	3181	3192	3204	3215	3226	3238	11
57	3249	3260	3272	3283	3295	3306	3318	3329	3341	3352	12
58	3364	3376	3387	3399	3411	3422	3434	3446	3457	3469	12
59	3481	3493	3505	3516	3528	3540	3552	3564	3576	3588	12

A QUATRE DÉCIMALES.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d
0,60	0,3600	3612	3624	3636	3648	3660	3672	3684	3697	3709	12
61	3721	3733	3745	3758	3770	3782	3795	3807	3819	3832	12
62	3844	3856	3869	3881	3894	3906	3919	3931	3944	3956	13
63	3969	3982	3994	4007	4020	4032	4045	4058	4070	4083	13
64	4096	4109	4122	4134	4147	4160	4173	4186	4199	4212	13
0,65	0,4225	4238	4251	4264	4277	4290	4303	4316	4330	4343	13
66	4356	4369	4382	4396	4409	4422	4436	4449	4462	4476	13
67	4489	4502	4516	4529	4543	4556	4570	4583	4597	4610	14
68	4624	4638	4651	4665	4679	4692	4706	4720	4733	4747	14
69	4761	4775	4789	4802	4816	4830	4844	4858	4872	4886	14
0,70	0,4900	4914	4928	4942	4956	4970	4984	4998	5013	5027	14
71	5041	5055	5069	5084	5098	5112	5127	5141	5155	5170	14
72	5184	5198	5213	5227	5242	5256	5271	5285	5300	5314	15
73	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	5461	15
74	5476	5491	5506	5520	5535	5550	5565	5580	5595	5610	15
0,75	0,5625	5640	5655	5670	5685	5700	5715	5730	5746	5761	15
76	5776	5791	5806	5822	5837	5852	5868	5883	5898	5914	15
77	5929	5944	5960	5975	5991	6006	6022	6037	6053	6068	16
78	6084	6100	6115	6131	6147	6162	6178	6194	6209	6225	16
79	6241	6257	6273	6288	6304	6320	6336	6352	6368	6384	16
0,80	0,6400	6416	6432	6448	6464	6480	6496	6512	6529	6545	16
81	6561	6577	6593	6610	6626	6642	6659	6675	6691	6708	16
82	6724	6740	6757	6773	6790	6806	6823	6839	6856	6872	17
83	6889	6906	6922	6939	6956	6972	6989	7006	7022	7039	17
84	7056	7073	7090	7106	7123	7140	7157	7174	7191	7208	17
0,85	0,7225	7242	7259	7276	7293	7310	7327	7344	7362	7379	17
86	7396	7413	7430	7448	7465	7482	7500	7517	7534	7552	17
87	7569	7586	7604	7621	7639	7656	7674	7691	7709	7726	18
88	7744	7762	7779	7797	7815	7832	7850	7868	7885	7903	18
89	7921	7939	7957	7974	7992	8010	8028	8046	8064	8082	18
0,90	0,8100	8118	8136	8154	8172	8190	8208	8226	8245	8263	18
91	8281	8299	8317	8336	8354	8372	8391	8409	8427	8446	18
92	8464	8482	8501	8519	8538	8556	8575	8593	8612	8630	19
93	8649	8668	8686	8705	8724	8742	8761	8780	8798	8817	19
94	8836	8855	8874	8892	8911	8930	8949	8968	8987	9006	19
0,95	0,9025	9044	9063	9082	9101	9120	9139	9158	9178	9197	19
96	9216	9235	9254	9274	9293	9312	9332	9351	9370	9390	19
97	9409	9428	9448	9467	9487	9506	9526	9545	9565	9584	20
98	9604	9624	9643	9663	9683	9702	9722	9742	9761	9781	20
99	9801	9821	9841	9860	9880	9900	9920	9940	9960	9980	20
1,00	1,0000	0020	0040	0060	0080	0100	0120	0140	0161	0181	20
01	0201	0221	0241	0262	0282	0302	0323	0343	0363	0384	20
02	0404	0424	0445	0465	0486	0506	0527	0547	0568	0588	21
03	0609	0630	0650	0671	0692	0712	0733	0754	0774	0795	21
04	0816	0837	0858	0878	0899	0920	0941	0962	0983	1004	21
1,05	1,1025	1046	1067	1088	1109	1130	1151	1172	1194	1215	21
06	1236	1257	1278	1300	1321	1342	1364	1385	1406	1428	21
07	1449	1470	1492	1513	1535	1556	1578	1599	1621	1642	22
08	1664	1686	1707	1729	1751	1772	1794	1816	1837	1859	22
09	1881	1903	1925	1946	1968	1990	2012	2034	2056	2078	22
1,10	1,2100	2122	2144	2166	2188	2210	2232	2254	2277	2299	22
11	2321	2343	2365	2388	2410	2432	2455	2477	2499	2522	22
12	2544	2566	2589	2611	2634	2656	2679	2701	2724	2746	23
13	2769	2792	2814	2837	2860	2882	2905	2928	2950	2973	23
14	2996	3019	3042	3064	3087	3110	3133	3156	3179	3202	23
1,15	1,3225	3248	3271	3294	3317	3340	3363	3386	3410	3433	23
16	3456	3479	3502	3526	3549	3572	3596	3619	3642	3666	23
17	3689	3712	3736	3759	3783	3806	3830	3853	3877	3900	24
18	3924	3948	3971	3995	4019	4042	4066	4090	4113	4137	24
19	4161	4185	4209	4232	4256	4280	4304	4328	4352	4376	24

XIX. — TABLES DE PUISSANCES.

Puissances fractionnaires de 10, ou Table abrégée d'antilogarithmes à dix décimales.

	Dixièmes.	Centièmes.	Millièmes.	Dix-mill.	Cent-mill.	Million.	D.-mill.	C.-mill.
		1,	1,0	1,00	1,000	1,0000	1,0000 0	1,0000 00
9	7,9432 8234 72	2302 6877 08	209 3948 37	20 7447 53	2 0725 41	2072 35	207 23	20 72
8	6,3095 7344 48	2022 6443 46	185 9138 81	18 4376 57	1 8422 38	1842 09	184 21	18 42
7	5,0118 7233 63	1748 9755 49	162 4869 29	16 1310 92	1 6119 39	1611 82	161 18	16 12
6	3,9810 7170 55	1481 5362 15	139 1138 57	13 8250 58	1 3816 46	1381 56	138 16	13 82
5	3,1622 7766 02	1220 1845 43	115 7945 43	11 5195 55	1 1513 59	1151 30	115 13	11 51
4	2,5118 8643 15	0964 7819 61	092 5288 61	09 2145 83	0 9210 76	0921 04	092 10	09 21
3	1,9952 6231 50	0715 1930 52	069 3166 89	06 9101 42	0 6907 99	0690 78	069 08	06 91
2	1,5848 9319 25	0471 2854 81	046 1579 03	04 6062 31	0 4605 28	0460 52	046 05	04 61
1	1,2589 2541 18	0232 9299 23	023 0523 81	02 3028 50	0 2302 61	0230 26	023 03	02 30

Puissances de *e*.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,0000	1,0101	1,0202	1,0305	1,0408	1,0513	1,0618	1,0725	1,0833	1,0942
0,1	1,1052	1,1163	1,1275	1,1388	1,1503	1,1618	1,1735	1,1853	1,1972	1,2092
0,2	1,2214	1,2337	1,2461	1,2586	1,2712	1,2840	1,2969	1,3100	1,3231	1,3364
0,3	1,3499	1,3634	1,3771	1,3910	1,4049	1,4191	1,4333	1,4477	1,4623	1,4770
0,4	1,4918	1,5068	1,5220	1,5373	1,5527	1,5683	1,5841	1,6000	1,6161	1,6323
0,5	1,6487	1,6653	1,6820	1,6989	1,7160	1,7333	1,7507	1,7683	1,7860	1,8040
0,6	1,8221	1,8404	1,8589	1,8776	1,8965	1,9155	1,9348	1,9542	1,9739	1,9937
0,7	2,0138	2,0340	2,0544	2,0751	2,0959	2,1170	2,1383	2,1598	2,1815	2,2035
0,8	2,2255	2,2479	2,2705	2,2933	2,3164	2,3396	2,3632	2,3869	2,4109	2,4351
0,9	2,4596	2,4843	2,5093	2,5345	2,5600	2,5857	2,6117	2,6379	2,6645	2,6912
1,	2,718	3,004	3,320	3,669	4,055	4,482	4,953	5,474	6,050	6,686
2,	7,389	8,166	9,025	9,974	11,023	12,182	13,464	14,880	16,445	18,174
3,	20,09	22,20	24,53	27,11	29,96	33,12	36,60	40,45	44,70	49,40
4,	54,60	60,34	66,69	73,70	81,45	90,02	99,48	109,95	121,51	134,29
5,	148,41	164,02	181,27	200,34	221,41	244,69	270,43	298,87	330,30	365,04
6,	403	446	493	545	602	665	735	812	898	992
7,	1097	1212	1339	1480	1636	1808	1998	2208	2441	2697
8,	2981	3294	3641	4024	4447	4915	5432	6003	6634	7332
9,	8103	8955	9897	10938	12088	13360	14765	16318	18034	19930
10,	22026	24343	26903	29733	32860	36316	40135	44356	49021	54176

Puissances de 2, avec leurs logarithmes.

n	2^n	$\log 2^n$	n	2^n	n	2^n	n	2^n	n	2^n
1	2	0,3010 2999 5664	10	1024	19	524288	28	268 435456	37	137438 953472
2	4	0,6020 5999 1328	11	2048	20	1 048576	29	536 870912	38	274877 906944
3	8	0,9030 8998 6992	12	4096	21	2 097152	30	1073 741824	39	549755 813888
4	16	1,2041 1998 2656	13	8192	22	4 194304	31	2147 483648	40	1 099511 627776
5	32	1,5051 4997 8320	14	16384	23	8 388608	32	4294 967296	41	2 199023 255552
6	64	1,8061 7997 3984	15	32768	24	16 777216	33	8589 934592	42	4 398046 511104
7	128	2,1072 0996 9648	16	65536	25	33 554432	34	17179 869184	43	8 796093 022208
8	256	2,4082 3996 5312	17	131072	26	67 108864	35	34359 738368	44	17 592186 044416
9	512	2,7092 6996 0976	18	262144	27	134 217728	36	68719 476736	45	35 184372 088832

Puissances des nombres entiers N = 3, 5, 6, 7,....

N.	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	60466176
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	282475249
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489	3486784401
11	121	1331	14641	161051	1771561	19487171	214358881	2357947691	25937424601
12	144	1728	20736	248832	2985984	35831808	429981696	5159780352	61917364224
13	169	2197	28561	371293	4826809	62748517	815730721	10604499373	137858491849
14	196	2744	38416	537824	7529536	105413504	1475789056	20661046784	289254654976
15	225	3375	50625	759375	11390625	170859375	2562890625	38443359375	576650390625

FIN.

